Рациональные алгебраические уравнения

Оглавление

I. Рациональные алгебраические уравнения

11. Равносильность уравнений

Определение 1. Пусть функции $f(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ и $\varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ определены на некотором множестве D. Поставим задачу: найти множество X, на котором эти функции принимают равные значения, другими словами, найти все значения $x,\ y,\ \ldots,\ z$, для которых выполняется равенство

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z) \qquad (1)$$

При такой постановке задачи равенство (1) называется ***уравнением*** с неизвестными $x,\ y,\ \ldots,\ z$.

Множество D называется множеством (областью) ***допустимых*** значений неизвестных для данного уравнения.

Множество X называется множеством ***решений*** данного уравнения.

Для уравнения с одним неизвестным $f(x) = \varphi(x)$ всякое его решение x = a называется ***корнем*** уравнения.

Решить уравнение - значит найти множество всех его решений.

Множество решений данного уравнения зависит от числового множества, над которым оно рассматривается. Например, уравнение $x^2 = 2$ в поле рациональных чисел не имеет корней, а в поле действительных чисел имеет два корня $x = \pm\sqrt{2}$.

Процесс решения уравнения состоит в последовательной замене данного уравнения другим, более простым уравнением. Возникает вопрос о законности такой замены. Всегда ли получается уравнение с тем же множеством решений?

Ответ на этот вопрос дает теория равносильности уравнений

Пусть даны два уравнения с одними и теми же неизвестными и рассматриваемые на некотором множестве D:

$$f_1(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi_1(x,\ y,\ \ldots,\ z), \qquad (1)$$

$$f_2(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi_2(x,\ y,\ \ldots,\ z), \qquad (2)$$

Обозначим множество решений уравнения (1) через M, а множество решений уравнения (2) - N.

Определение 2. Если $M \subset N$ ($\subset$ - включено), то уравнение (2) называется ***следствием*** уравнения (1). Другими словами, если число корней уравнения (2) больше, числа корней уравнения (1).

Определение 3. Если M = N, тогда уравнения (1) и (2) называются ***равносильными***. Иначе, если решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2) и, наоборот, решения уравнения (2) являются решениями уравнения (1), тогда уравнения (1) и (2) называются ***равносильными***.

Понятие равносильности обладает свойством ***транзитивности***.

Если на множестве D имеют место уравнения:

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z) \text{ и } \varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z) = h(x,\ y,\ \ldots,\ z),$$

тогда

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z) = h(x,\ y,\ \ldots,\ z).$$

1.2. Равносильность уравнений на множестве

Два уравнения могут быть равносильными относительно одного числового множества и не быть равносильными относительно другого числового множества.

Например, уравнение $2x - 6 = 0$ и $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$ равносильны на множестве рациональных чисел. В самом деле, на множестве рациональных чисел, первое уравнение имеет один корень $x = 3$ и второе уравнение имеет также только один корень $x = 3$, а два других значения $x_{2,\ 3} = \pm\sqrt{2}$ не входят в множество рациональных чисел и, следовательно, не являются корнями на этом множестве.

Но эти уравнения не равносильны на множестве действительных чисел, ибо у первого уравнения - одни корень: $M = \{3\}$, а у второго уравнения - три: $N = \left\{\pm\sqrt{2},\ 3\right\}$, $M \neq N$.

Примеры. Равносильны ли уравнения:

1. $2x + 1 = 3$ и $2x = 2$ на множестве действительных чисел?

Решение

Первое уравнение имеет на множестве действительных чисел один корень, $x = 1$, $M = \{1\}$ и второе уравнение имеет также один корень $x = 1$, $N = \{1\}$ на этом множестве. $M = N$, значит уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

2. $\dfrac{7x + 5}{2} = 9{,}5$ и $x(x - 1) = 2$ на множестве натуральных чисел? на множестве действительных чисел?

Решение

На множестве натуральных чисел

Первое уравнение имеет один корень: $x = 2$.

Второе уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет на этом множестве также один корень: $x = 2$. (Второе значение $x = -1$ не входит в множество натуральных чисел).

Ответ: равносильны.

На множестве действительных чисел

Первое уравнение имеет один корень: $M = \{2\}$.

Второе уравнение имеет два корня: $N = \{-1;\ \ 2\}$.
$M \neq N$ - уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

3. $2x - 6 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$ на множестве действительных чисел?

Решение

Первое уравнение имеет один корень: $x = 3,\ \ M = \{3\}$.
Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = 2,\ \ x_2 = 3,\ \ N = \{2;\ \ 3\}$.
$M \neq N$ - уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

4. $x(x-1) - 2(x-1) = 0$ и $(x-1)(x-2) = 0$ на множестве действительных чисел?

Решение

Первое уравнение на этом множестве имеет два корня:

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ M = \{1;\ \ 2\}.$$

Второе уравнение имеет на нем также два корня:

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ N = \{1;\ \ 2\}.$$

N = M - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

5. $3x + 1 = 7$ и $(3x+1)(x-1) = 7(x-1)$ на множестве действительных чисел?

Решение

Первое уравнение на этом множестве имеет один корень: $x = 2,\ \ M = \{2\}$.
Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ N = \{1;\ \ 2\}$.
$M \neq N$ - уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

6. $x - 1 = 0$ и $(x-1)(x^2 - 3) = 0$ на множестве действительных чисел? на множестве натуральных чисел?

Решение

На множестве действительных чисел

Первое уравнение на этом множестве имеет один корень:

$$x = 1,\ \ M = \{1\}.$$

Второе уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}, \quad N = \{1; \quad \sqrt{3}; \quad -\sqrt{3}\}.$$

$M \neq N$ - уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

На множестве натуральных чисел

Первое уравнение на этом множестве имеет один корень:

$$x = 1, \quad M = \{1\}.$$

Второе уравнение имеет три корня:

$$x = 1, \quad N = \{1\}.$$

$M = N$ - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

7. $x^2 + 1 = 0$ и $x^4 + 1 = 0$ на множестве рациональных чисел? на множестве действительных чисел?

Решение

И первое и второе уравнения не имеют действительных корней: $M = \{\varnothing\}$ и $N = \{\varnothing\}$, значит на множестве рациональных и на множестве действительных чисел $M = N$ - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны на множестве рациональных и на множестве действительных чисел.

8. $x^2 = 4$ и $x^4 = 16$ на множестве действительных чисел? на множестве целых чисел?

Решение

На множестве действительных чисел

Первое уравнение имеет два корня: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad M = \{-2; \quad 2\}.$

Второе уравнение имеет также два корня: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad N = \{-2; \quad 2\}.$

M = N - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

На множестве целых чисел

Первое уравнение имеет два корня: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad M = \{-2; \quad 2\}.$

Второе уравнение имеет также два корня: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad N = \{-2; \quad 2\}.$

M = N - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

1.3. Равносильность при тождественных преобразованиях

При замене одного уравнения другим, более простым часто приходится выполнять ***тождественные преобразования***. Всегда ли при выполнении тождественных преобразований получим уравнение, равносильное данному.

Пусть дано уравнение

$$f_1(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi_1(x,\ y,\ \ldots,\ z), \qquad (1)$$

с множеством допустимых значений неизвестных M_1. После выполнения тождественных преобразований в одной или в обеих его частях получили уравнение

$$f_2(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi_2(x,\ y,\ \ldots,\ z), \qquad (2)$$

с множеством допустимых значений неизвестных M_2. Если при этом:

1) $M_1 = M_2$, то уравнения (1) и (2) равносильны.

2) $M_1 \subset M_2$ - множество допустимых значений "*расширилось*", тогда уравнение (2) может иметь посторонние для уравнения (1) корни, принадлежащие множеству $M_2 - M_1$; если таких решений не окажется, то уравнения (1) и (2) равносильны.

3) $M_1 \supset M_2$ - множество допустимых значений "*сузилось*", тогда в множестве решений уравнения (2) могут не войти решения уравнения (1), принадлежащие множеству $M_2 - M_1$; если потери решений не произойдет, тогда уравнения (1) и (2) равносильны.

4) M_1, с одной стороны, обогащается новыми значениями, а с другой стороны, теряет некоторые из них, тогда уравнение (2) может быть неравносильно уравнению (1) как в силу потери корней, так и приобретения решений, посторонних для уравнения (1).

Примеры нарушения равносильности уравнений, вызванных тождественными преобразованиями.

1) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3} = 3,\ (1)$ и $\sqrt{2x^2 - x - 6} = 3.\ (2)$

Решение

Область допустимых значений уравнения (1):

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ 2x + 3 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge -\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2,\quad M_1 = \{x|\ \ x \in [2;\ \infty)\} \text{ или } M_1 = \{x|\ \ x \ge 2\}.$$

Область допустимых значений уравнения (2):

$2x^2 - x - 6 \ge 0,\ \ 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-2) \ge 0,\ \ \left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-2) \ge 0,$ см. рис. 1.

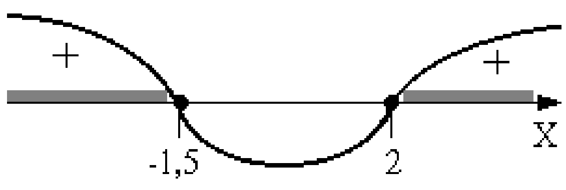

Рис. 1

$$M_2 = \{x|\ \ x \in (-\infty;\ \ -1{,}5] \cup [2;\ \infty)\}.$$

Тождественное преобразование расширило область допустимых значений - множество M_1, значит возможно появление посторонних корней.

Проверим это. Уравнение (1) и (2) имеют корни $x_1 = 3, \quad x_2 = -2{,}5.$

Уравнению (1) удовлетворяет только один корень $x_1 \in M_1$.

Уравнению (2) удовлетворяют два корня $x_1 \in M_2, \; x_2 \in M_2$. Причем x_2 принадлежит множеству $M_2 - M_1 = \{x | \; x \le -1{,}5\}$, т. е. как раз тому множеству, на которое расширилось множество M_1. Таким образом, в результате тождественных преобразований, произошло расширение области допустимых значений переменной x и появился посторонний корень.

Обратите внимание на ниже приводимый пример!
В таких примерах абитуриенты и учащиеся очень часто допускают ошибки!

2) $\lg(x-5)^2 = 2, \; (1)$ и $2 \cdot \lg(x-5) = 2, \; (2)$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x - 5 \ne 0, \quad x \ne 5, \quad M_1 = \{x | \; x \in (-\infty; \; 5) \cup (5; \; \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения:

$$x - 5 > 0, \quad x > 5, \quad M_2 = \{x | \; (5; \; \infty)\}.$$

Область допустимых значений при тождественном преобразовании "сузилась", поэтому возможна потеря корней. Проверим, так ли это.

Первое уравнение имеет корни: $(x-5)^2 = 100, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 15.$

Второе уравнение имеет один корень: $x = 15.$

Мы получили неравносильные уравнения, причем "потерян" один корень, который как раз и принадлежит разности множеств:

$$x_1 = -5 \in M_1 - M_2 = \{x | \; x \in (-\infty; \; 5)\}.$$

Ответ: уравнения не равносильны.

3) $\lg(x(x+9)) + \lg\dfrac{x+9}{x} = 0, \; (1)$ $\lg x + \lg(x+9) + \lg(x+9) - \lg x = 0, \; (2)$

$$2\lg(x+9) = 0, \; (3)$$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$\begin{cases} x(x+9) > 0, \\ \dfrac{x+9}{x} > 0. \end{cases}$$

Систему неравенств решим методом промежутков (см. рис. 2):

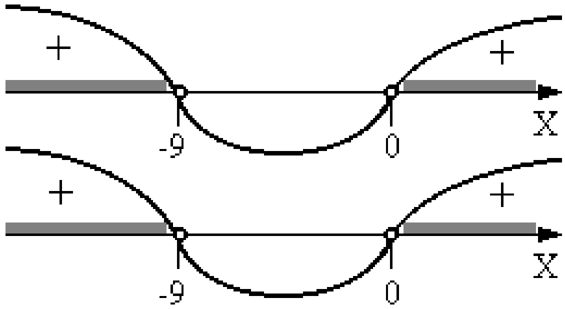

Рис. 2

$$M_1 = \{x| \quad x \in (-\infty; \ -9) \cup (0; \ \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > -9, \end{cases} \Leftrightarrow x > 0, \quad M_2 = \{x| \quad x \in (0; \ \infty)\}.$$

Область допустимых значений третьего уравнения:

$$x + 9 > 0, \quad x > -9, \quad M_3 = \{x| \quad x \in (-9; \ \infty)\}.$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область допустимых значений ***сузилась***, при переходе от уравнения (2) к уравнению (3) область допустимых значений ***расширилась***. Возможна потеря корней в первом случае и появление посторонних при переходе от уравнения (2) к уравнению (3).

Проверим равносильность уравнений.

Уравнение (1) имеет корни: $(x+9)^2 = 1, \quad x_1 = -10, \quad x_2 = -8.$

Уравнение (2) не имеет корней. Уравнение (3) имеет один корень: $x_1 = -10.$

Сразу можно сказать, что уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Вывод

При решении уравнений необходимо следить за изменением множества допустимых значений неизвестного. В случае расширения его следует проверять, не является ли найденное решение посторонним для данного уравнения. В случае сужения необходимо убедиться, не являются ли выпавшие значения неизвестных решениями данного уравнения. Задача нахождения потерянных решений не всегда легко выполнима, поэтому желательно избегать тождественных преобразований, ведущих к сужению множества допустимых значений неизвестных уравнения.

Примеры. Равносильны ли уравнения в поле действительных чисел?

9. $3x - 1 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-2} = 9 - x \quad (1) \qquad$ и $\qquad 3x + 1 = 9 - x \quad (2)$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x - 2 \neq 0, \quad x \neq 2, \quad M_1 = \{x| \quad x \in (-\infty; \ 2) \cup (2; \ \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения - множество всех действительных чисел: $M_2 = \{x| \ \ x \in (-\infty; \ \ \infty)\}$.

Произошло расширение области допустимых значений первого уравнения, поэтому возможно появление посторонних корней.

Первое уравнение не имеет корней, так как $x = 2 \notin M_1$.

Второе уравнение имеет корень: $x = 2$.

