C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sin x=0, \\ (3\sqrt{\sin x}-1)(2y+8)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=-4, \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ или $\sin x=\frac{1}{9}$.

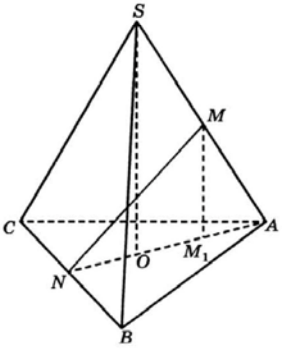
Если $y=-4$, то из первого уравнения получаем: $\sin x=4$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x=\frac{1}{9}$, то $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{9}+\pi n$, $n \in Z$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\frac{1}{9}+\pi n;\ -\frac{1}{9}\right)$, $n \in Z$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB=24\sqrt{3}$, $SC=25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

Решение.



Пусть N — середина BC, а M — середина AS. Прямая AS проецируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой AM, следовательно, угол M_1NM искомый.

$MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника SAO.

Тогда

$$NM_1=AN-\frac{1}{2}AO=\frac{2}{3}AN=\frac{2}{3}\cdot 24\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24.$$

Кроме того, $MM_1=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}\sqrt{SC^2-CO^2}=\frac{7}{2}$.

Из прямоугольного треугольника MM_1A находим:

$$\operatorname{tg}\angle M_1NM=\frac{MM_1}{NM_1}=\frac{7}{48}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{7}{48}$.

C3 Решите неравенство

$$\log_7\left(\left(5^{-x^2}-5\right)\left(5^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_7\left(\frac{5^{-x^2}-5}{5^{-x^2+16}-1}\right)>\log_7\left(5^{13-x^2}-4\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=5^{-x^2}$, $0<t\le1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_7\left((t-5)\left(5^{16}t-1\right)\right)+\log_7\frac{t-5}{5^{16}t-1}>\log_7(5^{13}t-4)^2.$$

$t-5<0$, поэтому $5^{16}t-1<0$, т.е. $0<t<\frac{1}{5^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases}\log_7(t-5)^2>\log_7(5^{13}t-4)^2,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$ $\begin{cases}|t-5|>|5^{13}t-4|,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$

$\begin{cases}5-t>4-5^{13}t,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$ $0<t<\frac{1}{5^{16}}$.

Тогда $5^{-x^2}<5^{-16}$; $x^2>16$; $\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$ **Ответ:** $(-\infty,\ -4)$, $(4,\ +\infty)$.

C4 В треугольнике ABC $AB=7$, $BC=9$, $CA=4$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Подсчитывая разными способами периметры треугольников ADC и ABD, получаем: $DE=\frac{d+y-4}{2}$, $DF=\frac{d+x-7}{2}$. Возможны два случая.

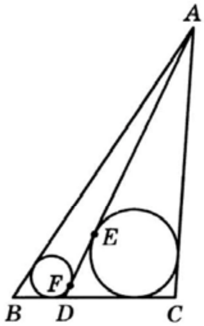


Рис. 1

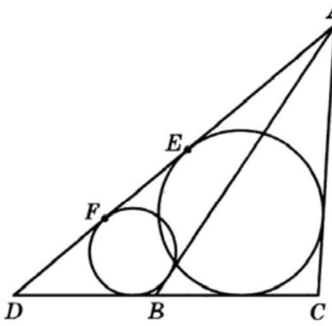


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=1{,}5$, $y=7{,}5$. Значит, $EF=\frac{3+y-x}{2}=4{,}5$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=\frac{9}{4}$, $y=x+9=\frac{45}{4}$. Значит, $EF=6$. **Ответ:** $4{,}5$ или 6.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2-3|x-a^2|-5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

При $x \ge a^2$ $f(x)=x^2-8x+3a^2$, поэтому график функции есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

При $x \le a^2$ $f(x)=x^2-2x-3a^2$, поэтому график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.

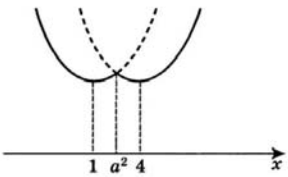


Рис. 1

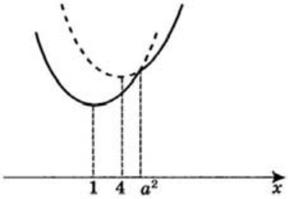


Рис. 2

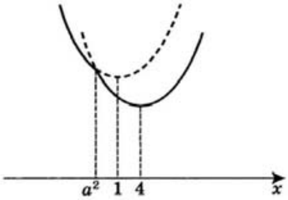


Рис. 3

Обе параболы проходят через точку $(a^2;\ f(a^2))$.

Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $1<a^2<4$, откуда $1<|a|<2$.

Ответ: $-2<a<-1;\ 1<a<2$.

