РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 3

Часть 1

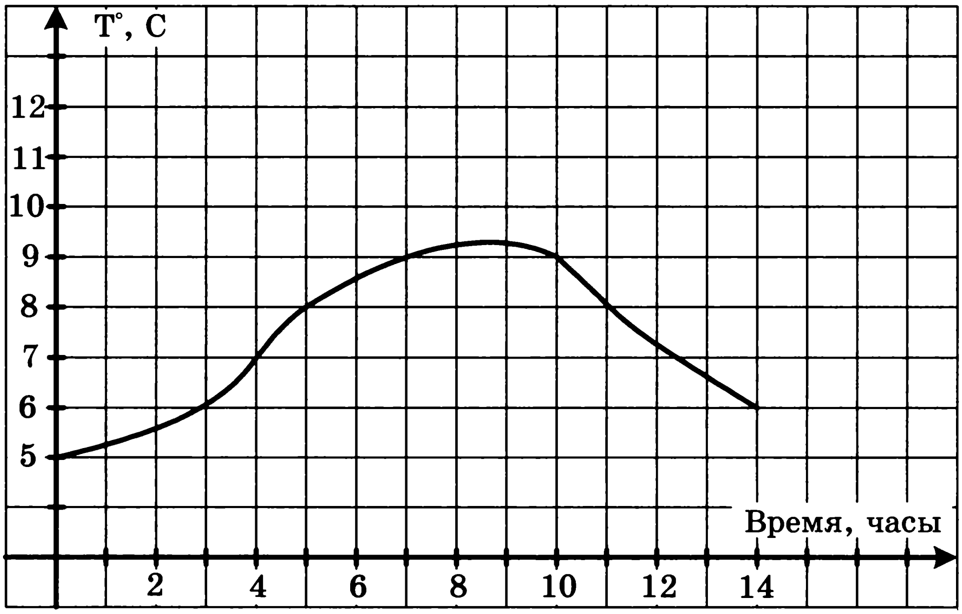
B1. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 60 рублей после повышения цены билета на 40%?

Решение

После повышения цены билета на 40% 1 билет будет стоить $15 \cdot \frac{140}{100} = 21$ рубль. На 60 рублей можно будет купить 2 билета.
3 билета стоят уже 3 · 21 = 63 рубля.
Значит 60 рублей не хватит для покупки 3 билетов.

Ответ: 2.

B2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. Сколько часов температура была выше 8 градусов?



Решение

По графику видно, что температура была выше 8 градусов между 5 и 11 часами, то есть на протяжении 11 − 5 = 6 часов.

Ответ: 6.

B3. Решите уравнение $4^{2-x} = 64$.

Решение

$4^{2-x} = 64;$

$4^{2-x} = 4^3;$

$2 - x = 3;$

$x = -1.$

Ответ: −1.

B4. Найдите значение выражения $49(1-\cos^2\alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{5}{7}$.

Решение

$$49\left(1-\cos^2\alpha\right) = 49\sin^2\alpha = 49\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2 = 49\cdot\frac{25}{49} = 25.$$

Ответ: 25.

B5. В магазине компьютерной техники объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму более 20000 р., он получает сертификат на 6000 р., который может обменять в этом же магазине на любой товар стоимостью менее 4000 р. Если покупатель участвует в акции, то он теряет право возвратить товар в магазин.

Покупатель А. хочет приобрести системный блок стоимостью 18990 р., монитор стоимостью 5990 р. и звуковые колонки стоимостью 2990 р.

В каком случае А. заплатит за покупку меньше всего:

1) А. купит все три вещи;
2) А. купит системный блок и монитор, а звуковые колонки получит за сертификат;
3) А. купит системный блок и звуковые колонки, а монитор получит за сертификат?

Найдите сумму, которую А. заплатит за покупку в искомом случае.

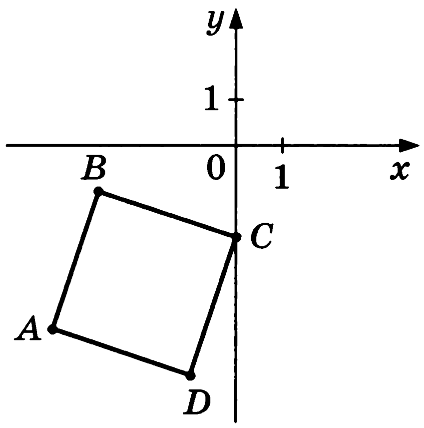
Решение

В первом случае А. заплатит 18990 + 5990 + 2990 = 27970 р., во втором случае — 18990 + 5990 = 24980 р., в третьем случае — 18990 + 2990 = 21980 р.

Наименьшая сумма — 21980 р.

Ответ: 21980.

B6. Найдите площадь квадрата, вершины которого заданы координатами в декартовой системе координат $A(-4; -4)$, $B(-3; -1)$; $C(0; -2)$; $D(-1; -5)$.