При расширении области допустимых значений появился посторонний корень $x = 2 \in M_2 - M_1 = \{x| \ \ x \in \{2\}\}$.

Уравнения не будут равносильными.

Ответ: не равносильны.

10. $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad (1)$ и $x - 1 = 2 \quad (2)$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x + 1 \neq 0, \quad x \neq -1, \quad M_1 = \{x| \ \ x \in (-\infty; \ \ -1) \cup (-1; \ \ \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения - множество всех действительных чисел: $M_2 = \{x| \ \ x \in R\}$.

Область допустимых значений уравнения (1) расширилась, значит возможно появление посторонних корней. Проверим это.

Первое уравнение имеет корень: $x = 3$.

Второе уравнение имеет корень: $x = 3$.

Посторонние корни не появились - уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

11. $x^2 - \frac{2x^2}{x} = 0 \quad (1)$ и $x^2 - 2x = 0 \quad (2)$.

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x \neq 0, \quad M_1 = \{x| \ \ x \in (-\infty; \ \ 0) \cup (0; \ \ \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения - множество всех действительных чисел: $M_2 = \{x| \ \ x \in R\}$.

Область допустимых значений уравнения (1) расширилась - возможно появление посторонних корней.

Первое уравнение имеет один корень: $x = 2$.

Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2$.

Появился посторонний корень: $x_1 = 0 \in M_2 - M_1 = \{0\}$.

Ответ: не равносильны.

12. $\lg x^2 = 0$ (1) и $2\lg x = 0$ (2).

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x \neq 0, \quad M_1 = \{x| \quad x \in (-\infty; \quad 0) \cup (0; \quad \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения:

$$x > 0, \quad M_2 = \{x| \quad x \in (0; \quad \infty)\}.$$

Область допустимых значений первого уравнения сузилась, возможна потеря корней. Проверим это.

Первое уравнение имеет два корня: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$

Второе уравнение имеет один корень: $x = 1.$

Произошла потеря корня $x_1 = -1 \in M_1 - M_2 = \{x| \quad x \in (-\infty; \quad 0)\}.$

Уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

13. $\lg x^2 = 0$ (1) и $2\lg|x| = 0$ (2).

Решение

Область допустимых значений первого уравнения:

$$x \neq 0, \quad M_1 = \{x| \quad x \in (-\infty; \quad 0) \cup (0; \quad \infty)\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения:

$$x \neq 0, \quad M_1 = \{x| \quad x \in (-\infty; \quad 0) \cup (0; \quad \infty)\}.$$

Области допустимых значений равны: $M_1 = M_2$, значит уравнения равносильны. В самом деле, первое уравнение имеет два корня: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$

Второе уравнение имеет корни: $|x| = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$

Ответ: равносильны.

14. $\lg \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ (1) и $\lg f(x) - \lg g(x) = 0$ (2).

Решение

Область допустимых значений первого уравнения находится как решение совокупности двух систем неравенств: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

Область допустимых значений второго уравнения находится из одной системы неравенств: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Область допустимых значений сузилась, а поэтому возможна потеря корней, значит уравнения могут быть не равносильны.

Ответ: могут быть не равносильны.

15. $x^2 + 3x + 2 = x + 1$ (1) и $\lg(x^2 + 3x + 2) = \lg(x + 1)$ (2)

Решение

Область допустимых значений первого уравнения - множество всех действительных чисел: $M_1 = \{x| \ \ x \in R\}$.

Область допустимых значений второго уравнения найдем из решения системы неравенств (см. рис. 3):

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+1) > 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

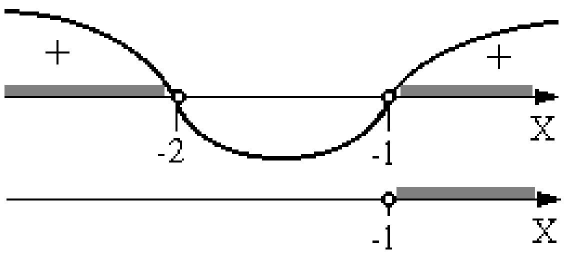

Рис. 3

Получим множество: $M_2 = \{x| \ \ x \in (-1; \ \ \infty)\}$.

Область допустимых значений сузилась, поэтому возможна потеря корней.

Первое уравнение имеет один корень: $x = -1$.

Второе уравнение не имеет корней. Значит, уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

16. $\lg x + \lg(x - 3) = 1$ (1) и $\lg(x(x-3)) = \lg 10$ (2)

Решение

Область допустимых значений первого уравнения найдем из решения системы неравенств: $\begin{cases} x > 0, \\ x - 3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow x > 3, \quad M_1 = \{x| \ \ x \in (3; \ \ \infty)\}$.

Область допустимых значений второго уравнения найдем из решения неравенства $x(x-3) > 0$ методом промежутков (см. рис. 4).

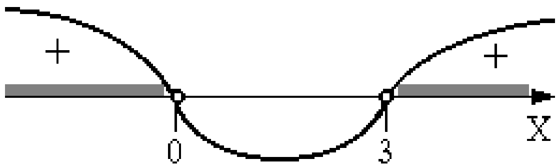

Рис. 4

Получим множество: $M_2 = \{x| \ \ x \in (-\infty; \ \ 0) \cup (3; \ \ \infty)\}$.

Область допустимых значений уравнения (1) расширилась, поэтому возможно появление посторонних корней. Проверим это.

Первое уравнение имеет один корень: $x = 5$.

Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = -2, \ \ x_2 = 5$.

Появился посторонний корень $x_1 = -2 \in M_2 - M_1 = \{x| \ \ x \in (-\infty; \ \ 0)\}$.

Значит, уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Задание 1

Равносильны ли уравнения в поле действительных чисел?

1. $x^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = x$ (1) и $x^3 = x$ (2). **2**. $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ (1) и $x + 1 = 2$ (2).

3. $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3$ (1) и $x + 1 = 3$ (2). **4**. $\lg x^5 = 0$ (1) и $5 \lg x = 0$ (2).

5. $x^2 - x - 1 = 1$ (1) и $\lg(x^2 - x - 1) = \lg 1$ (2).

6. $\lg(x + \sqrt{3}) + \lg(x - \sqrt{3}) = 0$ (1) и $\lg((x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})) = 0$ (2).

7. $3 \lg(-x) = \lg x^2$ (1) и $-x^3 = x^2$ (2).

1.4. Теоремы о равносильности уравнений

При решении уравнений выполняются преобразования, основанный на теоремах о равносильности уравнений.

Теорема 1. Уравнения

$$f(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) = \varphi(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) \qquad (1)$$

и

$$f(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) + \omega(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) = \varphi(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) + \omega(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z) \qquad (2)$$

равносильны, если функция $\omega(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z)$ определена на множестве всех допустимых значений неизвестных уравнения (1).

Замечание. Если $\omega(x, \ \ y, \ \ \ldots, \ \ z)$ определена не при всех допустимых значениях неизвестных уравнения (1) и теряет смысл при каких-либо системах значений неизвестных, являющихся решением уравнения (1), то при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) произойдет потеря корней.

Примеры: **1**) Дано уравнение $2x = 10$, которое имеет только один корень $x = 5$.

а) прибавим к обеим частям уравнения функцию $\omega(x) = \dfrac{1}{x-5}$, теряющую смысл при $x = 5$. Получим уравнение $2x + \dfrac{1}{x-5} = 10 + \dfrac{1}{x-5}$, не равносильное данному, так как $x = 5$ не является его корнем.

б) Прибавим к обеим частям уравнения функцию $\omega(x) = \dfrac{1}{x-2}$, теряющую смысл при $x = 2$.

Получим уравнение $2x + \dfrac{1}{x-2} = 10 + \dfrac{1}{x-2}$, равносильное данному, так как оно тоже имеет только один корень $x = 5$.

2) Дано уравнение $x(x-1) = 0$; областью допустимых значений неизвестного является множество всех действительных чисел $M_1 = \{x \mid x \in (-\infty;\ \infty)\}$. .

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Прибавим к обеим частям данного уравнения функцию $\omega(x) = \lg x$, область определения которой $M_\omega = \{x \mid x \in (0;\ \infty)\}$.

Получим уравнение $x(x-1) + \lg x = \lg x$, не равносильное данному, так как $x = 0$ не является его корнем.

Теорема 2. Уравнения

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z) \qquad (1)$$

и

$$f(x,\ y,\ \ldots,\ z)\cdot\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z) = \varphi(x,\ y,\ \ldots,\ z)\cdot\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z) \qquad (2)$$

равносильны, если функция $\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ определена и отлична от нуля на множестве всех допустимых значений неизвестных уравнения (1).

Замечание. Если условия теоремы, касающиеся функции $\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z)$, не выполняются, то уравнение (2) может быть не равносильно уравнению (1). Может произойти потеря решений, если $\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ теряет смысл при каких-либо системах значений неизвестных, являющихся решениями уравнения (1).

Уравнение (2) может иметь посторонние решения для уравнения (1), если $\omega(x,\ y,\ \ldots,\ z)$ при некоторых допустимых системах значений неизвестных равна нулю, но эта система значений неизвестных не является решением уравнения (1).

Примеры. Дано уравнение $x^2 = 2 - x$, множеством допустимых значений x является множество всех действительных чисел $M_1 = \{x \mid x \in (-\infty;\ \infty)\}$. Уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

а) Умножим обе части данного уравнения на $\omega(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, теряющую смысл при $x = 1$ и $x = -1$. Получим уравнение $x^2 \cdot \dfrac{1}{1-x^2} = (2-x)\cdot\dfrac{1}{1-x^2}$, не равносильное данному, так как оно имеет только один корень $x=-2$. Умножение обеих частей данного уравнения на $\frac{1}{1-x^2}$ привело к потере корня $x=1$.

б) Умножим обе части данного уравнения на $\omega(x)=\frac{1}{1+x}$, теряющую смысл при $x=-1$. Получим уравнение $x^2\cdot\frac{1}{1+x}=(2-x)\cdot\frac{1}{1+x}$, равносильное данному, так как оно имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=-2$.

в) Умножим обе части данного уравнения на $\omega(x)=x-3$, обращающуюся в нуль при $x=3$. Получим уравнение $x^2\cdot(x-3=(2-x)\cdot(x-3)$, не равносильное данному, так как оно имеет три корня: $x_1=1$, $x_2=-2$ и $x_3=3$.

Умножение обеих частей данного уравнения на $x-3$ привело к появлению постороннего корня $x_3=3$.

Равносильны ли уравнения на множестве действительных чисел?

Пример 1. $x-1=2x-6$ (1) и $x-1+\sqrt{x^2+4}=2x-6+\sqrt{x^2+4}$ (2).

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1=\{x|\ \ x\in(-\infty;\ \ \infty)\}$. Оно имеет один корень $x=5$.

К обеим частям этого уравнения прибавляется функция $\omega(x)=\sqrt{x^2+4}$, которая определена также при всех действительных значениях x, значит она не изменяет область определения уравнения (1), а поэтому получается уравнение (2) равносильное уравнению (1), имеющее также один корень $x=5$. Уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

Пример 2. $x+5=15-x$ (1) и $x+5+\sqrt{x}=15-x+\sqrt{x}$ (2).

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1=\{x|\ \ x\in(-\infty;\ \ \infty)\}$. Оно имеет один корень $x=5$.

К обеим частям уравнения (1) прибавляется функция $\omega(x)=\sqrt{x}$, областью определения которой является множество $M_\omega=\{x|\ \ x\in[0;\ \ \infty)\}$, в которое входит корень первого уравнения. Поэтому, несмотря на сужение области допустимых значений уравнения (1), получается равносильное уравнение, имеющее также один корень $x=5$.

Ответ: равносильны.

Пример 3. $x^2-5x+6=0$ (1) и $x^2-5x+6+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-2}$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1 = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ \infty\right)\right\}$. Оно имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. К его обеим частям прибавляется функция $\omega(x) = \dfrac{1}{x-2}$, которая имеет область определения $M_\omega = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ 2\right) \cup \left(2;\ \infty\right)\right\}$ и теряет смысл при $x = 2$, который является корнем первого уравнения, а поэтому второе уравнение имеет только один корень $x = 3$, а значит уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Пример 4. $3x - 2 = 6 - x$ (1) и $3x - 2 + \lg(1 - x^2) = 6 - x + \lg(1 - x^2)$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1 = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ \infty\right)\right\}$. Оно имеет один корень: $x = 2$.

К обеим частям уравнения прибавляется функция $\omega(x) = \lg(1 - x^2)$, которая определена на множестве:

$1 - x^2 > 0, \quad x^2 < 1, \quad \sqrt{x^2} < \sqrt{1}, \quad |x| < 1, \quad -1 < x < 1, \quad M_\omega = \left\{x \middle| \ x \in \left(-1;\ 1\right)\right\}$.

Область допустимых значений первого уравнения сузилась настолько, что корень первого уравнения не входит в это множество и не является корнем второго уравнения, значит уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Пример 5. $x - 3 = 0$ (1) и $(x - 3) \cdot (x^2 + 1) = 0$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1 = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ \infty\right)\right\}$. Оно имеет один корень: $x = 3$.

Обе части уравнения умножаются на функцию $\omega(x) = x^2 + 1$, которая также определена на множестве всех действительных чисел $M_\omega = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ \infty\right)\right\}$ и при $x = 3$ не обращается в нуль, значит получим уравнение (2) равносильное уравнению (1).

Ответ: равносильны.