C6 Перед каждым из чисел 3, 4, 5, ... 11 и 14, 15, ... 18 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа обоих наборов взяты с плюсами, то сумма максимальна и равна

$$5(3+\ldots+11)+9(14+\ldots+18)=5\left(\frac{3+11}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{14+18}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как сумма нечётная, число нечётных слагаемых в ней нечётно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого её слагаемого. Поэтому любая из полученных сумм будет нечётной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(3+4+5+6+7-8-9+10+11)+9(14-15-16-17+18)=$$
$$=5\cdot 29+9\cdot(-16)=145-144=1.$$

Ответ: 1 и 1035.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\cos x=0, \\ \left(3\sqrt{\cos x}-1\right)\left(3y-2\right)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=\frac{2}{3}, \\ \cos x\ge 0 \end{cases}$ или $\cos x=\frac{1}{9}$.

Если $y=\frac{2}{3}$, то из первого уравнения $\cos x=-\frac{2}{3}$. Это противоречит условию $\cos x\ge 0$.

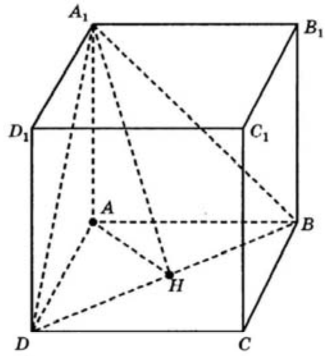
Если $\cos x=\frac{1}{9}$, то $x=\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n;\ -\frac{1}{9}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=6$, $AD=8$, $CC_1=16$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

Решение.

Плоскости ABC и A_1DB имеют общую прямую BD. Проведем перпендикуляр AH к BD. По теореме о трех перпендикулярах $A_1H\perp BD$. Значит, угол A_1HA — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и A_1DB.



Из прямоугольного треугольника BAD находим: $AH=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$.

Из прямоугольного треугольника A_1AH находим:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA=\frac{AA_1}{AH}=\frac{16\cdot 5}{24}=\frac{10}{3}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{2^{x+7}} 4}{\log_{2^{x+7}}(-16x)} \le \frac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne -\frac{1}{16}, \\ x \ne -7, \\ x < 0. \end{cases}$

Пусть $t = \log_2(-x)$, тогда $\frac{2}{4+t} \le \frac{1}{t}$, откуда $t < -4$ или $0 < t \le 4$.

Значит, $-16 \le x < -1$ или $-\frac{1}{16} < x < 0$. Из полученных промежутков нужно исключить точку -7.

Ответ: $[-16;\ -7),\ (-7;\ -1),\ \left(-\frac{1}{16};\ 0\right)$.

C4 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC, если $AB = 12$.

Решение.

Пусть E — точка пересечения биссектрис, $BM = x$, $MN = y$, $NC = z$.

Так как $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} < 1$, точка M лежит между точками B и N. Возможны два случая.

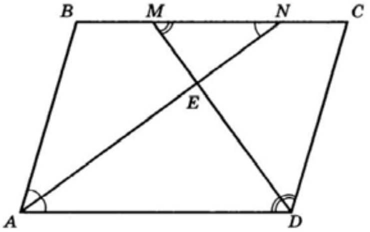


Рис. 1

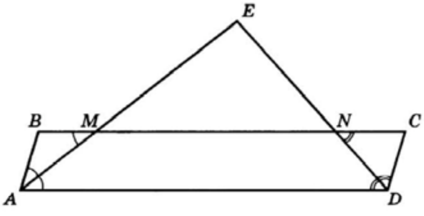


Рис. 2

1. Точка E — внутри параллелограмма (рис. 1). Треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x + y = 12 = y + z$, следовательно, $x = z < y$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, откуда, $y = 8$, $z = x = 4$, $BC = 2x + y = 16$.

2. Точка E — вне параллелограмма (рис. 2). Тогда $x = z = 12$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, откуда $y = 24$, $BC = 2x + y = 48$.

Ответ: 16 или 48.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|$ больше 1.

Решение.

При $x^2-4x+3\geq 0$ $f(x)=x^2+2(a-2)x+3$, график функции состоит из двух частей парабол с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=2-a$;

При $x^2-4x+3<0$ $f(x)=-x^2+2(a+2)x-3$, график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

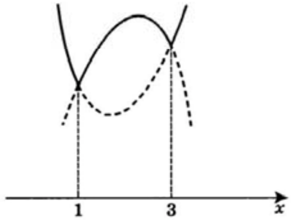


Рис. 1

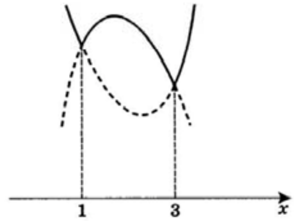


Рис. 2

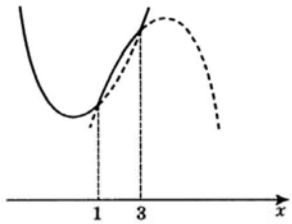


Рис. 3

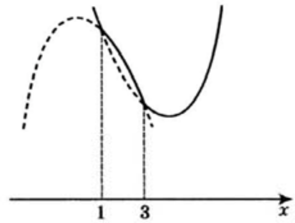


Рис. 4

Наименьшее значение функции $f(x)$ может быть только в точках $x=1$ или $x=3$, а если $2-a\notin[1;\,3]$ — то в точке $x=2-a$.

Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(3)>1, \\ f(2-a)>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a>1, \\ 6a>1, \\ 2a(2-a)+|a^2-1|>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{6}, \\ 2a^2-4a+1-|a^2-1|<0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 1, \\ a^2-4a+2<0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<1, \\ 3a^2-4a<0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 1, \\ 2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<1, \\ 0<a<\dfrac{4}{3}; \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ 2+\sqrt{2}\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} 1\leq a<2+\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{2}<a<1; \end{array}\right. \qquad \frac{1}{2}<a<2+\sqrt{2}.$$

C6 Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма наибольшая и она равна

$$(5+\ldots+9)(12+\ldots+17)=\left(\frac{5+9}{2}\cdot 5\right)\cdot\left(\frac{12+17}{2}\cdot 6\right)=35\cdot 87=3045.$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(5+6+7-8-9)(12-13-14+15-16+17)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1 и 3045.

C1 Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\cos x+1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

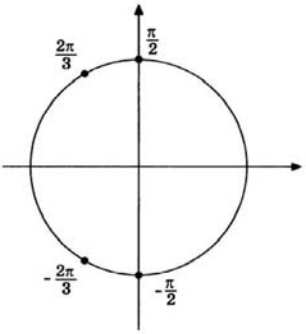
Решение.

Запишем систему: $\begin{cases}\cos 2x+\cos x+1=0.\\ \sin x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Решим уравнение: $2\cos^2 x + \cos x = 0$, откуда $\cos x = 0$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$. Получаем:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Числа $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ не удовлетворяют условию $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

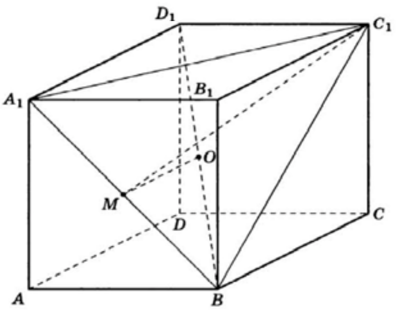
Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B.

$A_1D_1\perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1, поэтому $MO\perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $C_1M\perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.

Найдём стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1 находим $OM=\dfrac{1}{2}$; из треугольника BA_1C_1 находим $MC_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. $OC_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку O — середина диагонали AC_1.

Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:



$$\cos\angle OMC_1=\frac{OM^2+C_1M^2-OC_1^2}{2\cdot OM\cdot MC_1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{(x-1)^2-1}}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3))}{\log_{2^{(x-1)^2-1}}(x^2+4x+5)} \geq 0.$

Решение.

Чтобы был определён логарифм по основанию $2^{(x-1)^2-1}$, это выражение должно быть положительно и отлично от 1. Находим: $(x-1)^2-1 \neq 0$, откуда $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим неравенство:

$$\log_{x^2+4x+5}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)) \geq 0.$$

Заметим, что $x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \geq 1$, причём равенство достигается только при $x=-2$. При $x=-2$ получаем:

$$\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)) \geq 1.$$

Выделим полный квадрат в основании логарифма:

$$x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2};$$

это выражение больше 1 при всех допустимых x. Таким образом,

$$x^2-2x+3 \geq 2x^2-2x+3.$$

Тогда $x^2+2x \leq 0$, откуда $-2 \leq x \leq 0$. Учитывая, что $x \neq 0$ и $x \neq -2$, получаем: $-2 < x < 0$.

Ответ: $(-2;\ 0)$.

C4 Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\dfrac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Решение.

Пусть вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на основании BC равнобедренного треугольника ABC (точка K — между B и L), а вершины M и N — на боковых сторонах AC и AB соответственно.

Обозначим $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\angle ACB=\beta$. Тогда

$$\cos\alpha=\frac{15}{17},\quad \sin\alpha=\frac{8}{17},\quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}}=4.$$

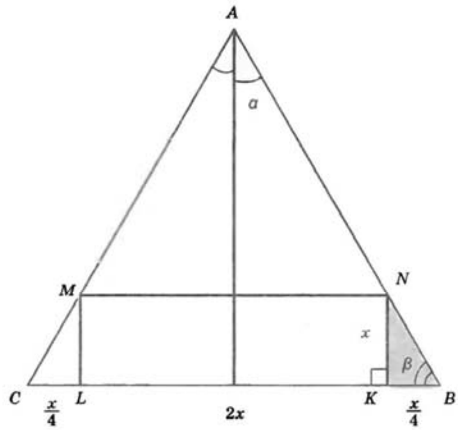


Рис. 1

Предположим, что сторона KL прямоугольника вдвое больше его стороны KN. Положим $KN = x$, $KL = 2x$. Из прямоугольного треугольника BKN находим, что $BK = KN \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{4}$. Тогда $LC = BK = \frac{x}{4}$, а так как $KL = MN = 2x$, то

