МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

М. И. Сканави

Метод подстановки заключается в переходе от искомой величины к некоторой другой величине. Он позволяет свести решаемые уравнения к более просто устроенным или к уравнениям изученных типов. Велико разнообразие случаев, когда приходится пользоваться этим методом. Охватить их какой-либо общей рекомендацией, разумеется, невозможно. Поэтому успех в выборе целесообразной подстановки существенно зависит от таких достоинств решающего, как его опыт, смекалка, интуиция... Рассматриваемые ниже примеры демонстрируют метод подстановки в действии.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

Решение. Разность дробей, расположенных в левой части данного уравнения, представляет собой дробь, у которой знаменатель есть многочлен четвертой степени относительно x. В таком случае шаблонная обработка уравнения приведет его к уравнению четвертой степени, что решающего устроить не может. После обдумывания начинаем понимать, что полезно выбрать подстановку

$$x^2+2x=z, \qquad (*)$$

поскольку она преобразует данное уравнение к значительно более простому:

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}$$

Относительно z получаем квадратное уравнение с корнями $z_1=3$ и $z_2=-4$. Подстановка $(*)$ приводит к двум квадратным уравнениям относительно x:

$$x^2+2x=3$$

и

$$x^2+2x=-4.$$

Из них мы находим все четыре корня данного уравнения:

$$x_1=1,\ x_2=-3,\ x_3=-1+\sqrt{3}i,$$
$$x_4=-1-\sqrt{3}i$$

и непосредственной проверкой убеждаемся в пригодности каждого из них.

Пример 2. Решить уравнение
$$4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0.$$

Решение. Предложено для решения так называемое возвратное уравнение — коэффициенты членов, равноотстоящих от концов его левой части, равны. Для возвратных уравнений разработан стандартный способ приведения их к уравнению более низкой степени. Представление об этом способе можно получить, проследив за тем, как он применяется к уравнению, которое предстоит решить. Заметив, что $x\neq 0$, разделим уравнение на x^2; получим

$$4x^2+12x-47+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=0.$$

Теперь следующим образом сгруппируем члены:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0.$$

При такой записи уравнения уже

нетрудно сообразить, что оказывается эффективной подстановка

$$x+\frac{1}{x}=u.$$

В самом деле, находим, что тогда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$$

и решаемое уравнение преобразуется к уравнению

$$4u^2+12u-55=0,$$

квадратному относительно новой величины u. Решив его, найдем, что $u_1=\frac{5}{2}$ и $u_2=-\frac{11}{2}$. Для отыскания x получаем два уравнения

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}.$$

Из них находим, что

$$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4},$$

$$x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}.$$

Расширяя границы нашей беседы, сообщим читателю, что если приходится решать возвратное уравнение нечетной степени, то какова бы ни была эта степень, один корень такого уравнения пишется сразу — он равен (—1). Проверить это можно на примере возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Если $x=-1$, то

$$-a+b-c+c-b+a=0.$$

После деления на $(x+1)$ это уравнение сводится к возвратному уравнению четвертой степени, которое можно в общем виде решить при помощи способа, показанного при решении примера 2.

Пример 3. Решить уравнение

$$10x^3-3x^2-2x+1=0.$$

Решение. Читателю должно быть известно, что целые корни алгебраического уравнения следует искать среди делителей свободного члена. Но здесь он равен единице, а 1 или —1 как легко проверить, корнями данного уравнения не являются. Итак, целых корней данное уравнение не имеет. Посоветуем читателю для всех уравнений, у которых нет целых корней, попробовать подстановку

$$x=\frac{1}{y}.$$

В нашем случае эта подстановка приводит к уравнению

$$\frac{10}{y^3}-\frac{3}{y^2}-\frac{2}{y}+1=0,$$

$$y^3-2y^2-3y+10=0.$$

Испытав делители свободного члена этого уравнения, с радостью обнаруживаем, что делитель (—2) служит его корнем. В таком случае, понизив при помощи этого корня степень уравнения, находим остальные два корня $y_2=2+i$ и $y_3=2-i$. Следовательно,

$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i,$$

$$x_3=\frac{1}{2-i}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=$$
$$=\sqrt{2x^2+2x+9}.$$

Решение. Если пытаться освободить уравнение от радикалов возведением его в квадрат, то страшно подумать о том, какая получится степень уравнения после того, как все радикалы исчезнут! Ясно, что этот прием ничего хорошего нам не сулит. Но и тут после обдумывания можно заключить, что подстановка

$$x^2+x+1=t$$

приведет нас к более простому уравнению относительно t, а именно к такому:

$$\sqrt{t+3}+\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}.$$

Это иррациональное уравнение посоветуем решать так (прием, который мы сейчас используем, хорош и для многих других иррациональных уравнений, содержащих радикалы второй степени!): составим разность подкоренных выражений радикалов, расположенных слева, и получим, что

$$(t+3)-t=3.$$

Теперь эту разность разложим на множители (при помощи формулы для разности квадратов) и найдем, что