Пример 6. $x^2 - 5x + 6 = 0$ (1) и $(x^2 - 5x + 6) \cdot \dfrac{1}{x-2} = 0$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1 = \left\{x \middle| \ x \in \left(-\infty;\ \infty\right)\right\}$. Оно имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Обе части уравнения умножаются на функцию $\omega(x)=\dfrac{1}{x-2}$, которая имеет область определения $M_\omega=\{x|\ \ x\in(-\infty;\ \ 2)\cup(2;\ \ \infty)\}$ и, несмотря на то, что не обращается в нуль при $x_1=2$ и $x_2=3$, но теряет смысл при $x=2$, а поэтому второе уравнение имеет только один корень $x=3$, а значит уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Пример 7. $x^2-2x-3=0$ (1) и $(x^2-2x-3)\cdot 2^x=0$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1=\{x|\ \ x\in(-\infty;\ \ \infty)\}$. Оно имеет два корня: $x_1=-1$ и $x_2=3$. Обе части уравнения умножаются на показательную функцию $\omega(x)=2^x$, которая имеет область определения - множество всех действительных чисел $M_\omega=\{x|\ \ x\in(-\infty;\ \ \infty)\}$ и, более того, она положительна при всех x из области определения и ни при каких значениях x не равна нулю, поэтому второе уравнение также имеет два корня $x_1=-1$ и $x_2=3$, а значит уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

Решение этого примера можно распространить на более общий случай:

$$f(x)=0\ \ (1)\ \text{и}\ \ f(x)\cdot a^{\varphi(x)}=0\ \ (2)$$

Функция $\omega(x)=a^{\varphi(x)}$ положительна при всех x из области определения функции $f(x)$, если к тому же функция $\varphi(x)$ определена при значениях корней уравнения (1), тогда уравнения (1) и (2) равносильны. Если функция $\varphi(x)$ не определена при значении хотя бы одного из корней уравнения (1), тогда уравнения (1) и (2) не равносильны.

Пример 8. $\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{z-5}{z-3}$ (1) и $(z+1)(z-3)=(z-5)(z-1)$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество:

$$M_1=\{z|\ \ z\in(-\infty;\ \ 1)\cup(1;\ \ 3)\cup(3;\ \ \infty)\}.$$

Оно имеет один корень $z=2$.

Обе части первого уравнения умножаются на функцию $\omega(z)=(z-1)(z-3)$, которая определена при всех значениях z из множества действительных чисел $M_\omega=\{z|\ \ z\in(-\infty;\ \ \infty)\}$ и не обращается в нуль при $z=2$, которое является корнем уравнения (1), поэтому уравнение (2) имеет один корень $z=2$. Уравнения (1) и (2) равносильны.

Ответ: равносильны.

Пример 9. $\frac{2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$ (1) и $2x+(x-4)(x-2)=x+2$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество:

$$M_1=\left\{x \quad x\in\left(-\infty;\ \ -2\right)\cup\left(-2;\ \ 0\right)\cup\left(0;\ \ 2\right)\cup\left(2;\ \ \infty\right)\right\}.$$

Оно имеет один корень: $x=3$.

Обе части первого уравнения умножаются на функцию $\omega(x)=x(x+2)(x-2)$, которая определена при всех значениях x из множества действительных чисел $M_\omega=\left\{x|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ \infty\right)\right\}$, и не обращается в нуль при $x=3$, которое является корнем уравнения (1). Но в результате такого умножения произошло расширение области допустимых значений уравнения (1) и возможно появление посторонних корней. Проверим это. Уравнение (2) имеет два корня $x_1=2,\ \ x_3=3$. Поэтому уравнения (1) и (2) не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Пример 10. $\frac{x(x-2)}{x^2+1}+\frac{2}{3}=\frac{5x^2}{3x^2+3}$ (1) и $3(x^2-2x)+2(x^2+1)=5x^2$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1=\left\{x|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ \infty\right)\right\}$. Оно имеет один корень: $x=\frac{1}{3}$.

Обе части первого уравнения умножаются на функцию $\omega(x)=3(x^2+1)$, которая определена при всех значениях x из множества действительных чисел $M_\omega=\left\{x|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ \infty\right)\right\}$, и не обращается в нуль при $x=\frac{1}{3}$, которое является корнем уравнения (1). Значит область допустимых значений уравнения (1) не изменилась. Остается проверить корни уравнения (2) - оно имеет один корень - $x=\frac{1}{3}$, значит уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

Пример 11. $3x-1=4x-2$ (1) и $(3x-1)^4=(4x-2)^4$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1=\left\{x|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ \infty\right)\right\}$. Оно имеет один корень: $x=1$.

Уравнение (2) получается возведением обеих частей уравнения (1) в четную - 4-й степень. Область допустимых значений не изменилась, уравнение (2) определено на множестве всех действительных чисел: $M_2 = \{x| \quad x \in (-\infty; \quad \infty)\}$.

Посмотрим какие корни оно имеет? Для этого надо из обеих частей уравнения (2) извлечь корень 4-й степени, тогда получим:

$$\sqrt[4]{(3x-1)^4} = \sqrt[4]{(4x-2)^4}, \quad |3x-1| = |4x-2|.$$

Чтобы решить последнее уравнение, установим точки, при которых каждое из выражений под модулем обращается в нуль, получим три промежутка, на каждом из которых решим уравнение (см. рис. 5):

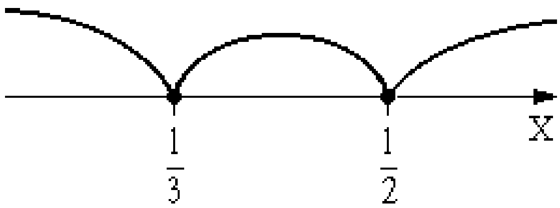

Рис. 5

При $x \le \frac{1}{3}$, получим уравнение $3x-1=4x-2$, $x=1$. Но $x=1$ не входит в промежуток $x \le \frac{1}{3}$, значит не является корнем уравнения.

При $\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}$, получим уравнение $3x-1=-4x+2$, $7x=3$, $x=\frac{3}{7}$. $x=\frac{3}{7}$ входит в промежуток $\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}$, значит является корнем уравнения.

При $x > \frac{1}{2}$, получим уравнение $3x-1=4x-2$, $x=1$. $x=1$ входит в промежуток $x > \frac{1}{2}$, значит является корнем уравнения.

Таким образом, уравнение (2) имеет два корня $x_1 = \frac{3}{7}$ и $x_2 = 1$.

Следовательно, при возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней.

Ответ: уравнения не равносильны.

Пример 12. $f(x) = \varphi(x)$ (1) и $\left(f(x)\right)^k = \left(\varphi(x)\right)^k$. (2)

Решение

Если k - нечетное число, тогда уравнения равносильны, если k - четное число, то, вообще говоря, не равносильны, ибо второе уравнение примет вид:

$|f(x)| = |\varphi(x)|$ или $f(x) = -\varphi(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$, т. е. распадается на два уравнения. Только в том случае, если уравнение $f(x) = -\varphi(x)$, по каким-то причинам не будет иметь корней, мы можем получить равносильные уравнения.

Ответ: при k нечетном - равносильны, при k четном - не равносильны.

Пример 13. $x^2 - 1 = 0$ (1) и $\sqrt{x^2 - 1} = 0$. (2)

Решение

Областью допустимых значений первого уравнения является множество всех действительных чисел $M_1 = \{x | \; x \in (-\infty; \; \infty)\}$. Оно имеет два корня: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$.

Второе уравнение получается из первого извлечением квадратного корня из обеих частей первого уравнения. В результате область допустимых значений сузилась и стала: $M_2 = \{x | \; x \in (-\infty; \; -1] \cup [1; \; \infty)\}$.

Однако, корни уравнения остались теми же, второе уравнение имеет тоже два корня: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ и потому, уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

Пример 14. $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\varphi(x)} = 0$ (1) и $\sqrt{f(x) \cdot \varphi(x)} = 0$. (2)

Решение

Область допустимых значений первого уравнения определяется системой неравенств: $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$

Область допустимых значений второго уравнения определяется совокупностью систем неравенств: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \ge 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ \varphi(x) \le 0. \end{cases} \end{array} \right.$

Уравнения могут быть равносильны, если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: равносильны, если $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$

Пример 15. При каком условии уравнения

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)} \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)} \quad (2)$$

равносильны?

Решение

Если $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\neq 0,\ \ \varphi_1(x)\neq -\varphi_2(x),$ тогда уравнения будут иметь одинаковые области допустимых значений и будут равносильны.

Ответ: если $\varphi_1(x)\neq -\varphi_2(x),$ тогда уравнения равносильны.

Пример 16. Будут ли равносильны уравнения на множестве действительных чисел

$$\frac{x^2-5x+6}{x-1}=\frac{x-2}{3x-7}\ (1)\ \text{и}\ \frac{x^2-5x+6}{x-1}=\frac{(x^2-5x+6)+(x-2)}{(x-1)+(3x-7)}\ (2)?$$

Решение

Область допустимых первого уравнения - множество:

$$M_1=\left\{x\middle|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ 1\right)\cup\left(1;\ \ \frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};\ \ \infty\right)\right\}.$$

Оно имеет два корня: $x_1=\dfrac{11}{3}$ и $x_2=2.$

Область допустимых значений второго уравнения находим из решения системы неравенств: $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ x-1+3x-7\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 2.\end{cases}\ M_2=\left\{x\middle|\ \ x\in\left(-\infty;\ \ 1\right)\cup\left(1;\ \ 2\right)\cup\left(2;\ \ \infty\right)\right\}.$

Область допустимых значений изменилась, поэтому возможна как потеря корней, так и появление посторонних корней.

Найдем решения уравнения (2). Оно имеет только один корень: $x=\dfrac{11}{3}.$

Уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Задание 2

Равносильны ли уравнения на множестве действительных чисел?

1. $5x-2=2x+4$ *и* $5x-2+\lg(x^2+3)=2x+4+\lg(x^2+3).$

2. $x-2=4-x$ *и* $x-2+\dfrac{5}{x-3}=4-x+\dfrac{5}{x-3}.$

3. $2x-3=9-x$ *и* $2x-3+\sqrt{1-x}=9-x+\sqrt{1-x}.$

4. $x-2=0$ *и* $(x-2)(x+3)=0.$

5. $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-3}{x-1}$ *и* $(x-1)(x-1)=(x-3)(x-2).$

6. $5-\dfrac{5-x}{x-4}=\dfrac{1}{4-x}$ *и* $5(x-4)-(5-x)=-1.$

7. $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ *и* $(x-1)(x^2-5x+6)=(x^2-1)(x-2).$

8. $x-2=7-2x$ *и* $(x-2)^2=(7-2x)^2$.

9. $f(x)=\varphi(x)$ *и* $(f(x))^2=(\varphi(x))^2$.

10. Будут ли равносильны уравнения на множестве действительных чисел?

$$\frac{\sqrt{f_1(x)}}{\sqrt{\varphi_1(x)}}=\frac{\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{\varphi_2(x)}} \quad и \quad \frac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{\varphi_1(x)}}{\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{\varphi_1(x)}}=\frac{\sqrt{f_2(x)}-\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{f_2(x)}+\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

11. Верно ли утверждение, что уравнения

$$\frac{\sqrt{f_1(x)}}{\sqrt{\varphi_1(x)}}=\frac{\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{\varphi_2(x)}} \quad и \quad \frac{\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{\varphi_1(x)}}{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{\varphi_2(x)}}=\frac{\sqrt{f_2(x)}+\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{f_2(x)}-\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

равносильны на множестве действительных чисел?

12. Будут ли равносильны уравнения на множестве действительных чисел?

$$\frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+3x+3}} \quad и \quad \frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

Выводы

Появление посторонних корней возможно в следующих случаях

1. При умножении обеих частей уравнения на функцию, если эта функция при некоторых допустимых значениях неизвестных равна нулю, но эти значения не являются корнями исходного уравнения. (При освобождении от знаменателя, содержащего неизвестную величину.)

2. При тождественных преобразованиях, расширяющих область допустимых значений исходного уравнения:

возведении обеих частей уравнения в четную степень:

$$f(x)=\varphi(x) \text{ и } \left(f(x)\right)^k=\left(\varphi(x)\right)^k, \text{ где k - четное;}$$

применение свойства корней - переход от $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\varphi(x)}$ к $\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)}$;

применении свойства логарифмов: $k\cdot\log f(x)=\log f^k(x),$ если k - четное;

применении свойства логарифмов:

$$\log f(x)+\log\varphi(x)=\log\bigl(f(x)\cdot\varphi(x)\bigr),\ \log f(x)-\log\varphi(x)=\log\frac{f(x)}{\varphi(x)};$$

переходе от логарифмических уравнений к алгебраическим:

$$\log f(x)=\log\varphi(x),\quad f(x)=\varphi(x);$$

логарифмирование уравнения, у которого содержит показательные функции:

например, $9^x=5^{x^2-1},\ \ \log_5 9^x=\log_5 5^{x^2-1},\ \ 2x\log_5 3=x^2-1;$

возможны и другие случаи.

Потеря корней возможна в следующих случаях

1. Если к обеим частям уравнения прибавляется функция, определенная при всех допустимых значениях неизвестных заданного уравнения, но теряющая смысл при каких-либо значениях неизвестных, являющихся решением данного уравнения.

2. Если обе части уравнения умножаются на функцию, определенную и не равную нулю при всех допустимых значениях неизвестных, но теряющую смысл при каких-либо значениях неизвестных, являющихся решениями данного уравнения.

3. При тождественных преобразованиях, сужающих область допустимых значений неизвестных уравнения:

извлечение корня четной степени из обеих частей уравнения

$$f(x)=\varphi(x),\quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{\varphi(x)},\quad k\in N;$$

извлечение корней четной степени из произведения

$$\sqrt[2k]{f(x)\cdot\varphi(x)}=\sqrt[2k]{f(x)}\cdot\sqrt[2k]{\varphi(x)},\quad k\in N;$$

преобразование логарифма произведения или частного в сумму или разность логарифмов $\log\bigl(f(x)\cdot\varphi(x)\bigr)=\log f(x)+\log\varphi(x)$, $\log\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\log f(x)-\log\varphi(x)$;

применении свойства логарифмов: $\log f^k(x)=k\cdot\log f(x)$, если k - четное;

логарифмирование обеих частей уравнения $f(x)=\varphi(x)$, $\log f(x)=\log\varphi(x)$;

возможны и другие случаи.

1.5. Приемы решения уравнений, позволяющие отбрасывать посторонние корни и избежать потери корней[*]

1.5.1. Дробно-рациональные уравнения

Применяя теоремы о равносильности уравнений, можно заменить дробно-рациональное уравнение целым алгебраическим уравнением. Надо помнить, что мы производим преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней. Отбор посторонних корней можно производить или путем сопоставления с множеством допустимых значений неизвестного, или путем проверки корней.