$$BC = BK + KL + LC = \frac{x}{4} + 2x + \frac{x}{4} = \frac{5}{2}x = 40,$$

откуда $x = 16$. Тогда $KL = 2x = 32$. Следовательно,

$$S_{KLMN} = KL \cdot KN = 16 \cdot 32 = 512.$$

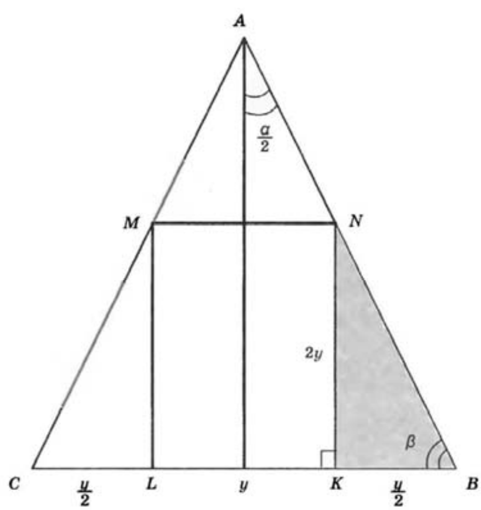


Рис. 2

Пусть теперь сторона KN прямоугольника вдвое больше его стороны KL. Положим $KL = y$, $KN = 2y$. Из прямоугольного треугольника BKN находим, что $BK = KN\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{2}$. Тогда $LC = BK = \frac{y}{2}$, а так как $KL = MN = y$, то

$$BC = BK + KL + LC = \frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 2y = 40,$$

откуда $y = 20$. Тогда $KN = 2y = 40$. Следовательно,

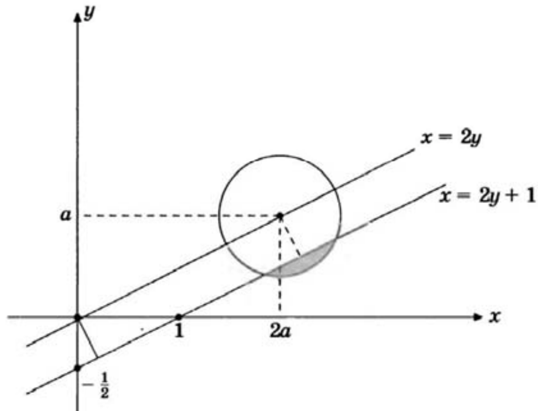
$$S_{KLMN} = KL \cdot KN = 20 \cdot 40 = 800.$$

Ответ: 512 или 800.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x-2y \ge 1 \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

Первое неравенство задаёт на координатной плоскости круг радиуса $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$ с центром в точке $(2a;\ a)$. Второе неравенство задаёт полуплоскость с границей $x = 2y + 1$. Система имеет решения, если круг и полуплоскость имеют общие точки; для этого расстояние от центра круга до прямой $x = 2y + 1$ должно быть не больше радиуса круга. Это расстояние между параллельными прямыми: $x = 2y$ и $x = 2y + 1$. Рассмотрим треугольник с вершинами $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ -1/2)$. Его катеты равны 1 и 1/2; следовательно, высота, опущенная на гипотенузу, равна $\dfrac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Значит, система имеет решение при $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$. Решая это неравенство, получаем: $|a| \ge 6$, т.е. $a \le -6$ или $a > 6$.



Ответ: $a \le -6$, $a \ge 6$.

C6 Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

Решение.

Разложим N на простые множители: $N=2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}7^{\alpha_7}\dots p^{\alpha_p}$, где p — наибольший простой множитель, и $\alpha_i=0,1,2\dots$ Если запись числа N оканчивается n нулями, то или $\alpha_2=n, \alpha_5\ge n$, или, наоборот, $\alpha_2\ge n$, $\alpha_5=n$.

Оценим количество делителей k числа N:

$$k=(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_5+1)\dots(\alpha_p+1)\ge(n+1)^2,$$

при этом k делится на $n+1$.

1 случай. Если k чётное, то все делители разбиваются на $\frac{k}{2}$ пар вида $\left(d;\ \frac{N}{d}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно N. Поэтому произведение всех делителей равно $N^{\frac{k}{2}}$.

2 случай. Если k нечётное, то $k-1$ делителей разбиваются на пары указанного вида, и есть еще один делитель — $\sqrt{N}$. И в этом случае тоже произведение всех делителей: $N^{\frac{k-1}{2}}\cdot\sqrt{N}=N^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого N произведение всех делителей оканчивается $\frac{nk}{2}$ нулями, следовательно, $nk=2\cdot 399=798$. При этом $798=nk\ge n(n+1)^2$, откуда следует, что n — делитель числа 798, и $n\le 8$.

Выпишем все такие n: 1, 2, 3, 6, 7. Из равенства $798=nk$ также следует, что 798 делится на $n+1$. Поэтому возможно только n = 1, 2 и n = 6. Для каждого из этих n подберем подходящее N. Ограничимся простыми множителями 2 и 5. Значит, нужно подобрать только α_2 и α_5.