Решение

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$AB = \sqrt{\left(-3-(-4)\right)^2 + \left((-1)-(-4)\right)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{10} = 10$$

Ответ: 10.

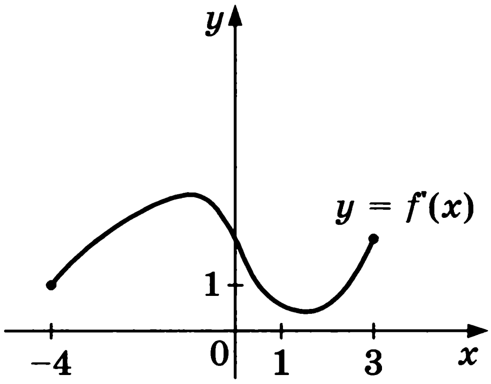
B7. Найдите значение выражения $3 \cdot 6^{\log_6 5}$.

Решение

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:
$3 \cdot 6^{\log_6 5} = 3 \cdot 5 = 15$

Ответ: 15.

B8. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 3]$. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$.
В какой точке отрезка функция принимает наибольшее значение?



Решение

$f'(x) > 0$ на отрезке $[-4; 3]$, поэтому функция $y = f(x)$ возрастает на $[-4; 3]$ и принимает наибольшее значение в правой граничной точке отрезка, на котором определена, т.е. в точке $x_0 = 3$.

Ответ: 3.

B9. Камень брошен вниз с высоты 5 м. Высота h, на которой находится камень во время падения, зависит от времени t: $h(t) = 5 - 4t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

Решение

Камень упадет, когда его высота станет равной нулю.
$h(t) = 5 - 4t - t^2 = 0;$
$t^2 + 4t - 5 = 0;$
$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36;$
$t_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2};$
$t_1 = 1;\ t_2 = -5.$
Так как t — время и не может быть отрицательным, то получаем, что камень упадет через 1 секунду.

Ответ: 1.

B10. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 64. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в четыре раза?

Решение

Пусть ребра исходного параллелепипеда равны a, b и c. Тогда имеем: $abc = 64$.
После уменьшения каждого ребра параллелепипеда в 4 раза его объем будет равен
$V = \dfrac{a}{4} \cdot \dfrac{b}{4} \cdot \dfrac{c}{4} = \dfrac{abc}{64} = \dfrac{64}{64} = 1.$

Ответ: 1.

B11. Найдите точку максимума функции $y=\dfrac{t^3}{3}+2t^2-5t-2$.

Решение

$$y=\frac{t^3}{3}+2t^2-5t-2$$

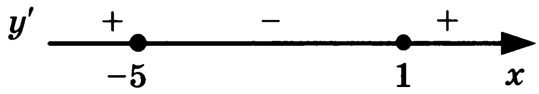
Найдем критические точки функции:

$y' = t^2 + 4t - 5 = 0;$

$D = 16 + 20 = 36;$

$t_{1/2}=\dfrac{-4\pm 6}{2};$

$t_1 = -5;\ t_2 = 1.$



В первой точке функция y' меняет знак с плюса на минус, поэтому $t_1 = -5$ и есть точка максимума (а вторая найденная точка является точкой минимума).

Ответ: −5.

B12. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист и одновременно из B в A выехал автомобилист. Мотоциклист прибыл в B через 3 часа после встречи, а автомобилист в A через 45 минут после встречи. Сколько часов был в пути автомобилист?

Решение

Пусть скорость мотоциклиста равна v_1 км/ч, а скорость автомобилиста равна v_2 км/ч. Из условия задачи получаем, что расстояние от точки их встречи до A равно $0{,}75v_2$ (так как 45 минут — это 0,75 часа), а расстояние от точки их встречи до B равно $3v_1$. Так как до момента встречи автомобилист и мотоциклист ехали одинаковое время, то можно составить уравнение: $\dfrac{0{,}75v_2}{v_1}=\dfrac{3v_1}{v_2}$, из которого получаем соотношение $\dfrac{v_2^2}{v_1^2}=4$, из которого имеем $v_2 = 2v_1$.

Время, затраченное автомобилистом на весь путь, равно $\dfrac{3v_1+0{,}75\cdot 2v_1}{2v_1}=2{,}25$ часа.

Ответ: 2,25.

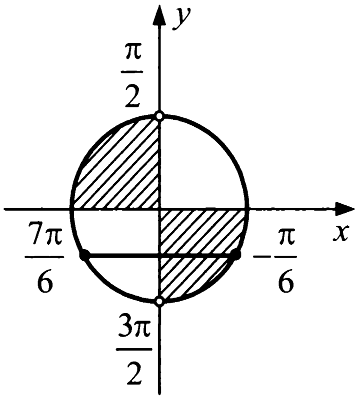
Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\dfrac{2\sin^2 x-7\sin x-4}{\sqrt{-3\operatorname{tg}x}}=0$.