Пример 1. Решить уравнение на множестве действительных чисел.

$$\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2.$$

Решение

Область допустимых значений неизвестного - множество всех действительных чисел, так как у квадратного трехчлена $1+x+x^2$ отрицательный дискриминант $D=1-4=-3<0$, то оно не обращается в нуль ни при каких значениях x.

$$M=\bigl\{x\bigm|\ x\in(-\infty;\ \infty)\bigr\}.$$

Данное уравнение равносильно уравнению $3=(3-x-x^2)(1+x+x^2)$.

Введем новое неизвестное $y=1+x+x^2$, тогда $3-x-x^2=4-(1+x+x^2)=$ $=4-y$. Получим уравнение $y(4-y)=3$, $y^2-4y+3=0$, $y_1=1$, $y_2=3$.

Подставляя значения у, получим два квадратных уравнения:

$x^2+x=0$ *и* $x^2+x-2=0$, $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=-2$, $x_4=1$.

Эти корни будут решениями данного уравнения.

[*] Более подробно решение уравнений и соблюдение равносильности преобразований будет рассмотрено ниже в соответствующих главах

Ответ: $x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1.$

Пример 2. $\dfrac{9 - x}{x - 4} = \dfrac{5}{x - 4} - 3.$

Решение

Область допустимых значений неизвестного: $M = \{x | \quad x \in (-\infty; \quad 4) \cup (4; \quad \infty)\}.$

Умножим обе части уравнения на $x - 4$ (заметим, что это выражение обращается в нуль при $x = 4,$ но оно не входит в область допустимых значений).

После умножения, получим уравнение: $9 - x = 5 - 3x + 12,$ откуда $x = 4.$

Значение $x = 4$ не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: корней нет.

Пример 3. $\dfrac{x + 1}{2(x - 1)} = \dfrac{9}{2(x + 4)} + \dfrac{1}{x - 1}.$

Решение

Область допустимых значений неизвестного найдем из решения системы неравенств: $\begin{cases} x - 1 \neq 0, \\ x + 4 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -4. \end{cases} \quad M = \{x | \quad (-\infty; \quad -4) \cup (-4; \quad 1) \cup (1; \quad \infty)\}.$

Умножим обе части уравнения на $2(x + 4)(x - 1)$, которое обращается в нуль при $x = -4$ и $x = 1,$ которые не входят в область допустимых значений.

Получим уравнение:

$$(x + 1)(x + 4) = 9(x - 1) + 2(x + 4), \quad x^2 - 6x + 5 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

$x_1 = 1 \notin M$ и является посторонним корнем.

Ответ: $x = 5.$

Пример 4. $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} + \dfrac{x + 1}{2(x - 2)} = \dfrac{1}{2 - x} - \dfrac{1}{x + 2}.$

Решение

Область допустимых значений неизвестного найдем из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x + 2 \neq 0, \\ x - 2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 2. \end{cases} \quad M = \{x | \quad x \in (-\infty; \quad -2) \cup (-2; \quad 2) \cup (2; \quad \infty)\}.$$

Умножим обе части уравнения на $(x - 2)(x + 2),$ получим уравнение:

$$2x^2 + (x + 1)(x + 2) = -2((x + 2) + (x - 2)), \quad 3x^2 + 7x + 2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$x_1 = -2 \notin M$ и является посторонним корнем.

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

1.5.2. Иррациональные уравнения

1-й способ

Замена иррационального уравнения смешанной системой

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1 = 0$.

Решение

Область допустимых значений неизвестного:

$$x - 1 \ge 0, \quad x \ge 1, \quad M = \{x \mid \ x \in [1;\ \infty)\}.$$

Введем новые неизвестные, положим: $\sqrt[3]{2-x} = u, \quad \sqrt{x-1} = v, \quad v \ge 0,$

$$u^3 = 2 - x, \quad v^2 = x - 1.$$

Получим смешанную систему:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^2 = 1, \\ v \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u^3 + (1-u)^2 = 1, \\ v \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u^3 + u^2 - 2u = 0, \\ v \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -2, \\ v \ge 0. \end{cases}$$

$2 - x = u^3, \quad x = 2 - u^3; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 10.$

Все значения входят в область допустимых значений и являются решениями уравнения.

Ответ: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 10.$

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$.

Решение

Найдем область допустимых значений неизвестного

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ 3x - 2 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge \frac{2}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{3}, \quad M = \left\{x \mid \ x \in \left[\frac{2}{3};\ \infty\right)\right\}.$$

Положим $\sqrt{x+3} = u, \quad u \ge 0; \quad \sqrt{3x-2} = v, \quad v \ge 0,$ тогда $x + 3 = u^2, \quad 3x - 2 = v^2$.

$\begin{cases} x + 3 = u^2, \\ 3x - 2 = v^2, \end{cases}$ умножим обе части первого уравнения на -3 и сложим со вторым уравнением, получим $v^2 - 3u^2 = -11$.

При такой подстановке заданное уравнение примет вид $u + v = 7$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} v^2-3u^2=-11, \\ u+v=7, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-u)^2-3u^2=-11, \\ v=7-u, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49-14u-2u^2=-11, \\ v=7-u, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$2u^2+14u-60=0,\quad u^2+7u-30=0,\quad u_1=-10,\quad u_2=3.$

$u_1=-10$ не является корнем, так как $u\ge 0,$ значит $u=3.$

$\sqrt{x+3}=3,\quad x+3=9,\quad x=6.$

Ответ: $x=6.$

Пример 3. Решить уравнение: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x+4+3\sqrt{2x-1}}=\sqrt{32}.$

Решение

Положим $\sqrt{2x-1}=z,\quad z\ge 0,$ отсюда $2x-1=z^2;\quad 2x=z^2+1;\quad x=\frac{1}{2}(z^2+1),$ получаем уравнение:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2+1\right)+z}+\sqrt{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}+4+3z}=\sqrt{32};\quad \frac{\sqrt{z^2+2z+1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{z^2+6z+9}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2};$$

$$\sqrt{(z+1)^2}+\sqrt{(z+3)^2}=8,\qquad |z+1|+|z+3|=8.$$

Каждый из модулей последнего уравнения обращается в нуль при $z=-1,\ z=-3$ соответственно, значит полученное уравнение рассмотрим на следующих трех промежутках (см. рис. 6):

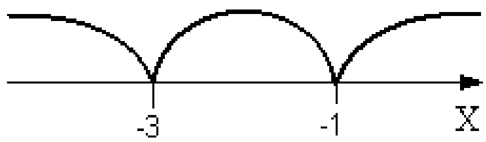

Рис. 6

1. При $z\le -3$ уравнение примет вид:
$-(z+1)-(z+3)=8;\quad -2z=12;\quad z=-6$ - входит в промежуток $z\le -3$.
2. При $-3<z\le -1$ получим уравнение:
$-z-1+z+3=8;\quad 2=8$ - уравнение не имеет корней.
3. При $z>-1,$ получим уравнение:
$z+1+z+3=8;\quad 2z=4;\quad z=2$ - входит в промежуток $z>-1.$

Таким образом, в результате решения получены два корня $z=-6$ и $z=2.$

Но один из них $z=-6$ не входит в область допустимых значений $z\ge 0$ и является посторонним корнем. Остается один корень $z=2.$

Тогда получим $2x-1=4;\quad 2x=5;\quad x=2{,}5.$

Проверка

$x=2{,}5;\quad \sqrt{2{,}5+\sqrt{5-1}}+\sqrt{2{,}5+4+3\sqrt{5-1}}=\sqrt{32};\quad \sqrt{4{,}5}+\sqrt{12{,}5}=\sqrt{32};$

$$\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{25}{2}}=\sqrt{32};\quad \frac{\sqrt{9}+\sqrt{25}}{\sqrt{2}}=\sqrt{16\cdot 2};\quad \frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2};\quad \frac{4\cdot 2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2};\quad 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Ответ: $x=2{,}5.$

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$

Решение

Положим $\sqrt[3]{x}=u,\ \sqrt[3]{2x-3}=v,$ тогда $x=u^3,\ 2x-3=v^3$. Получим систему уравнений, из которой исключим х: $\begin{cases} u^3=x, \\ v^3=2x-3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2u^3=-2x, \\ v^3=2x-3, \end{cases} \Leftrightarrow v^3-2u^3=-3.$

Заменяя в данном уравнении $\sqrt[3]{x}=u,\ \sqrt[3]{2x-3}=v,$ и $x=u^3$ получим уравнение $u+v=\sqrt[3]{12(u^3-1)},\quad (u+v)^3=12u^3-12,\quad (u+v)^3-12u^3=-12.$

Объединим два полученных уравнения в систему и решим ее:

$$\begin{cases} v^3-2u^3=-3, \\ (u+v)^3-12u^3=-12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4v^3+8u^3=12, \\ (u+v)^3-12u^3=-12, \end{cases} \Leftrightarrow (u+v)^3-4u^3-4v^3=0,$$

Решим полученное уравнение

$$(u+v)^3-4\left(u^3+v^3\right)=0,\quad (u+v)(u+v)^2-4(u+v)(u^2-uv+v^2)=0,$$

$$(u+v)\cdot\left((u+v)^2-4\cdot(u^2-uv+v^2)\right)=0,\quad (u+v)(u^2+2uv+v^2-4u^2+4uv-4v^2)=0,$$

$$(u+v)(-3u^2+6uv-3v^2)=0,\quad (u+v)(u^2-2uv+v^2)=0,\quad (u+v)\cdot(u-v)^2=0.$$

Отсюда получаем: $u+v=0,\quad u=-v,\quad \sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{2x-3},\quad x=-2x+3,\quad x_1=1;$

$u-v=0,\quad u=v,\quad \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x-3},\quad x=2x-3,\quad x_2=3.$

Ответ: $x_1=1,\quad x_2=3.$

2-й способ

Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень

При решении иррациональных уравнений этим способом надо иметь в виду следующие теоремы о равносильности уравнений.

Теорема 1. Уравнение $\sqrt[2k+1]{R(x)}=P(x),\ k\in N$ равносильно на множестве действительных чисел уравнению $R(x)=P^{2k+1}(x).$

Теорема 2. Уравнение $\sqrt[2k]{R(x)} = P(x),\ k \in N$ равносильно на множестве действительных чисел смешанной системе $\begin{cases} R(x) = P^{2k}(x), \\ P(x) \geq 0. \end{cases}$

При решении уравнений этим способом множество допустимых значений неизвестных может расшириться. Это иногда приводит к появлению посторонних решений, которые не будут принадлежать множеству допустимых значений неизвестных.

Кроме того, если при возведении обеих частей уравнения в четную степень не накладывать условия $P(x) \geq 0$ (теорема 2), тогда могут появиться посторонние решения, принадлежащие области допустимых значений неизвестного данного уравнения. В этом случае необходимо делать проверку корней, принадлежащих области допустимых значений неизвестных подстановкой их в данное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

Решение

Найдем область допустимых значений переменной

$$\begin{cases} 9-5x \geq 0, \\ 3-x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 9, \\ x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1{,}8, \\ x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1{,}8;\quad M = \{x|\quad x \in (-\infty;\ 1{,}8]\}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$9-5x = 3-x+12+\frac{36}{3-x};\quad -6-4x-\frac{36}{3-x} = 0;\quad (6+4x)+\frac{36}{3-x} = 0;$$

$$(6+4x)(3-x)+36 = 0;\quad 18-6x+12x-4x^2+36 = 0;\quad -4x^2+6x+54 = 0;$$

$$2x^2-3x-27 = 0;\quad x_1 = -3;\quad x_2 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

$x_2 = 4{,}5$ не входит в область допустимых значений $x_2 = 4{,}5 \notin M$.

Ответ: $x = -3.$

Пример 2. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0.$$

Решение

1-й способ

Область допустимых значений неизвестного найдем из решения системы неравенств: $\begin{cases} x+8 \geq 0, \\ 5x+20 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8, \\ x \geq -4, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -4,\quad M = \{x|\quad x \in [-4;\ \infty)\}.$

Преобразуем уравнение: $\sqrt{x+8} + 2 = \sqrt{5x+20}$. Обе части полученного уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат, получим:

$$x+8+4\sqrt{x+8}+4 = 5x+20,\quad \sqrt{x+8} = x+2.$$

Перед тем, как возводить обе части этого уравнения в квадрат, необходимо потребовать, чтобы правая часть была неотрицательна: $x+2 \geq 0,\quad x \geq -2.$

При этом область допустимых значений неизвестного сузиться, в самом деле (см. рис. 7):

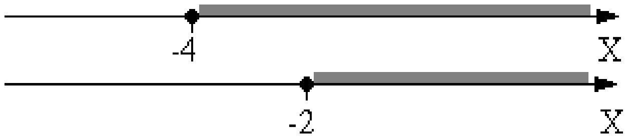

Рис. 7

Область допустимых значений станет: $M_1 = \{x| \quad x \in [-2; \quad \infty)\}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат получим:

$$x^2 + 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

$x_1 = -4 \notin M_1$ и является посторонним корнем.

Ответ: $x = 1$.

2-й способ

Область допустимых значений $M = \{x| \quad x \in [-4; \quad \infty)\}$.

$\sqrt{x+8} + 2 = \sqrt{5x+20}, \quad \sqrt{x+8} = x+1, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$

Оба корня входят в ОДЗ, т. е. $x_1 = -4 \in M$ и $x_2 = 1 \in M$.

Проверка

$x_1 = -4, \quad \sqrt{-4+8} + 2 \neq \sqrt{5 \cdot (-4) + 20}, \quad x_2 = 1, \quad \sqrt{1+8} + 2 = \sqrt{5 \cdot 1 + 20}.$

Ответ: $x = 1$.

1.5.3. Логарифмические уравнения

Пример 1. Решить уравнение $\lg 2x = \dfrac{1}{4} \cdot \lg(x-15)^4$.

Решение

Область допустимых значений

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 15 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 15. \end{cases} \quad M = \{x| \quad x \in (0; \quad 15) \cup (15; \quad \infty)\}.$$

Преобразуем уравнение $\lg 2x = \lg \sqrt[4]{(x-15)^4}, \quad 2x = |x - 15|.$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем:

(1) $\begin{cases} x - 15 < 0, \\ 2x = 15 - x \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} x - 15 > 0, \\ 2x = x - 15. \end{cases}$

Решим первую систему

(1) $\begin{cases} x-15<0, \\ 2x=15-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<15, \\ 3x=15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<15, \\ x=5, \end{cases}$ $x=5$ входит в промежуток $x<15$ и входит в область допустимых значений $(0;\ 15)\cup(15;\ \infty)$, значит может являться корнем уравнения.