1. $\alpha_2=n=1$, $k=798:n=798$; $\alpha_5+1=\frac{k}{n+1}=399$; $N=2^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_5}=2^1\cdot5^{398}$.

2. $\alpha_2=n=2$, $k=399$; $399:3=133$; $\alpha_5=132$; $N=2^2\cdot5^{132}$.

3. $\alpha_2=n=6$, $k=133$; $133:7=19$; $\alpha_5=18$; $N=2^6\cdot5^{18}$.

Таким образом, для n = 1, 2, 6 найдены (и даже не все) N, оканчивающиеся n нулями, произведение делителей которых оканчивается 399 нулями.

Ответ: 1, 2, 6.

C1 Решите уравнение $\left(2\cos^2 x-9\cos x+4\right)\sqrt{-2\operatorname{tg}x}=0$

Решение.

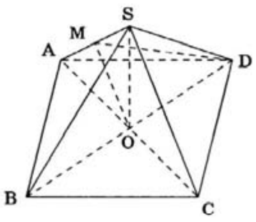
Первый случай: $\operatorname{tg}x=0$. Тогда $x=n\pi$, где $n\in Z$.

Второй случай: $\operatorname{tg}x\neq 0$. Тогда $\operatorname{tg}x<0$ и $2\cos 2x-9\cos x+4=0$. Решая квадратное уравнение, находим: $\cos x=4$, $\cos x=\frac{1}{2}$. Уравнение $\cos x=4$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$, учитывая, что $\operatorname{tg}x<0$, получаем $-\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $n\in Z$.

Ответ: $n\pi$; $-\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $n\in Z$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

Решение.



Пусть точка O — центр основания, а M — середина ребра AS. Поскольку $AC\perp BD$ и $SO\perp BD$, плоскость SAC перпендикулярна прямой BD. Это значит, что плоскость SAC и есть плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно BD.

Проведём отрезки MD и MO. Так как треугольник SAD правильный, $MD\perp AS$. Так как треугольник ASC — равнобедренный, $OM\perp AS$. Следовательно, искомый угол равен углу OMD.

Найдём стороны треугольника OMD

$$OD=\frac{1}{\sqrt{2}},\ OM=\frac{OA}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\ MD=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle OMD=\frac{OM^2+MD^2-OD^2}{2\cdot OM\cdot DM}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $\sin\angle OMD=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

C3 Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$.

Решение.

Запишем неравенство в виде:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 2x} - \frac{6}{\log_3 9x} \le 0;$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1+\log_3 x} - \frac{6}{2+\log_3 x} \le 0;$$

Сделаем замену $y = \log_3 x$ и приведём левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{3(y-1)\left(y+\frac{2}{3}\right)}{y(y+1)(y+2)} \ge 0.$$

Решая получаем: $-2 < y < -1$, $-\frac{2}{3} \le y < 0$ или $y \ge 1$, следовательно,

$$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3},\ 3^{-\frac{2}{3}} \le x < 1,\ x \ge 3.$$

C4 Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение.

Пусть AD — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O — центр вписанной окружности, P — точка ее касания с боковой стороной AB. Тогда $AO = AD - OD = 9 - 4 = 5$.

Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника AOP находим, что $\sin\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{4}{5}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3},\quad AP = AO\cos\alpha = 5\cdot\frac{3}{5} = 3,$$

$$BP = BD = AD\operatorname{tg}\alpha = 9\cdot\frac{4}{3} = 12.$$

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 1), а также основания BC. Тогда D — точка касания, поэтому

$$BF = BD = 12,\quad AF = AP + PB + BF = 3 + 12 + 12 = 27.$$

Следовательно,

$$r_1 = O_1F = AF\operatorname{tg}\alpha = 27\cdot\frac{4}{3} = 36.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD — биссектрисы смежных углов BAK и DAB, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ — прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 9$.

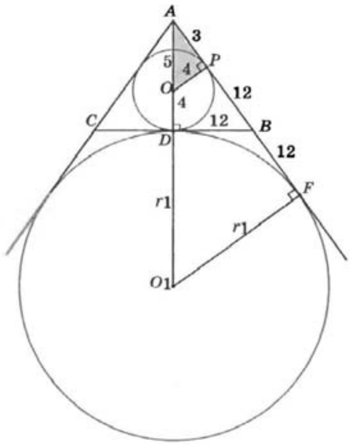


Рис. 1

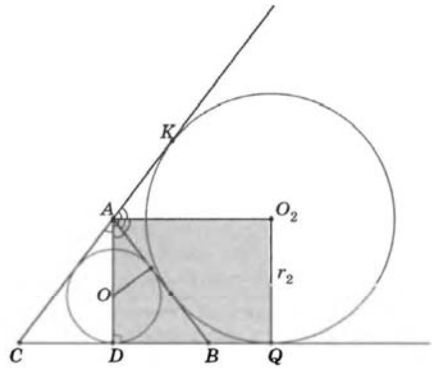


Рис. 2

Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 9.