$$(\sqrt{t+3}+\sqrt{t})(\sqrt{t+3}-\sqrt{t})=3.$$

Отсюда делением на первоначальное уравнение (относительно t) получаем, что

$$\sqrt{t+3}-\sqrt{t}=\frac{3}{\sqrt{2t+7}}.$$

Вычитанием из первоначального уравнения того, что мы сейчас получили, обнаруживаем, что

$$2\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}-\frac{3}{\sqrt{2t+7}},$$

$$2\sqrt{t}=\frac{2t+4}{\sqrt{2t+7}},\quad \sqrt{t}=\frac{t+2}{\sqrt{2t+7}}.$$

Процедура, которую мы сейчас провели, позволяет освободиться от радикалов посредством только одного возведения частей уравнения в квадрат. Проделаем это:

$$t=\frac{t^2+4t+4}{2t+7},\quad t^2+3t-4=0.$$

Отсюда $t_1=1$, $t_2=-4$. Далее заметим, что нас интересуют только положительные значения t, поскольку

$$t=x^2+x+1>0$$

для всех значений x. Отбрасываем поэтому непригодный корень t_2 и получаем для отыскания x одно квадратное уравнение

$$x^2+x+1=1,\qquad x^2+x=0$$

с корнями $x_1=-1$ и $x_2=0$. Как нетрудно проверить, оба они являются корнями данного иррационального уравнения.

Пример 5. Решить систему уравнений

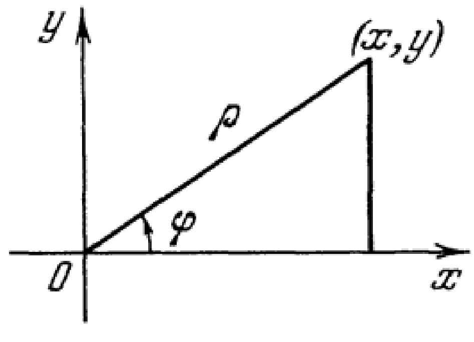
$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$$

(Ограничиться отысканием действительных решений).

Решение. Метод подстановки при решении систем уравнений учащимися практикуется значительно реже. Вместе с тем и в этих случаях он сплошь и рядом оказывается весьма эффективным. Прежде, чем приступить к решению предложенной системы, я позволю себе высказать некоторые общие соображения по поводу метода подстановки при решении систем двух уравнений с двумя искомыми величинами. Если эти последние обозначены буквами x и y, то часто бывает полезным перейти к новым величинам ρ и φ в соответствии со следующими равенствами:

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi, \\ y&=\rho\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (!)$$

Читатель, достаточно хорошо знакомый с методом координат на плоскости, поймет, что если x и y служат декартовыми координатами некоторой точки, то ρ и φ являются так называемыми полярными координатами той же точки. Геометрический смысл полярных координат и их связь с декартовыми станет ясным из рисунка, который мы всем рекомендуем сейчас внимательно рассмотреть:



Замечаем, что начало координат O имеет $\rho=0$, а угол φ для него определенного значения не имеет. Все остальные точки плоскости будут снабжены единственной парой полярных координат (ρ, φ), если потребовать, чтобы было

$$0 \leqslant \rho < +\infty,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Используем равенства (!) для решения данной системы уравнений, для чего вместо x и y в оба уравнения системы подставим их выражения через ρ и φ; получим, что

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^3 \cos^3 \varphi}{\rho \sin \varphi} + \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi = 40, \\ \dfrac{\rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho \cos \varphi} + \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi = 10 \end{cases}$$

или после обработки, что

$$\begin{cases} \rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = 40, \\ \rho^2 \operatorname{tg} \varphi = 10. \end{cases}$$

Делением первого уравнения на второе найдем, что

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = 4.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \varphi = 2$ или $\operatorname{ctg} \varphi = -2$. Второе (отрицательное) значение $\operatorname{ctg} \varphi$ немедленно отбрасываем, так как у нас $\operatorname{ctg} \varphi$ и ρ^2 имеют одинаковые знаки, а ρ^2 не может быть отрицательным. Теперь по известному котангенсу надо найти синус и косинус угла φ. Сделаем это без слов:

$$\operatorname{cosec}^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 5,$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = \sqrt{5},$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = -\sqrt{5},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Далее найдем ρ из того, что

$$\rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = \rho^2 \cdot 2 = 40, \ \rho^2 = 20.$$

Получаем, что $\rho = 2\sqrt{5}$. При помощи равенств (!) по известным ρ и φ в качестве решений данной системы уравнений найдем следующие две пары чисел:

$$x_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4,$$
$$y_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2;$$
$$x_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -4,$$
$$y_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2.$$

Неверно считать, что данную систему можно решить только при помощи перехода к полярным координатам (ее можно решить, например, еще и так: перенести xy из левых частей уравнений в правые, затем результаты перемножить и получить квадратное уравнение относительно xy; дальнейшее очевидно). Между тем этот прием следует взять на вооружение. Он позволяет в известном смысле регламентировать наши преобразования и дает возможность пользоваться всем аппаратом тригонометрии. В каких случаях выгодно пользоваться этим приемом, а в каких нет? Ответить на этот вопрос поможет ваш личный опыт, обогатить который можно собственным трудом!

Пока до вступительных экзаменов есть время — действуйте!