Решим вторую систему

(2) $\begin{cases} x>15, \\ x=-15 \end{cases}$ $x=-15$ не входит в промежуток $x>15$ и не входит в область допустимых значений, значит не является корнем уравнения.

Проверка

$x=5,\ \ \lg 10=\dfrac{1}{4}\cdot\lg(-10)^4,\ \ \lg 10=\dfrac{1}{4}\cdot\lg 10000,\ \ 1=\dfrac{1}{4}\cdot 4,\ \ 1=1;\ \ x=5$ - является корнем уравнения.

Ответ: $x=5.$

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3.$

Решение

Область допустимых значений

$x>0,\ \ 2x\neq 1,\ \ x\neq\dfrac{1}{2},\ \ x\neq 1,\ \ M=\left\{x\,\middle|\ x\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)\cup(1;\ \infty)\right\}.$

Воспользуемся формулой перехода от логарифмов одного основания к логарифмам другого $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ \ a>0,\ \ a\neq 1,\ \ c>0,\ \ c\neq 1,\ \ b>0.$

В левой части уравнения перейдем к логарифмам по основанию 2, получим:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}+\frac{\log_2 64}{\log_2(2x)}=3,\quad \frac{4}{2\cdot\log_2 x}+\frac{6}{\log_2 2+\log_2 x}=3,$$
$$\frac{2}{\log_2 x}+\frac{6}{1+\log_2 x}=3.$$

Положим $\log_2 x=y,\ \ y\neq 0\ \ и\ \ y\neq -1,$ получим

$$\frac{2}{y}+\frac{6}{1+y}=3,\ \ 2+2y+6y=3y+3y^2,\ \ 3y^2-5y-2=0,\ \ y_1=-\frac{1}{3},\ \ y_2=2.$$

$$\log_2 x=-\frac{1}{3},\ \ x_1=2^{-\frac{1}{3}},\ \ x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ \ \log_2 x=2,\ \ x_2=4.$$

Проверка

$$x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \log_{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2}16+\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}64=3,\quad \frac{\log_2 16}{\log_2 2^{-\frac{2}{3}}}+\frac{\log_2 64}{\log_2 2^{\frac{2}{3}}}=3,$$

$\dfrac{4}{-\frac{2}{3}}+\dfrac{6}{\frac{2}{3}}=3,\quad -\dfrac{4\cdot 3}{2}+\dfrac{6\cdot 3}{2}=3,\quad -6+9=3,\quad 3=3;\quad x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - является корнем уравнения.

$x_2=4,\quad \log_{16}16+\log_8 64=3,\quad 1+2=3,\quad 3=3;\quad x_2=4$ - является корнем уравнения.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ x_2=4.$

Пример 3. Решить уравнение: $\left(\log_2\left(5-\dfrac{3}{x}\right)-1\right)\log_x 2=1.$

Решение

Найдем область допустимых значений, учитывая, что переменная находится в основании логарифма, а также в знаменателе дроби и под знаком логарифма:

$$\begin{cases}5-\frac{3}{x}>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x-3}{x}>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-3>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x>3,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{5},\\ x>0,\quad x\neq 1.\end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{5};\ 1\right)\cup(1;\ \infty).$$

Преобразуем уравнение

$$\log_2\left(5-\frac{3}{x}\right)-1=\frac{1}{\log_x 2},\quad \log_2\left(5-\frac{3}{x}\right)-\log_2 2=\log_2 x,\quad \frac{5}{2}-\frac{3}{2x}=x,$$

$5x-3=2x^2,\quad 2x^2-5x+3=0,\quad x_1=1,\quad x_2=\dfrac{3}{2}.\quad x_1=1$ - не входит в область допустимых значений и не является корнем уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{3}{2}.$

Пример 4. Решить уравнение: $\left(1+\log_3\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x}\right)\right)\cdot\log_x 3=1.$

Решение

Выражение, находящееся под знаком логарифма должно быть строго положительным, значит

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{x}>0.$$

Выражение, находящееся в основании логарифмической функции должно быть положительным x > 0, кроме того, необходимо проверить, может ли x принимать значение, равное 1.

При x = 1 получаем $\left(1+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{1}\right)\right)\cdot\log_1 3=1,$ тогда логарифм по основанию 1 становится неопределенным $\log_1 3$, значит $x\neq 1$.

Получим систему неравенств

$$\begin{cases}\frac{4}{3}-\frac{1}{x}>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4x-3}{3\cdot x}>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3>0,\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{4},\\ x>0,\quad x\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4};\ 1\right)\cup(1;\ \infty).$$

Преобразуем уравнение

$$1+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\log_x 3};\quad \log_3 3+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)=\log_3 x;\quad \log_3 3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)=\log_3 x;$$

$$4-\frac{3}{x}=x;\quad x^2-4x+3=0;\quad x_1=3,\quad x_2=1.$$

$x_2=1$ - не входит в область допустимых значений и не является корнем уравнения, $x_1=3$ входит в область допустимых значений.

Проверка

$x=3,\quad \left(1+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\right)\cdot\log_3 3=1,\quad (1+\log_3 1)\cdot 1=1,\quad 1\cdot 1=1,\quad 1=1;\quad x=3$ - является корнем уравнения.

Ответ: $x=3$.

Пример 5. Решить уравнение: $\frac{1}{6}\log_2(x-2)-\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}.$

Решение

Найдем область допустимых значений (ОДЗ):

$$\begin{cases}x-2>0,\\ 3x-5>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2,\\ x>\frac{5}{3},\end{cases}\Leftrightarrow x>2,\quad M=\{x|\quad x\in(2;\ \infty)\}.$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{1}{6}\Big(\log_2(x-2)-2\Big)=\frac{1}{2}\frac{\log_2(3x-5)}{\log_2\frac{1}{8}};\quad \frac{1}{6}\Big(\log_2(x-2)-\log_2 4\Big)=-\frac{1}{6}\log_2(3x-5),$$

$$\log_2\frac{x-2}{4}=\log_2\frac{1}{3x-5};\quad \frac{x-2}{4}=\frac{1}{3x-5};\quad (x-2)(3x-5)=4;$$

$$3x^2-11x+6=0,\quad D=49,\quad x_{1,2}=\frac{11\pm 7}{6};\quad x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=3.$$

$x_1=\frac{2}{3}$ не входит в ОДЗ и не является корнем уравнения.

$x=3$ - является корнем уравнения.

Ответ: x = 3.

Задание 3

Решите уравнения на множестве действительных чисел.

1. $\frac{10}{6x^2-x-12}+\frac{3}{3x+4}=\frac{7}{6x^2-x-12}+\frac{5x+9{,}4}{2x-3}$.

2. $\frac{1}{2x+3}+\frac{21}{2x^3+3x^2-2x-3}=\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x^2+5x+3}$.

3. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$.

4. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

5. $\sqrt{x^2-3x+4}=1-3x$.

6. $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1$.

7. $\left(\log_x 9x^2\right)\cdot\log_3^2 x=4$.

8. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

9. $\log_8(7x^2-5x-6)=2\log_4\sqrt[3]{3x-1}$.

10. $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

2. Линейные уравнения с параметрами

Определение. Уравнения вида, $f(a)x=g(a)$, где x - переменная, f(a) и g(a) - некоторые функции, зависящие от a, называется линейным с параметром a.

Возможные случаи решения линейных уравнений с параметрами

1. Если $f(a)=g(a)=0$, тогда уравнение примет вид $0\cdot x=0$, которое имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

2. Если $f(a)=0$, *но* $g(a)\neq 0$, тогда уравнение примет вид $0\cdot x=g(a)$, которое не имеет решений.

3. Если $f(a) \neq 0,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{g(a)}{f(a)}.$

Пример 1. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$$(2a-1)x = 3a + (a+2)x.$$

Решение

Преобразуем уравнение:

$$(2a-1)x - (a+2)x = 3a, \quad (2a-1-a-2)x = 3a, \quad (a-3)x = 3a.$$

В данном случае f(a) = a - 3, g(a) = 3a.

1. Если f(a) = 0, a - 3 = 0, $a = 3,$ тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 9.$ Оно не имеет решений.

2. Если $f(a) \neq 0, \; a \neq 3,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{3a}{a-3}.$

Ответ:

1. Если $a = 3,$ тогда уравнение не имеет решений.

2. Если $a \neq 3,$ тогда уравнение имеет ед. решение $x = \dfrac{3a}{a-3}.$

Пример 2. Решить уравнение $m(mx-1) = 3(mx-1).$

Решение

Преобразуем уравнение:

$$m^2x - m = 3mx - 3, \quad m^2x - 3mx = m - 3, \quad \left(m^2 - 3m\right)x = m - 3, \quad m(m-3)x = m - 3.$$

Здесь f(m) = m(m - 3) и g(m) = m - 3.

1. Если f(m) = 0, m(m - 3) = 0, m = 0, m = 3:

а) при m = 3, уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0,$ которое имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число;

б) при m = 0, уравнение примет вид: $0 \cdot x = -3,$ которое не имеет решений.

2. Если $m \cdot (m-3) \neq 0, \quad m \neq 0 \, и \, m \neq 3,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{m-3}{m(m-3)} = \dfrac{1}{m}.$

Ответ:

1. Если m = 3, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

2. Если m = 0, тогда уравнение не имеет решений.

3. Если $m \neq 0 \quad и \quad m \neq 3,$ то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{1}{m}.$

Пример 3. Решите уравнение $(a^2-1)x = 2a^2 + a - 3.$

Решение

В этом уравнении функция f(a) имеет вид $f(a) = a^2 - 1$. Разложим на множители двучлен $a^2 - 1$, получим $f(a) = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$.

Функция g(a) является квадратным трехчленом $g(a) = 2a^2 + a - 3$. Разложим его на множители.

Трехчлен $2a^2 + a - 3$ имеет корни $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = 1$, тогда $g(a) = 2 \cdot \left(a + \frac{3}{2}\right)(a-1)$.

1. Если $f(a) = 0$, т. е. $(a-1)(a+1) = 0$, $a = -1$, $a = 1$, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 2\left(a + \frac{3}{2}\right)(a-1)$.

1) При $a = -1$, получаем $0 \cdot x = 2\left(-1 + \frac{3}{2}\right)(-1-1)$, $0 \neq -2$, значит уравнение не имеет корней.

2) При $a = 1$, получаем $0 \cdot x = 0$, $0 = 0$, значит уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

2. Если $f(a) \neq 0$, $a \neq -1$ и $a \neq 1$, тогда уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{g(a)}{f(a)} = \frac{2\left(a + \frac{3}{2}\right)(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a+3}{a+1}.$$

Ответ:

1. Если $a = -1$, то уравнение не имеет корней.
2. Если $a = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений.
3. Если $a \neq -1$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{2a+3}{a+1}.$$

Пример 4. $\frac{x-1}{2(a^2+2a)} - \frac{ax-1}{14(a+2)} + \frac{1-x}{7a} = 0.$

Решение

Область допустимых значений параметра. При $a^2 + 2a = 0$, $a = 0$ *или* $a = -2$ уравнение не определено.

Пусть $a \neq 0$, $a \neq -2$.

Преобразуем уравнение:

7(x - 1) - a(ax - 1) + 2(a + 2)(1 - x) = 0 или $(a^2 + 2a - 3)x = 3(a-1)$,

(a - 1)(a + 3)x = 3(a - 1), f(a) = (a - 1)(a + 3), g(a) = 3(a - 1).

1. Если f(a) = 0, a = 1, a = -3.

а) При a = 1, уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

б) При a = -3, уравнение примет вид $0 \cdot x = -12$, оно не имеет решений.

2. Если $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq -3$, тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{3}{a+3}$.

3. В области допустимых значений переменной установлено, что $a \neq 0$ и $a \neq -2$. При a = 0 и при a = -2 уравнение не имеет корней.

Ответ:

1. При a = 1, уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

2. При a = 0, a = -2, a = -3, уравнение не имеет решений.

3. Если $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq -3$, тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{3}{a+3}$.

Пример 5. Решите уравнение $a(1-ax) = 4b - 2ax$.

Решение

Преобразуем уравнение: $a - a^2x = 4b - 2ax$, $2ax - a^2x = 4b - a$,
$(2a - a^2)\cdot x = 4b - a$, $a(2-a)\cdot x = 4b - a$.

1. Если $a(2-a) \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, тогда уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{4b-a}{a(2-a)}.$$

2. Если a = 0, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 4b$;
   1) если $b \neq 0$, тогда уравнение не имеет решений;
   2) если b = 0, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.
3. Если a = 2, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 4b - 2$;
   1) если $4b - 2 \neq 0$, $4b \neq 2$, $b \neq \dfrac{1}{2}$, тогда уравнение не имеет решений;
   2) если $b = \dfrac{1}{2}$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

Ответ:

1. Если $a \neq 0$ *и* $a \neq 2$, тогда уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{4b-a}{a(2-a)}.$$

2. Если a = 0, но $b \neq 0$ и если a = 0, но $b \neq \dfrac{1}{2}$, тогда уравнение не имеет корней.

3. Если a = 0, b = 0 и если a = 2, $b = \dfrac{1}{2}$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

Пример 6. $(ab+2)x + a = 2b + (b+2a)x$.

Решение

Преобразуем уравнение $(ab+2)x - (b+2a)x = 2b - a$, $(ab+2-b-2a)x = 2b-a$, $\big(b(a-1)+2(1-a)\big)x = 2b-a$, $(a-1)(b-2)x = 2b-a$.

1. Если a = 1, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 2b-1$;
   если $b = \frac{1}{2}$, то уравнение имеет бесконечное множество решений;
   если $b \neq \frac{1}{2}$, то уравнение не имеет решений.
2. Если b = 2, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 4-a$;
   если a = 4, то уравнение имеет бесконечное множество решений;
   если $a \neq 4$, то уравнение не имеет корней.
3. Если $a \neq 1$ и $b \neq 2$, тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{2b-a}{(a-1)(b-2)}$.

Ответ:

1. Если $a \neq 1$ и $b \neq 2$, тогда уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{2b-a}{(a-1)(b-2)}.$$

2. Если $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$ или $a = 4$ и $b = 2$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

3. Если $a = 1$ и $b \neq \frac{1}{2}$ или $b = 2$ и $a \neq 4$, тогда уравнение не имеет корней.