Ответ: 36 или 9.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2+y^2-1 \le -a^2+2a(x-y+1) \\ x^2+y^2-1 \le 3a^2-2a(2x-3y+4)+1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Перенесём члены с x и y влево и выделим полные квадраты:

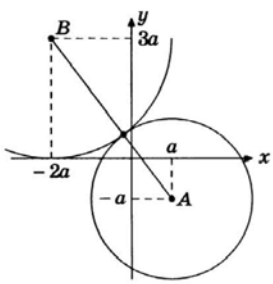
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+a)^2 \le (a+1)^2, \\ (x+2a)^2+(y-3a)^2 \le (4a-1)^2. \end{cases}$$

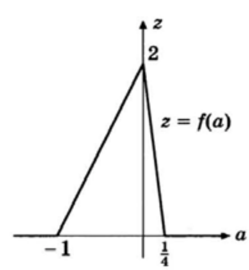
На координатной плоскости эти неравенства задают круги, которые имеют единственную общую точку, если и только если расстояние между их центрами равно сумме радиусов. Таким образом, надо решить уравнение:

$$\sqrt{9a^2+16a^2} = |a+1|+|4a-1|,$$

откуда

$$|4a-1|+|a+1|-5|a| = 0.$$





Построим график функции $f(a)=|4a-1|+|a+1|-5|a|$. На рисунке видно, что решение уравнения $f(a)=0$ таково: $a \le -1$ или $a \ge \frac{1}{4}$.

Ответ: $(-\infty,-1]$, $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

С6 Ученик должен был перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в три раза больше истинного. Найдите все три числа.

Решение.

Обозначим эти числа за a, b и c. Имеем $\frac{1000a+b}{c}=3\cdot\frac{ab}{c}$, а значит $1000a+b=3ab$.

Так как правая часть полученного равенства делится на a, значит, левая часть тоже делится на a и $b=ka$. Получаем $1000a+ka=3ka^2$, что равносильно $1000+k=3ka$.

Обратим внимание, что k не превосходит 9, так как и a и b — трехзначные числа, а $1000+k$ делится на 3. Значит, возможны только варианты $k=2$, $k=5$, $k=8$.

Если $k=2$, то $a=167$, $b=334$, а $c=27\,889$ или $c=55\,778$ (других пятизначных делителей у ab нет).

Если $k=5$, то $a=67$, что противоречит условию.

Если $k=8$, то $a=42$, что противоречит условию.

Ответ: 167, 334 и 278 889 или 167, 334 и 55 778.

C1 Решите уравнение $\frac{9^{\sin x}-3}{\sqrt{-2\cos x}}=0$,

Решение.

Перейдем к системе

$$\begin{cases} 9^{\sin x}-3=0, \\ -2\cos x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \cos x<0. \end{cases}$$

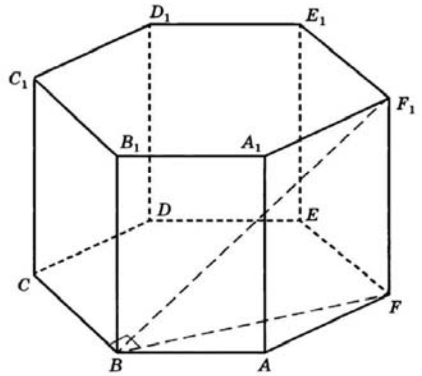
Значит, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

Решение.

Проведем отрезки BF и BF_1. $BF\perp BC$, поскольку $\angle CBA=120°$, а $\angle ABF=30°$. BF — проекция BF_1 на плоскость основания. По теореме о



трех перпендикулярах $BF_1\perp BC$ и, значит, $BF_1\perp E_1F_1$. Таким, образом искомое расстояние — длина отрезка BF_1.

Рассмотрим треугольник BFF_1. Он прямоугольный, $BF=\sqrt{3}$, $FF_1=1$. По теореме Пифагора находим: $BF_1=\sqrt{3+1}=2$.

Ответ: 2.

С3 Решите неравенство

$$\frac{10^x}{2\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \le \frac{\left(15\cdot 3^x\right)^x}{9\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)}.$$

Решение.

Разделим обе части неравенства на 5^x:

$$\frac{2^{x-1}}{\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \le \frac{3^{x^2+x-2}}{\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)};$$

$$\frac{3^{(x-1)(x+2)}-2^{x-1}}{\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0; \quad \frac{3^{(x-1)(x+2)}-3^{(x-1)\log_3 2}}{\left(\log_2{}^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0.$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} x+1\ne 0, \\ (x+1)^2\ne 1, \\ x+2>0, \\ x+2\ne 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x\ne -1, \\ x\ne 0, \\ x>-2. \end{cases}$$

При этих условиях получаем неравенство

$$\frac{(x-1)(x+2)-(x-1)\log_3 2}{(x+2)-1} \ge 0, \text{ откуда } \frac{(x-1)(x+2-\log_3 2)}{x+1} \ge 0.$$

Получаем: $\log_3 2-2 \le x < -1,\ \ x \ge 1$.