Решение

$$\frac{2\sin^2 x-7\sin x-4}{\sqrt{-3\operatorname{tg}x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin^2 x-7\sin x-4=0\\ -3\operatorname{tg}x>0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin x = 4 \\ &\sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right. \\ \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

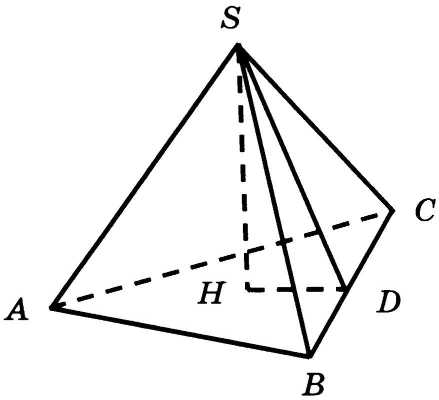


$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

С2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объем пирамиды.

Решение



Пусть SDH — двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$. Тогда угол SDH равен 60°. $HD = r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = 1$ (где r — радиус вписанной в равносторонний треугольник ABC окружности, а a — сторона этого треугольника. Из прямоугольного треугольника SHD находим $SH = HD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Ответ: 3.

С3. Решите неравенство $\sqrt{4 - x^2}\left(x^2 + 4x + 5\right) \geq 0$.

Решение

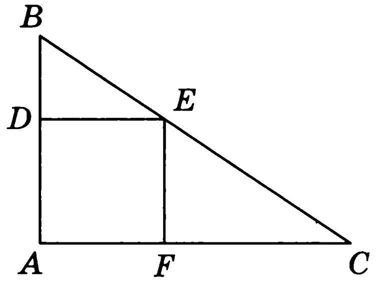
Неравенство эквивалентно совокупности $\left[\begin{aligned} &4 - x^2 = 0; \\ &\begin{cases} 4 - x^2 > 0; \\ x^2 + 4x + 5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x = \pm 2; \\ &\begin{cases} x \in (-2; 2); \\ x \in R. \end{cases} \end{aligned}\right.$

В итоге имеем $x \in [-2; 2]$.

Ответ: $[-2;\ 2]$.

C4. В прямоугольный треугольник с катетами 2 и 6 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

Решение



Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 2$ и $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

Обозначим сторону квадрата за x.

Тогда $BD = 2 - x$, $FC = 6 - x$.

Треугольники BDE и EFC подобны по двум углам, отсюда имеем: $\dfrac{2-x}{x} = \dfrac{x}{6-x}$.

Решив получаемое из этого соотношения квадратное уравнение $(2 - x)(6 - x) = x^2$, получим $x = 1{,}5$, поэтому периметр квадрата равен 6.

Ответ: 6.

C5. При каких положительных значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a^{3-x-2y} = x - y - 2 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения?

Решение

Выразим из второго уравнения системы переменную y через x и подставим в первое уравнение системы: $y = 5 - 2x; a^{3x-7} = 3x - 7$.

Введя новую переменную $t = 3x - 7$, получим уравнение $a^t = t$. Так как переменные x, y и t связаны линейным образом, то для существования ровно двух различных решений изначальной системы достаточно и необходимо, чтобы существовало ровно 2 различных решения у уравнения $a^t = t$.

При $a \in (0;1)$ левая часть уравнения является монотонно убывающей функцией, а правая – монотонно возрастающей функцией, поэтому у уравнения $a^t = t$ существует единственный корень при этих значениях параметра a.

При $a>1$ у данного уравнения может быть 0,1 или 2 корня, причем граничным случаем является случай касания прямой и показательной функции.

Определим, при каком значении параметра прямая $y = t$ будет являться касательной к графику функции $y = a^t$.

Уравнение касательной к графику функции $y = a^t$ в точке $t = t_0$:

$$y = a^{t_0} + a^{t_0} \ln a (t - t_0) = t \Leftrightarrow \begin{cases} a^{t_0} \ln a = 1 \\ a^{t_0} - a^{t_0} \ln a \cdot t_0 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $t_0 = \dfrac{1}{\ln a}$, подставим полученное выражение в первое уравнение системы: $a^{\frac{1}{\ln a}} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Взяв натуральный логарифм от обеих частей полученного уравнения, получим:

$1 = -\ln(\ln a); \ln a = e^{-1}; a = e^{\frac{1}{e}}$.

Исходная система будет иметь ровно два различных решения при $a \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$.

Ответ: $a \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$

С6. Решите уравнение в натуральных числах $mn + 34 = 7m$.

Решение

Выразим из уравнения m: $m = \dfrac{34}{7 - n}$.

Так как по условию $m, n \in N$, то $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (иначе m будет отрицательным).
Подставив эти значения n, получаем,
что m будет натуральным только при $n = 5$ и $n = 6$, соответственно $m = 17$ и $m = 34$.

Ответ: (17; 5), (34; 6).