Задание 1

Решить уравнения.

1. $6(ax-1) - a = 2(a+x) - 7$. **2**. $a^2x = a(x+2) - 2$. **3**. $0{,}5(5x-1) = 4{,}5 - 2a(x-2)$.

4. $2(a-2x) = ax + 3$. **5**. $a(ab+1)x + b^2 = a^2 + (a^3+b)x$. **6**. $\dfrac{a(ax-2) - x(4+b)}{b-a-2} = 1$.

Пример 6* Решить уравнение: $\dfrac{x-mn}{m+n} + \dfrac{x-mp}{m+p} + \dfrac{x-np}{n+p} = m+n+p$.

Решение

Преобразуем уравнение: $\left(\dfrac{x-mn}{m+n}-p\right)+\left(\dfrac{x-mn}{p+m}-n\right)+\left(\dfrac{x-np}{n+p}-m\right)=0,$

$$\frac{x-(mn+np+pm)}{m+n}+\frac{x-(mn+np+pm)}{p+m}+\frac{x-(mn+np+pm)}{n+p}=0,$$

$$\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{p+m}+\frac{1}{n+p}\right)(x-(mn+np+pm))=0.$$

Если $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{p+m}+\dfrac{1}{n+p}\neq 0,$ то уравнение имеет единственное решение $x=mn+np+pm.$

Если $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{p+m}+\dfrac{1}{n+p}=0,$ то уравнение имеет бесконечное множество решений, т. е. удовлетворяется при любом действительном значении х.

Ответ:

1. Если $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{p+m}+\dfrac{1}{n+p}\neq 0,$ то уравнение имеет единственное решение $x=mn+np+pm.$

2. Если $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{p+m}+\dfrac{1}{n+p}=0,$ то уравнение имеет бесконечное множество решений, т. е. удовлетворяется при любом действительном значении х.

Упражнения

Решить уравнения на множестве действительных чисел.

1. $n^2x+2n=n(2x-n).$ **2**. $(a^2b^2+36)\cdot x+a^2=b^2+(9a^2+4b^2)\cdot x.$

3. $2bx+ax=x(a+b)+a+cx.$ **4**. $ax=a^2.$ **5**. $(a-2)x=a^2-4.$

6. $(a^2-9)x=a^3-27.$ **7**. $(a^3-16a)x=a-4.$

8* $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1;$ $a,\ b\ и\ c$ – числа одного знака.

3. Линейные уравнения, содержащие знак абсолютной величины

Определение. Модуль числа **a** или абсолютная величина числа **a** равна **a**, если **a** больше или равно нулю и равна **-a**, если **a** меньше нуля:

$$|a|=\begin{cases} a, & если\quad a\geq 0;\\ -a, & если\quad a<0.\end{cases}$$

Из определения следует, что для любого действительного числа а, $|a|\geq 0.$

Теорема 1. Абсолютная величина действительного числа $a\neq 0$ равна большему из двух чисел а или -а.

Доказательство

1. Если число а положительно, то -а отрицательно, т. е. -а < 0 < а. Отсюда следует, что -а < а.

Например, число 5 положительно, тогда -5 - отрицательно и -5 < 0 < 5, отсюда -5 < 5.

В этом случае |а| = а, т. е. |а| совпадает с большим из двух чисел а и - а.

2. Если а отрицательно, тогда -а положительно и а < - а, т. е. большим числом является -а. По определению, в этом случае, |а| = -а - снова, равно большему из двух чисел -а и а.

Следствие 1. Из теоремы следует, что |-а| = |а|.

В самом деле, как $|-a|$, так и $|a|$ равны большему из чисел -а и а, а значит равны между собой.

Следствие 2. Для любого действительного числа а справедливы неравенства $a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$.

Умножая второе равенство $-a \leq |a|$ на -1 (при этом знак неравенства изменится на противоположный), мы получим следующие неравенства: $a \leq |a|, \quad a \geq -|a|$, справедливые для любого действительного числа а. Объединяя последние два неравенства в одно, получаем: $-|a| \leq a \leq |a|$.

Теорема 2. Абсолютная величина любого действительного числа а равна арифметическому квадратному корню из a^2: $|a| = \sqrt{a^2}$.

В самом деле, если $a \geq 0$, то, по определению модуля числа, будем иметь $|a| = a$. С другой стороны, при $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$, значит |а| = $\sqrt{a^2}$.

Если а < 0, тогда |а| = -а и $\sqrt{a^2} = -a$, и в этом случае |а| = $\sqrt{a^2}$.

Эта теорема дает возможность при решении некоторых задач заменять |а| на $\sqrt{a^2}$.

Геометрически |а| означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число а, до начала отсчета.

Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существует две точки а и -а, равноудаленной от нуля, модули которых равны.

Если а = 0, то на координатной прямой |а| изображается точкой 0 (см. рис. 8).

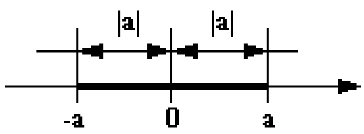

Рис. 8

3.1. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины

Решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины, основывается на определении модуля числа и свойствах абсолютной величины числа.

Пример 1. Решить аналитически и графически уравнение |х - 2| = 3.

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Рассуждать будем, исходя из определения модуля. Если выражение, находящееся под модулем неотрицательно, т. е. x - 2 $\geq$ 0, тогда оно "*выйдет*" из под знака модуля со знаком "*плюс*" и уравнение примет вид: x - 2 = 3. Если значения выражения под знаком модуля отрицательно, тогда, по определению, оно будет равно: $-(x-2)=3$.

Таким образом, получаем, либо x - 2 = 3, либо x - 2 = -3. Решая полученные уравнения, находим: $x_1=5,\quad x_2=-1.$ **Ответ**: $x_1=5,\quad x_2=-1.$

Теперь можно сделать вывод: если модуль некоторого выражения равен ***действительному положительному числу а***, тогда выражение под модулем равно либо а, либо $-a$.

2-й способ

Установим, при каких значениях x, модуль равен нулю: $x-2=0,\quad x=2.$ Получим два промежутка, на каждом из которых решим уравнение (см. рис. 9):

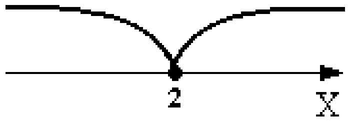

Рис. 9

Получим две смешанных системы:

$$(1)\ \begin{cases} x\leq 2, \\ -(x-2)=3, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x>2, \\ x-2=3. \end{cases}$$

Решим каждую систему:

$$(1)\ \begin{cases} x\leq 2, \\ -(x-2)=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ x-2=-3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ x=-3+2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ x=-1, \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

$$(2)\ \begin{cases} x>2, \\ x-2=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x=3+2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x=5, \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: $x_1=-1,\quad x_2=5.$

Графическое решение

Для решения уравнения графическим способом, надо построить графики функций $y=|x-2|$ и $y=3$.

Для построения графика функции $y=|x-2|$, построим график функции $y=x-2$ - это прямая, пересекающая ось OX в точке (2; 0), а ось OY в точке $(0;\ -2)$, а затем часть прямой, лежащую ниже оси OX зеркально отразить в оси OX.

Графиком функции $y=3$ является прямая, параллельная оси OX и проходящая через точку (0; 3) на оси OY (см. рис. 10).

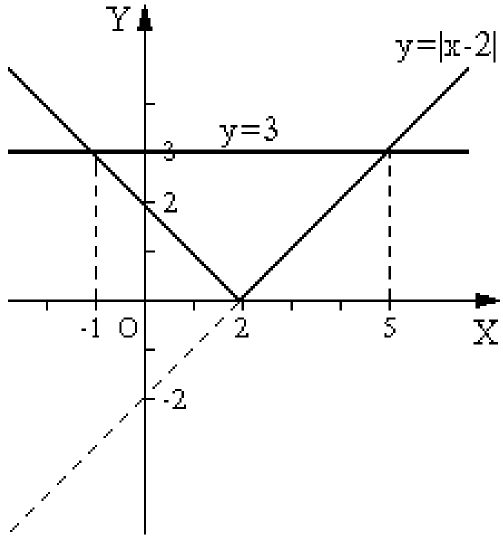

Рис. 10

Абсциссы точек пересечения графиков функций дадут решения уравнения.

Ответ: $x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$

Пример 2. Решите аналитически и графически уравнение 1 + |x| = 0.5.

Решение

Аналитическое решение

Преобразуем уравнение: |x| = 0.5 - 1 или |x| = -0.5. Понятно, что в этом случае уравнение не имеет решений, так как, по определению, модуль всегда неотрицателен.

Ответ: решений нет.

Графическое решение

Преобразуем уравнение: $|x| = -0{,}5.$

Графиком функции $y = |x|$ являются лучи - биссектрисы 1-го и 2-го координатных углов. Графиком функции $y = -0{,}5$ является прямая, параллельная оси OX и проходящая через точку -0,5 на оси OY.

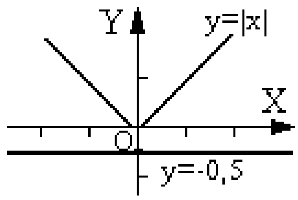

Рис. 11

Графики не пересекаются, значит уравнение не имеет решений (см. рис. 11).

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решите аналитически и графически уравнение |-x + 2| = 2x + 1.

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Прежде следует установить область допустимых значений переменной. Возникает естественный вопрос, почему в предыдущих примерах не было необходимости делать этого, а сейчас она возникла.

Дело в том, что в этом примере в левой части уравнения модуль некоторого выражения, а в правой части не число, а выражение с переменной, - именно это важное обстоятельство отличает данный пример от предыдущих.

Поскольку в левой части - модуль, а в правой части, выражение, содержащее переменную, необходимо потребовать, чтобы это выражение было неотрицательным, т. е. $2x+1\geq 0,\quad x\geq -\frac{1}{2}$. Таким образом, ОДЗ $M=\left\{x\middle|\ \ x\in\left[-\frac{1}{2};\ \ \infty\right)\right\}$.

Теперь можно рассуждать также, как и в примере 1, когда в правой части равенства находилось положительной число. Получим две смешанных системы:

$$(1)\ \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=2x+1 \end{cases} \text{ и } (2)\ \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=-(2x+1). \end{cases}$$

Решим каждую систему:

(1) $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ 3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ x=\frac{1}{3}, \end{cases}$ $x=\frac{1}{3}$ входит в промежуток $x\geq -\frac{1}{2}$ и является корнем уравнения.

(2) $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=-(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ x=-3 \end{cases}$ x = -3 не входит в промежуток $x\geq -\frac{1}{2}$ и не является корнем уравнения.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$.

2-й способ

Установим, при каких значениях x модуль в левой части уравнения обращается в нуль: $-x+2=0,\quad x=2.$

Получим два промежутка, на каждом из которых решим данное уравнение (см. рис. 12):

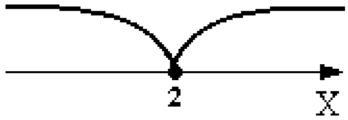

Рис. 12

В результате будем иметь совокупность смешанных систем:

$$(1)\ \begin{cases} x \le 2, \\ -x + 2 = 2x + 1 \end{cases} \quad и \quad (2)\ \begin{cases} x > 2, \\ -(-x + 2) = 2x + 1. \end{cases}$$

Решая полученные системы, находим:

(1) $\begin{cases} x \le 2, \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ $x = \dfrac{1}{3}$ входит в промежуток $x \le 2$ и является корнем уравнения.

(2) $\begin{cases} x > 2, \\ x = -3 \end{cases}$ $x = -3$ не входит в промежуток $x > 2$ и не является корнем уравнения.

Ответ: $x = \dfrac{1}{3}$.

Графическое решение

Для графического решения уравнения, построим графики функций $y = |-x + 2|$ и $y = 2x + 1$.

Чтобы построить график функции $y = |-x + 2|$, построим прямую $y = -x + 2$, которая пересекает ось OX в точке (0; 2), ось OY в точке (2; 0), а затем полупрямую, лежащую ниже оси OX симметрично отразим в этой оси.

Графиком функции $y = 2x + 1$ является прямая, пересекающая ось OX в точке $\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$, а ось OY в точке (0; 1). Для решения уравнения достаточно найти абсциссы точек пересечения графиков (см. рис. 13).

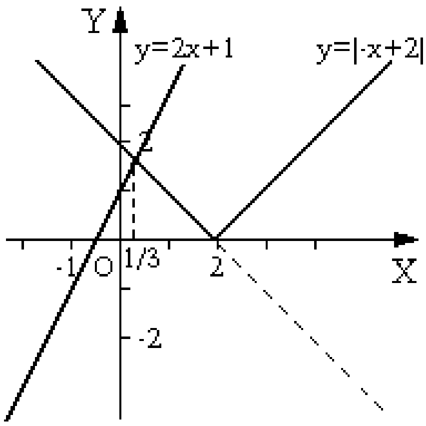

Рис. 13

Графики имеют одну точку пересечения с абсциссой $x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{3}$.

Пример 4. Решить аналитически и графически уравнение

$$|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9.$$

Решение

Аналитическое решение

Это уравнение содержит более одного модуля.

Метод решения уравнений, содержащих переменные под знаком двух и более модулей, состоит в следующем.

1. Найти значения переменной, при которых каждый из модулей обращается в нуль: $x-2=0,\ \ x_1=2;\ \ x-3=0,\ \ x_2=3;\ \ 2x-8=0,\ \ x_3=4.$

2. Отметить эти точки на числовой прямой (см. рис. 14):

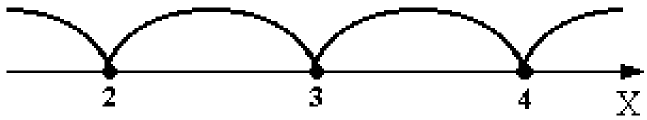

Рис. 14

3. Рассматриваем уравнение на каждом из промежутков и устанавливаем знак выражений, которые находятся под модулями.