Ответ: $\left[\log_3 2-2;-1\right),\ \left[1;+\infty\right)$.

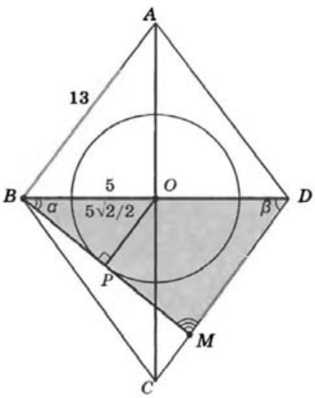
C4 Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B, касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

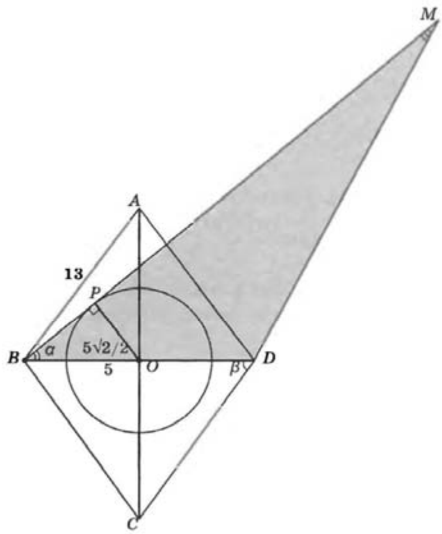
Решение.

Пусть точка M лежит между C и D (рис. 1), P — точка касания прямой BM с данной окружностью, O — центр ромба.

По теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$





Обозначим $\angle OBM = \alpha$, $\angle BDC = \beta$. Из прямоугольных треугольников OPB и COD находим, что

$$\sin\alpha = \frac{OP}{OB} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = 45^\circ,$$

$$\cos\beta = \frac{OD}{CD} = \frac{5}{13}, \quad \sin\beta = \frac{12}{13}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику BMD получим, что $\frac{DM}{\sin\angle MBD} = \frac{BD}{\sin\angle BMD}$, поэтому

$$MD = \frac{BD\sin\angle MBD}{\sin\angle BMD} = \frac{10\sin 45^\circ}{\sin(180^\circ - 45^\circ - \beta)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \beta)} =$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ\cos\beta + \cos 45^\circ\sin\beta} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13}} = \frac{130}{17}$$

Следовательно,

$$CM = CD - MD = 13 - \frac{130}{17} = \frac{91}{17}.$$

Пусть теперь точка M лежит на продолжении стороны CD за точку D (рис. 2). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle BMD = \angle BDC - \angle MBD = \beta - \alpha.$$

Далее, рассуждая аналогично, получим, что

$$MD = \frac{5\sqrt{2}}{\sin(\beta - 45^\circ)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin\beta\cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos\beta} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13}} = \frac{130}{7}.$$

Следовательно,

$$CM = CD + MD = 13 + \frac{130}{7} = \frac{221}{7}.$$

Ответ: $\frac{91}{17}$ или $\frac{221}{7}$.

C5 Найдите все значения параметра a, при котором уравнение $f(x)=|2a+5|x$ имеет ровно 6 решений, где f — чётная периодическая функция, с периодом $T=2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le 1$.

Решение.

Если $a=0$, то функция $f(x)$ тождественно равна нулю, и ее график имеет с прямой $y=5x$ единственную общую точку.

Пусть $a>0$ (рис. 1). Решение $x=0$ есть при всех a. Нужно еще ровно пять решений. Единственный возможный случай показан на рисунке: прямая проходит через точку $(5;a)$. Составим уравнение $|2a+5|\cdot 5=a$.

Учитывая, что $a>0$, получим: $9a=-25$. Положительных решений нет. Следовательно, случай $a>0$ невозможен.

Теперь пусть $a<0$ (см. рис. 2). Шесть решений есть, только если прямая проходит через точку $(-5;a)$. Составим уравнение:

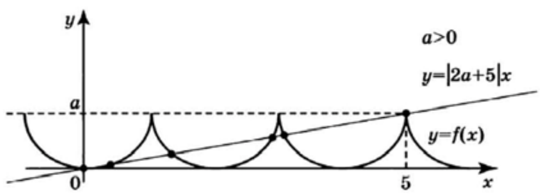


Рис. 1

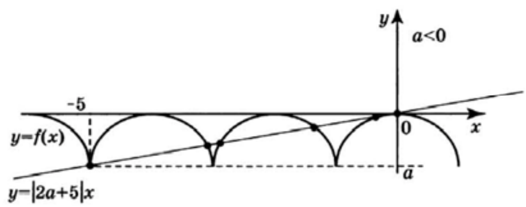


Рис. 2

$$|2a+5|\cdot(-5)=a\text{, откуда } 2a+5=-\frac{a}{5} \text{ или } 2a+5=\frac{a}{5}.$$

Получаем: $a=-\frac{25}{11}$ или $a=-\frac{25}{9}$.