1) При $x \le 2$ или $x \in (-\infty;\ \ 2]$. Чтобы определить знак каждого из выражений под модулем на этом промежутке, достаточно взять любое значение x из этого промежутка и подставить в выражение. Если полученное значение отрицательно, значит, при всех x из этого промежутка выражение будет отрицательным; если полученное числовое значение положительно, значит, при всех значениях x из этого промежутка выражение будет положительным.

Возьмем значение x = 0 из промежутка $(-\infty;\ \ 2]$ и подставим его значение в выражение x - 2, получаем 0 - 2 = -2 < 0, значит на этом промежутке x - 2 отрицательно, а следовательно "*выйдет*" из под модуля со знаком "*минус*", получим: $-(x-2)$.

При этом значении x, выражение x - 3 получит значение 0 - 3 = -3 < 0, значит, оно на промежутке $(-\infty;\ \ 2]$ также принимает отрицательные значения и "выйдет" из модуля со знаком "минус", получим: -(x - 3).

Выражение 2x - 8 получит значение $2 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$ и "выйдет" из под модуля со знаком "минус": -(2x - 8).

Уравнение на этом промежутке получится таким: -(x - 2) - (x - 3) - (2x - 8) = 9,
решая его, находим: x = 1.

Выясняем, входит ли это значение в промежуток $(-\infty;\ \ 2]$. Оказывается входит, значит является корнем уравнения.

2) При $x \in (2;\ \ 3]$. Выбираем любое значение x из этого промежутка. Пусть $x = 2{,}5.$ Определяем знак каждого из выражений под модулем при этом значении x. Оказывается, что выражение x - 2 положительно, а два других отрицательны.

Уравнение на этом промежутке примет вид: x - 2 - (x - 3) - (2x - 8) = 9.

Решая его, находим x = 0. Это значение не входит в промежуток $(2;\ \ 3]$, а значит, не является корнем уравнения.

3) При $x \in (3;\ \ 4]$. Выбираем произвольное значение x из этого промежутка, скажем, 3,5 и подставляем в каждое из выражений. Находим, что выражения x - 2 и x - 3 положительны, а 2x - 8 - отрицательно. Получим следующее уравнение:

x - 2 + x - 3 - (2x - 8) = 9.

После преобразования, получим: 3 = 9, а значит, уравнение не имеет корней на этом промежутке.

4) При $x \in (4;\ \ \infty)$. Нетрудно установить, что все выражения на этом промежутке положительны, а значит получим уравнение:

x - 2 + x - 3 + 2x - 8 = 9, 4x = 22, $x = 5\frac{1}{2}$, которое входит в промежуток $(4;\ \ \infty)$ и является корнем уравнения. **Ответ**: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 5{,}5.$

Графическое решение

Построим графики функций $y = |x - 2| + |x - 3| + |2x - 8|$ и $y = 9$, найдем абсциссы точек пересечения этих графиков, которые и будут решениями уравнения.

Строить график функции $y = |x - 2| + |x - 3| + |2x - 8|$ будем, рассматривая эту функцию на каждом промежутке.

При $x \le 2$ получим функцию: $y = -4x + 13$.

При $2 < x \le 3$ получим функцию: $y = -2x + 9$.

При $3 < x \le 4$ получим функцию: $y = 3$.

При $x > 4$ получим функцию: $y = 4x - 13$.

Каждая из этих функций - линейная, которую можно построить по двум точкам на указанном промежутке.

Графиком функции $y = 9$ является прямая, параллельная оси ОХ и проходящая через точку (0; 9) на оси ОY.

Получим две точки пересечения, их абсциссы: $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$ (см. рис. 15).

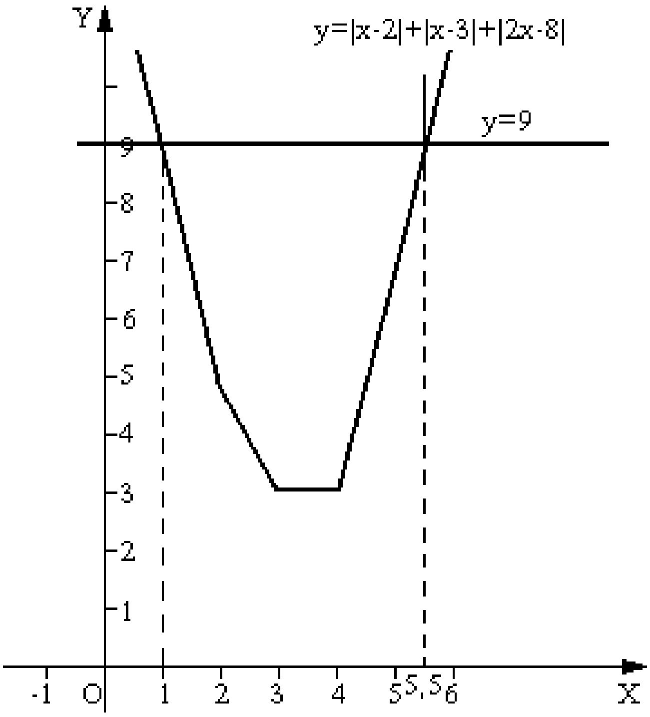

Рис. 15

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$.

Пример 5. Решить аналитически и графически уравнение |x - 1| = |x - 3|.

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Используя свойство абсолютной величины, состоящее в том, что абсолютная величина действительного числа а равна корню квадратному из квадрата числа а, т. е. $|a| = \sqrt{a^2}$, данное уравнение будет равносильно следующему:

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2}.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$(x-1)^2 = (x-3)^3.$$

Решая его, находим: x = 2. **Ответ**: x = 2.

2-й способ

1. Найдем значения переменной, при которых каждый из модулей обращается в нуль: $x - 1 = 0, \quad x_1 = 1; \quad x - 3 = 0, \quad x_2 = 3.$

2. Отметим эти точки на числовой прямой (см. рис. 16):

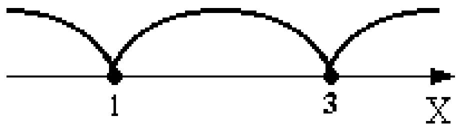

Рис. 16

3. Решим уравнение на каждом из трех промежутков, получим три смешанные системы:

(1) $\begin{cases} x \le 1, \\ -(x-1) = -(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ -1 \ne -3, \end{cases}$ решений нет.

(2) $\begin{cases} 1 < x \le 3, \\ x - 1 = -(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \le 3, \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \le 3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ - входит в промежуток $1 < x \le 3$ и является корнем уравнения.

(3) $\begin{cases} x > 3, \\ x - 1 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ -1 \ne -3 \end{cases}$ решений нет.

Ответ: x = 2.

Графическое решение

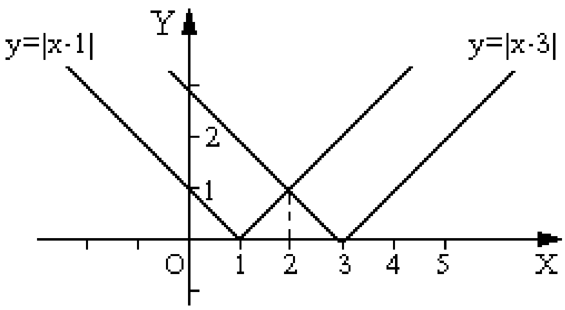

Рис. 17

Строим графики функций $y = |x - 1|$ и $y = |x - 3|$. Они имеют одну точку пересечения с абсциссой 2 (см. рис. 17).

Ответ: x = 2.

Пример 6. Решите уравнение |x - a| = |x - 4|.

Решение

Это уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{(x-a)^2} = \sqrt{(x-4)^2} \quad или \quad (x-a)^2 = (x-4)^2.$$

После преобразования получим: 2(4 - a)x = (4 - a)(4 + a).

Если a = 4, тогда уравнение примет вид $0 \cdot x = 0,$ которое имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

Если $a \neq 4,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{4+a}{2}.$

Ответ:

Если а = 4, то уравнение имеет б/м решений, х - любое действительное число.

Если $a \neq 4,$ то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{4+a}{2}.$

***Пример** 7*. Для каждого значения параметра а решить уравнения:

а) |x - a| = x - 2; **б**) $a - |x| = 1 - a^2 x.$

Решение

а) |x - a| = x - 2.

1-й способ

Область допустимых значений: $x - 2 \geq 0, \quad x \geq 2, \quad M = \{x| \quad x \in [2; \quad \infty)\}.$

Тогда, уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$(1) \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = x - 2 \end{cases} \text{ и } (2) \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = -(x - 2). \end{cases}$$

Решим каждую систему:

$(1) \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ a = 2. \end{cases}$ Это значит, что при $a = 2$ уравнение имеет бесконечное множество решений из промежутка $x \in [2; \quad \infty).$

$(2) \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = -(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 2x = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = \dfrac{a+2}{2}. \end{cases}$

Чтобы найти значения параметра а, при которых уравнение будет иметь решение $x = \dfrac{a+2}{2}$ подставим вместо х в неравенство системы, значение $\dfrac{a+2}{2}$ и решим полученное неравенство относительно а.

$$\frac{a+2}{2} \geq 2, \quad a + 2 \geq 4, \quad a \geq 2.$$

Но поскольку, мы установили, что при а = 2 уравнение имеет множество решений их промежутка $x \in [2; \quad \infty),$ тогда при $a > 2$ уравнение будет иметь решение $x = \dfrac{a+2}{2}.$

Осталось выяснить решения уравнения при $a < 2$.

Из первой системы находим:

$(1) \begin{cases} x \geq 2, \\ x - a = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ a \neq 2, \end{cases}$ уравнение не имеет решений.

Из второй системы мы нашли решения при $a > 2$, в противном случае, т. е. при $a < 2$ уравнение не будет иметь решений.

2-й способ

Область допустимых значений: $x-2\ge 0,\quad x\ge 2,\quad M=\{x|\quad x\in[2;\quad \infty)\}.$

Воспользуемся свойством абсолютной величины: $|a|=\sqrt{a^2}$.

Получим уравнение: $\sqrt{(x-a)^2}=x-2.$ Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ x^2-2ax+a^2=x^2-4x+4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ 4x-2ax=4-a^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ 2(2-a)x=(2-a)(2+a). \end{cases}$$

1. Если а = 2, тогда уравнение примет вид: $0\cdot x=0,\quad 0=0,$ уравнение имеет бесконечное множество решений из промежутка $x\ge 2.$

2. Если $a\ne 2,$ тогда уравнение имеет решение $x=\dfrac{a+2}{2}.$ Чтобы выяснить значения а, надо решить неравенство $x\ge 2$, куда вместо х подставить значение $\dfrac{a+2}{2}.$

$\dfrac{a+2}{2}\ge 2,\quad a\ge 2.$ Учитывая, что при а = 2 $x\ge 2,$ получаем: $a>2.$

Таким образом, при $a>2$ уравнение имеет решение $x=\dfrac{a+2}{2}.$

3. При $a<2$, очевидно, уравнение не имеет решений.

Ответ:

1. Если а = 2, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений из промежутка $x\in[2,\quad \infty).$

2. Если а > 2, тогда уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a+2}{2}.$

3. Если $a<2,$ то уравнение не имеет решений.

б) $a-|x|=1-a^2x.$

Решение

Если $x\ge 0,$ тогда будем иметь уравнение: $a-x=1-a^2x.$
После простых преобразований получим (а - 1)(а + 1)х = 1 - а.

При $a\ne 1$ и $a\ne -1$ уравнение имеет единственное решение $x=-\dfrac{1}{a+1},$ но учитывая, что $x\ge 0,$ находим, $-\dfrac{1}{a+1}\ge 0,\quad a+1<0,\quad a<-1.$

Отсюда ясно, что при $a<-1$ уравнение имеет единственное решение

$$x=-\frac{1}{a+1}.$$

При а = -1 получаем уравнение $0\cdot x=2,$ которое не имеет решений.

При а = 1 уравнение примет вид $0 \cdot x = 0,$ которое имеет бесконечное множество решений на промежутке $[0; \ \infty).$

Если х < 0, тогда получим уравнение $a + x = 1 - a^2 x,$ которое преобразуется в уравнение $x(a^2 + 1) = 1 - a.$ Оно имеет единственное решение $x = \dfrac{1-a}{a^2+1}$ при любых действительных значениях а, но, учитывая, что х должно быть отрицательным, находим для а значения: 1 - а < 0, а > 1.

Остается выяснить решение уравнения при -1 < а < 1.

Нетрудно установить, что, в этом случае, уравнение не имеет корней.

В самом деле:

1) Если $x \ge 0,$ находим: $x = -\dfrac{1}{a+1}.$

Поскольку $-1 < a < 1$, тогда $\dfrac{1}{a+1} > 0, \ \ -\dfrac{1}{a+1} < 0,$ что невозможно, ибо $x \ge 0,$ значит уравнение не имеет решений.

2) Если $x < 0,$ находим: $x = \dfrac{1-a}{a^2+1}.$

Поскольку $-1 < a < 1$, тогда $\dfrac{1-a}{a^2+1} > 0,$ что невозможно, так как $x < 0,$ значит уравнение также не имеет решений.

Ответ:

1. Если $a < -1$, тогда $x = -\dfrac{1}{a+1}.$
2. Если $-1 \le a < 1,$ тогда уравнение не имеет решений.
3. Если а = 1, тогда $x \in [0; \ \infty).$
4. Если а > 1, тогда $x = \dfrac{1-a}{a^2+1}.$

Пример 8. Решите уравнение |2 - |1 - |x||| = 1.

Решение

Решать будем это уравнение последовательно "*раскрывая*" модули, начиная с "*внешнего*" и "*приближаясь*" к переменной х.

После раскрытия первого модуля, получим совокупность двух уравнений:

(1) 2 - |1 - |x|| = 1 или (2) 2 - |1 - |x|| = - 1.

Решая уравнение (1), в свою очередь, получаем два уравнения:

|1 - |x|| = 1,

(3) 1 - |x| = 1 или (4) 1 - |x| = -1.

Из уравнения (3) находим: |x| = 0, $x_1 = 0;$ из уравнения (4) находим: |x| = 2, $x_2 = -2,$ $x_3 = 2.$

Решая уравнение (2), также получим: |1 - |x|| = 3, которое распадается два уравнения:
(3') 1 - |x| = -3 или (4') 1 - |x| = 3.

Из (3') получаем: |x| = 4, $x_4 = -4$, $x_5 = 4$. Из (4') |x| = -2, которое не имеет решений.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -4$, $x_5 = 4$.

Задание 2

Решите уравнения аналитически и графически.

1. $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{|3x-5|}{2}$. **2**. |4x - 1| - |2x - 3| + |x - 2| = 0. **3**. $|3x+5| = |x-4|$,

Решите уравнения.

4. |x - a| + |x + a + 1| = 3. **5**. $|4x+3a| - |2-x| = 0$.

Упражнения

Решите аналитически и графически уравнения.

9. 1 - |x| = 0,5. **10**. $\frac{1}{3}|x| - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. **11**. 0,3|x| - 1 = 3 - 0,5|x|. **12**. $2|x| - 4{,}5 = 5 - \frac{3}{8}|x|$.

13. |x| = x + 2. **14**. |x| = 2x + 1. **15**. |3x - 4| = -x + 4. **16**. |x - 1| + |x - 2| = 1.

17. |x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4. **18.** |x - 1| - |x + 2| - |2x - 5| + |3 - x| = -3.

Решите уравнения.

19. ||||x| - 2| - 1| - 2| = 2. **20.** |3 - x| = a. **21.** $|ax+2| = 2a$. **22.** |x + a| - |2x - a + 2| = a.

23. $|x+a| + |x+3a| = a+5$. **24.** |x + 1| = x - a (a $\neq$ -1). **25.** |x - 2| = ax.

26. $\frac{|x|-1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{|x|-5}{4} - \frac{14-2\cdot|x|}{5}\right) = \frac{|x|-9}{2} - \frac{7}{8}$. **27.** $x - \frac{|3x-2|}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}$.

28. $2|x+6| - |x| - |x-6| = 18$.

29. При каких значениях a уравнение имеет более двух корней?

$$|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6.$$

4. Для любителей и знатоков. Кусочно-линейные функции и модули

Пусть заданы $x_1 < x_2 < ... < x_n$ - точки смены формул. Функция f, определенная при всех x, называется ***кусочно-линейной***, если она линейная на каждом интервале $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, ..., $(x_n;\ \infty)$, т. е.

$$f(x) = a_i x + b_i \quad (x_{i-1} < x < x_i \text{ при } i = 1, 2, \dots, n + 1), \ (1)$$

где обозначено $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$.

Если к тому же выполнены условия согласования

$$a_i x_i + b_i = a_{i+1} x_i + b_{i+1} = f(x_i) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

то рассматриваемая кусочно-линейная функция непрерывна. Непрерывная кусочно-линейная функция называется также ***линейным сплайном***.

Ее график есть ломаная с двумя бесконечными крайними звеньями - левым (отвечающим значениям $x < x_1$). Подобный график изображен на рисунке 18:

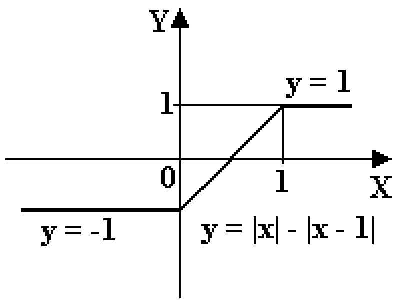

Рис. 18

Функцию с графиком, показанным на этом рисунке, можно задать и одной и тремя формулами: $y = \begin{cases} -1 \quad при \quad x < 0, \\ 2x - 1 \quad при \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 \quad при \quad x > 1. \end{cases}$

Однако нетрудно заметить, что эту же функцию можно задать и одной формулой, используя модули: $y = |x| - |x - 1|$. Оказывается, что и любую непрерывную кусочно-линейную функцию вида (1) можно задать некоторой формулой вида

$$y = ax + b + c_1 \,|\, x - x_1 \,| + c_2 \,|\, x - x_2 \,| + ... + c_n \,|\, x - x_n \,|, \qquad (3)$$

где числа a, b, c_1, …, c_n легко найти по графику данной функции.

Докажем это

Заметим, что две ломанные с бесконечными крайними звеньями и одинаковыми абсциссами вершин x_1, x_2, ..., x_n совпадают, если у них равны угловые коэффициенты всех "одноименных" звеньев и имеется общая точка. Иными словами, знание угловых коэффициентов всех звеньев и координат одной точки такой ломаной на основе указанной информации, при котором данная точка M берется за исходную, см. рисунок 19.

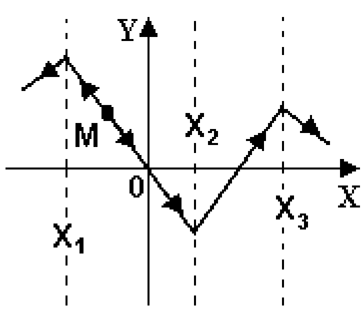

Рис. 19

Отмеченный факт мы и положим в основу получения формулы для непрерывной кусочно-линейной функции, заданной своим графиком. Напомним, что $|x - \alpha|$ равняется $-x + \alpha$, если $x < a$, и $x - \alpha$, если $x \ge \alpha$. Поэтому на каждом из промежутков $(-\infty; \;\; x_1)$,

$(x_1;\ \ x_2)$, …, $(x_n;\ \ +\infty)$, на которые числовая прямая разбивается точками $x_1,\ \ x_2,\ \ ...,\ \ x_n$, функция, определяемая формулой (3), будет линейная (как сумма линейных функций), и для нахождения углового коэффициента соответствующего звена ломанной достаточно найти коэффициент при x после раскрытия всех модулей в выражении (3) на соответствующих этим звеньям промежутках, находим:

$$\begin{aligned} &k_1 = a - c_1 - c_2 - ... - c_n, \\ &k_2 = a + c_1 - c_2 - ... - c_n, \\ &k_3 = a + c_1 + c_2 - ... - c_n, \quad (4) \\ &.................................. \\ &k_{n+1} = a + c_1 + c_2 + ... + c_n. \end{aligned}$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем $k_2 - k_1 = 2c_1$, вычитая из третьего второе, получаем $k_3 - k_2 = 2c_2$, и т. д. Мы приходим в итоге к соотношениям

$$c_i = \frac{k_{i+1} - k_i}{2} \text{ при } i = 1,\ \ 2,\ \ ...,\ \ n. \ (5)$$

Складывая первое равенство с последним, получаем $k_1 + k_{n+1} = 2a$, откуда

$$a = \frac{k_1 + k_{n+1}}{2}. \ (6)$$

Обратно, нетрудно проверить, что из равенств (5) и (6) вытекают соотношения (4).

Итак, если коэффициенты $a,\ \ c_1,\ \ c_2,\ \ ...,\ \ c_n$ определяются формулами (5) и (6), то угловые коэффициенты всех звеньев графика функции (3) совпадают с соответствующими угловыми коэффициентами заданного графика и, значит, остается обеспечить всего одну общую точку этих ломанных для их совпадения.

Этого всегда можно добиться выбором подходящего значения оставшегося пока не определенным коэффициента b. С этой целью достаточно подставить в формулу (3), коэффициенты которой уже вычислены из соотношений (5) и (6), координаты какой-либо одной точки данной ломаной и найти b из полученного равенства.

Пример 1. Найдем уравнение ломаной, изображенной на рисунке 20 (треугольный импульс).

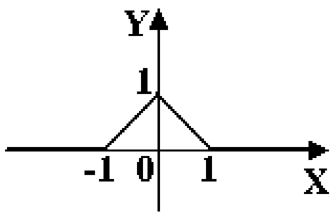

Рис. 20

Решение

Угловые коэффициенты звеньев таковы: $k_1 = 0,\ \ k_2 = 1,\ \ k_3 = -1,\ \ k_4 = 0$. Поэтому $c_1 = \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{1}{2},\ \ c_2 = \frac{k_3 - k_2}{2} = -1,\ \ c_3 = \frac{k_4 - k_3}{2} = \frac{1}{2},\ \ a = \frac{k_1 + k_4}{2} = 0$.

Значит, уравнение данной ломаной имеет вид

$$y = \frac{1}{2}|\,x+1| - |\,x\,| + \frac{1}{2}|\,x-1| + b.$$

Найдем значение коэффициента b из условия y(0) = 1, подставляя координаты вершины (0; 1) нашей ломаной в уравнение, получим $y(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+b=1$, откуда находим, b = 0, и уравнение окончательно запишем в виде

$$y=\frac{1}{2}|x+1|-|x|+\frac{1}{2}|x-1|.$$

Построение графиков функций вида

$$y=ax+b+c_1|x-x_1|+c_2|x-x_2|+...+c_n|x-x_n| \quad (3)$$

Как ясно из вышесказанного, график любой функции вида (3) является ломаной с бесконечными крайними звеньями. Но чтобы построить такую ломаную, достаточно знать все ее вершины и по одной точке на левом и правом бесконечных звеньях. **Эти соображения позволяют легко строить графики функций такого вида без раскрытия модулей и перехода к их кусочному заданию**.

А именно составляется таблица:

x	x_0	x_1	…	x_n	x_{n+1}
y	y_0	y_1	…	y_n	y_{n+1}

Здесь $y_i=y(x_i)$ - значения данной функции при $x=x_i$ $(i=0,\ 1,\ ...,\ n+1)$. Значения $x_0<x_1$ *и* $x_{n+1}>x_n$ здесь выбираются произвольно. Определяемые этой таблицей точки $M_i(x_i;\ y_i)$ при i = 1, 2, …, n являются вершинами строящейся ломаной, а точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M_{n+1}(x_{n+1};\ y_{n+1})$ принадлежат крайним звеньям. Все эти точки наносят на координатную плоскость. Остальное построение графика ясно.

Пример 2. Построить график функции $y=3x+1-|x+1|+2|x|$.

Построение

Составляем таблицу:

x	-2	-1	0	1
y	-2	0	0	4

Наносим точки $M_0(-2; -2)$; $M_1(-1; 0)$; $M_2(0; 0)$; $M_3(1; 4)$ на координатную плоскость и соединяем соседние точки отрезками (см. рис. 21).

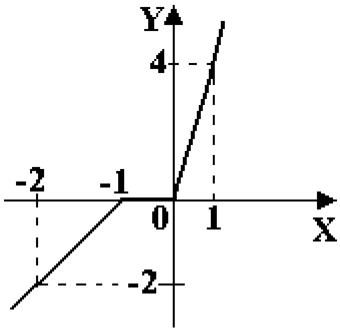

Рис. 21

Упражнения

30. Найдите уравнение треугольного импульса на промежутке $[\alpha; \quad \beta]$ с амплитудой (высотой), равной h (см. рис. 22).

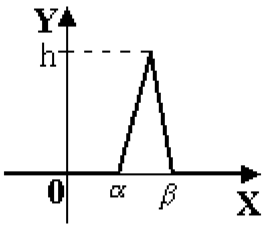

Рис. 22

Решите задачу двумя способами: получив непосредственно уравнение соответствующей ломаной с помощью формул (5) и (6) и с помощью преобразований единичного треугольного импульса, уравнение которого было получено.

31. Найдите уравнение вида (1) ломаных, изображенных на рисунке 23:

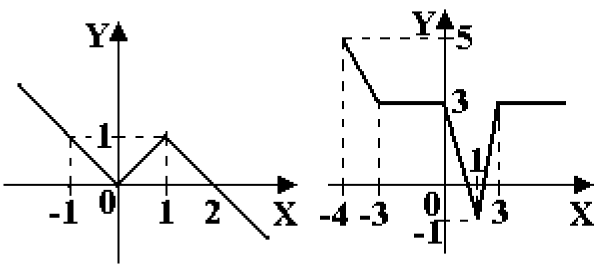

Рис. 23

32. Постройте графики данных функций, пользуясь описанным "методом вершин":
а) $y = x + |x-2| - |x|$; б) $y = |x+1| + |x| - |x-2|$; в) $y = |x+2| + |x| - 2|x-2|$.

33. Изобразите график функции $y = ||x| - 1|$, построив для этого сначала график y = |x| - 1, и с его помощью представьте эту функцию в виде (3).
34. Представьте в виде (1) функции, заданные следующими формулами:

1) y = ||x - 2| - 1|; 2) y = x + |x - |x||; 3) y = |x - 2|x|| - |x|; 4) y = |||x| - 2| - 1|.

Указание. Воспользуйтесь методом, предложенным в задаче 33.

Литература

1. С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, С. Г. Борчугова “Сборник задач по элементарной алгебре”, Москва “Просвещение”, 1973 г.

2. “Сборник задач по математике для поступающих в вузы”, под редакцией проф. А. И. Прилепко, Москва “Высшая школа”, 1982 г.

3. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов “Задачи вступительных экзаменов по математике”, Москва “Наука”, 1983 г.

4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин “Лекции и задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1971 г.

5. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов. и. Шварцбурд “Алгебра и математический анализ” для 11 класса, учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, Москва “Просвещение”, 1993 г.

6. “Пособие по математике для поступающих в вузы”, под ред. Г. Н. Яковлева, Москва “Наука”, 1985 г.

7. “Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы”, под редакцией М. И. Сканави, учебное пособие, 1994 г.

8. О. Н. Доброва “Задания по алгебре и математическому анализу”, Москва “Просвещение”, 1996 г.

9. В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин “Задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1965 г.

10. И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев “Факультативный курс по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

11. М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко “Математика для абитуриента”, Москва, НТЦ “Университетский”, 1994 г.

12. Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Пиварцбурд “Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа”, Москва “Просвещение”, 1990 г.

13. “Практикум абитуриента”. Алгебра и тригонометрия. Под ред. А. А. Егорова, приложение к журналу “Квант”, 3, 1995 г., Москва, 1995 г., бюро “Квантум”.

14. В. В. Зорин “Пособие по математике для поступающих в вузы”, Москва “Высшая школа”, 1965 г.

15. А. Я. Симонов, д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. “Система тренировочных задач и упражнений по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

16. Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго “Московские математические материалы”, под ред. А. Н. Колмогорова, Москва “Просвещение”, 1986 г.

17. Журналы “Квант”, 1/1972, 3/1975, 4/1975, 7/1976, 5/1987, 6/1987, 1/1990, 2/1991, 3/1991, 5/1991, 1/1995, 2/1995, 3/1995.

18. Журналы “Математика в школе”, 3/1991, 1/1992, 1, 2, 3, 4, 5, 6/1993.