Ответ: $a=-\frac{25}{11}, a=-\frac{25}{9}$.

С6 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

Решение.

Очевидно, $a_3 \geq 3$, причем $a_3 = 3$, только если $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, то есть если десятичная дробь начинается: 0,123... (четвертая цифра не ноль).

Заметим, что таким образом начинается, например, число

$$m = 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots + n \cdot 10^{-n} + \ldots .$$

Найдем число m и проверим, удовлетворяет ли он условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.

$$\begin{aligned} m = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots &+ \\ +10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots &+ \\ +10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots &+ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

В каждой строке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1}. Получаем:

$$m = 10^{-1}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + 10^{-2}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots + 10^{-n}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \left(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} + \ldots\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{81}.$$

Получается, что m — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число m удовлетворяет условию задачи и для этого числа $a_3 = 3$.

Ответ: 3.

C1 Решите уравнение $\left(2\cos^2 x - 7\cos x + 3\right)\log_{41}(-\sin x) = 0.$

Решение.

Первый случай: $\log_{41}(-\sin x) = 0$, откуда $\sin x = -1$ и, значит,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Второй случай: $\log_{41}(-\sin x) \neq 0$. Перейдем к системе

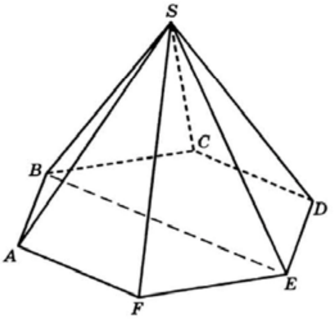
$$\begin{cases} 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0, \\ -1 < \sin x < 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы находим: $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{3}{2}$. Второе уравнение не имеет решений, а из первого получаем: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Учитывая, что $-1 < \sin x < 0$, находим: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.



Решение.

Вместо прямой CD рассмотрим параллельную ей прямую BE. Искомый угол равен углу SBE. Треугольник SBE равносторонний, поскольку $BE = 2$. Значит, $\angle SBE = 60°$

Ответ: $60°$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)} \geq \dfrac{\left(4\cdot 2^{\lg(10x)}\right)^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)}$.

Решение.

Разделим обе части на $2^{1+\lg x}$. Получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)} \geq \frac{2^{\lg x-1}\cdot 2^{\lg(10x)\cdot(1+\lg x)}}{\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)};$$

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{\lg x-1}\cdot 2^{(1+\lg x)\cdot(1+\lg x)}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)};$$

$$\frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0; \qquad \frac{2^{\log_2 7\cdot\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0.$$

Сделаем замену: $\lg x = y$:

$\dfrac{2^{y\cdot\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0$, откуда $\dfrac{y\cdot\log_2 7-\left(y^2+3y\right)}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0$; $\dfrac{y\left(y-(\log_2 7-3)\right)}{(y+2)^2(y-1)} \leq 0$.

Решение полученного рационального неравенства:

$$y<-2,\quad -2<y\leq \log_2 7-3,\quad 0\leq y<1.$$

Тогда

$$0<x<0{,}01,\quad 0{,}01<x\leq 10^{\log_2 7-3},\quad 1\leq x<10.$$

Ответ: $(0;0{,}01)$, $\left(0{,}01;10^{\log_2\frac{7}{8}}\right]$, $[1;10)$.

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

Решение.

Пусть окружность S с центром O и радиусом R пересекает стороны данного прямого угла в точках A и B, $AC=8, BC=6$, искомая окружность с центром Q касается сторон AC и BC угла ACB в точках N и K соответственно, а окружности S — в точке M.

Точка O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, поэтому O — середина его гипотенузы AB,

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2}=\frac{1}{2}\cdot 10=5.$$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точки O, Q и M лежат на одной прямой. Опустим перпендикуляр OH из центра окружности S на прямую BC. Тогда OH — средняя линия треугольника ABC, поэтому $OH=\frac{1}{2}AC=4$ и $CH=\frac{1}{2}BC=3$, а т. к. центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle QCK=45^\circ$, поэтому $CK=QK=r$.

Опустим перпендикуляр QF из центра искомой окружности на прямую OH. Тогда

$$OF=|OH-FH|=|OH-QK|=|4-r|, \quad QF=KH=|r-3|.$$

Предположим, что искомая окружность и окружность S касаются внутренним образом (рис. 1). Тогда $OQ=OM-QM=R-r=5-r$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OFQ. По теореме Пифагора $OQ^2=OF^2+QF^2$ или $(5-r)^2=(4-r)^2+(r-3)^2$, откуда находим, что $r=4$.

Если же искомая окружность касается данной внешним образом (рис. 2), то $OQ=OM+QM=R+r=5+r$. Тогда из соответствующего уравнения $(5+r)^2=(4-r)^2+(r-3)^2$ находим, что $r=24$.

Ответ: 4 или 24.