АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СТАРШИХ СТЕПЕНЕЙ

Оглавление

5. Решение алгебраических уравнений выше второй степени

5.1. Многочлены и их корни

Определение. Многочленом степени n от переменного x называется алгебраическое выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

где n - целое неотрицательное число, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 - любые действительные числа, причем $a_n \neq 0$.

Многочлен нулевой степени есть отличное от нуля действительное число. Будем также считать многочленом постоянную величину, равную нулю; такой многочлен будем называть ***нуль многочленом*** или просто ***нулём***. В отличие от всех других многочленов нуль-многочлен не имеет степени.

Многочлены от переменного x будем обозначать символами P(x), Q(x), R(x), S(x) и т. д.

Числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 будем называть коэффициентами многочлена. Коэффициент a_n называется ***старшим коэффициентом*** или коэффициентом при переменной наивысшей степени, а коэффициент a_0 - ***свободным членом***.

Например коэффициентами многочлена $6x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 23x - 12$ являются числа 6, 5, -8, 23, -12. Среди них 6 - старший коэффициент, -12 - свободный член.

Одночлены $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ..., $a_1 x$, a_0 называются ***членами многочлена***.

Если какой-нибудь коэффициент равен нулю, то член с этим коэффициентом не пишут. Если коэффициент, отличный от a_0, равен единице, то его также не пишут (коэффициент).

Например, многочлен $\frac{1}{7}x^5 + x^4 - \sqrt{2} \cdot x^2 + \frac{3}{5}x + 7$ имеет коэффициенты $\frac{1}{7}$, 1, 0, -$\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}$, 7; многочлен x^4 имеет коэффициенты 1, 0, 0, 0, 0.

Многочлен считается известным, если известны все его коэффициенты и порядок их следования.

5.2. Деление многочленов

Деление с остатком. **Теорема**. Если P(x) и S(x) $\neq$ 0 - два многочлена, то существует и притом единственная пара многочленов Q(x) и R(x), которая удовлетворяет соотношениям: 1) $P(x) = S(x) \times Q(x) + R(x)$, 2) либо степень R(x) меньше или равна степени S(x), либо R(x) = 0.

Q(x) - называется частным, а R(x) - остатком.

5.2.1. Схема деления углом

Пример 1. $P(x) = 4x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 3x + 1$, $S(x) = 2x^3 + x^2 + 3$. Найти частное и остаток от деления многочлена P(x) на S(x).

Решение

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 4x^5 + 7x^4 + 6x^3 \qquad + 3x + 1 \\ 4x^5 + 2x^4 \qquad + 6x^2 \end{array} & \begin{array}{l} 2x^3 + x^2 + 3 \\ \hline 2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{4} \end{array} \\
\hline
\quad -\begin{array}{l} 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x \\ 5x^4 + \frac{5}{2}x^3 \qquad + \frac{15}{2}x \end{array} & \\
\hline
\qquad -\begin{array}{l} \frac{7}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{9}{2}x + 1 \\ \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x^2 \qquad + \frac{21}{4} \end{array} & \\
\hline
\qquad\quad -\frac{31}{4}x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{17}{4} &
\end{array}$$

Ответ: частное $2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{4}$, остаток $-\frac{31}{4}x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{17}{4}$.

Пример 2. Найти частное и остаток при делении $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ на $x^2 + 3x + 2$.

Решение

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^4+2x^3-2x^2-5x-2 \\ x^4+3x^3+2x^2 \end{array}} & \begin{array}{l} x^2+3x+2 \\ \hline x^2-x-1 \end{array} \\
\quad \underline{-\begin{array}{l} -x^3-4x^2-5x \\ -x^3-3x^2-2x \end{array}} & \\
\qquad \underline{-\begin{array}{l} -x^2-3x-2 \\ -x^2-3x-2 \end{array}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ответ: частное равно $x^2 - x - 1$; остаток равен нулю.

Теорема. **Многочлен P(x) делится на многочлен S(x) в том случае, если остаток при делении P(x) на S(x) равен нулю**.

Из теоремы следует, чтобы выяснить, делится ли многочлен P(x) на S(x), можно выполнить деление углом и найти остаток. Если остаток равен нулю, то многочлен P(x) делится на многочлен S(x).

Пример 3. Установить делится ли многочлен

$$P(x) = 27x^7 + 18x^6 + 15x^5 + 19x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 1$$

на многочлен $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$?

Решение

Разделим "уголком" многочлен P(x) на S(x). В результате мы получим, что частное равно $9x^4 + 5x^2 + 1$, а остаток равен нулю. Значит многочлен P(x) делится на многочлен S(x).

5.3. Корни многочлена

Пусть с - некоторое действительное число (в общем случае, комплексное число). **Значением** многочлена P(x) при x = c называется число, которое получается, при подстановке вместо x в данный многочлен и выполнении действий.

Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, тогда значение этого многочлена при x = c обозначается через P(c): $P(c) = a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} + ... + a_1 \cdot c + a_0$.

Пример 1. Значение многочлена P(x) = $3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ при x = 2 равно:

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 24 - 8 + 8 - 5 = 19;$$

при x = 0, P(0) = -5; при x = 1, P(1) = 3 - 2 + 4 - 5 = 0.

Таким образом, при x = 0 значение многочлена равно свободному члену:

$$P(0) = a_0;$$

при x = 1 значение многочлена равно сумме его коэффициентов:

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0.$$

Определение. Если при $x = x_0$ значение многочлена равно нулю, $P(x_0) = 0$, тогда x_0 называется корнем многочлена P(x).

Пример 1. Задан многочлен $S(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$. При x = 2 значение этого многочлена равно нулю, $S(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$, значит x = 2 является корнем многочлена S(x).

Тот факт, что при x = 1 значение многочлена равно сумме его коэффициентов используется в обратном порядке: если сумма коэффициентов многочлена равна нулю, тогда x = 1 - корень этого многочлена.

Определение. Если стоит задача найти все значения переменной x, при которых многочлен f(x) равен нулю, то говорят, что надо решить уравнение f(x) = 0.
Выделим особенно, что ***решить*** уравнение - значит найти **все** его корни.

Таким образом, ***алгебраическим уравнением*** называется уравнение f(x) = 0, где f(x) - некоторый многочлен. Если f(x) - многочлен n-й степени, то уравнение $f(x) = 0$ называется ***алгебраическим уравнением n-й степени***.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема (называемая теоремой Безу).

Теорема 1. **Остаток от деления многочлена f(x) на x - a равен f(a) (т. е. равен значению этого многочлена при x = a).**

Доказательство

Произведём деление с остатком многочлена f(x) на x - a:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x),$$

где остаток r(x), если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя x - a, т. е. равна нулю. Поэтому r(x) = r является **числом**:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r.$$

Чтобы найти число r, положим в этом равенстве x = a. Тогда, получим f(a) = r, что и доказывает теорему.

Следствие. Если a - корень многочлена f(x), то этот многочлен делится на $x - a$.

Пример 1. Дан многочлен $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$. Нетрудно видеть, что 1 - корень этого многочлена, в самом деле: $f(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 0$, значит, по следствию из теоремы многочлен должен делиться на x - 1.

Решение

Разделим "уголком" многочлен $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$ на x - 1:

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 \\ \underline{x^4 - x^3 \phantom{{}+ 2x^2 + x - 3}} \\ -\begin{array}{r} 2x^2 + x \phantom{{}- 3} \\ \underline{2x^2 - 2x \phantom{{}- 3}} \\ -\begin{array}{r} 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array} \end{array} \end{array}
& \begin{array}{|l} x - 1 \\ \hline x^3 + 2x + 3 \end{array}
\end{array}$$

Остаток равен нулю, значит, многочлен делится на x - 1.

Теорема 2. Если все коэффициенты многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

являются целыми числами, то всякий целый корень этого многочлена является делителем свободного члена a_0.

Доказательство

Пусть с - целый корень многочлена f(x), т. е.

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 = 0.$$

Тогда

$$a_0 = -c \cdot \left(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1\right).$$

Так как число, стоящее в скобках, является целым (так как все коэффициенты целые, по условию), то a_0 делится на с.

Доказанная теорема значительно облегчает отыскание целых корней многочленов с целыми коэффициентами.

1. Надо найти и выписать все делители свободного члена (положительные и отрицательные).

2. Проверить (можно подстановкой), какие из них являются корнями данного многочлена.

3. Если ни один делитель свободного члена не обращает многочлен в нуль, то этот многочлен целых корней не имеет.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0$.

Решение

1. Найдем делители свободного члена 12: $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 6, \quad \pm 12$.

2. Если уравнение имеет целые корни, то они находятся среди этих делителей, проверим это. Многочлен в левой части уравнения обозначим f(x).

f(1) = 24, значит 1 не является корнем уравнения;

f(-1) = -24, значит -1 не является корнем уравнения;

f(2) = 0, значит 2 является корнем уравнения.

3. По теореме Безу, многочлен f(x) делится на x - 2. Производя деление "уголком", находим: $f(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 17x - 6)$.

Для нахождения остальных корней нужно решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 17x - 6 = 0.$$

Снова повторяем предыдущий процесс.

1. Выписываем делители свободного члена 6: $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6$.

2. Проверяем их. Числа 1 и -1 уже проверялись. Испытаем другие делители, подставляя их один за другим в многочлен $g(x) = x^3 - 2x^2 - 17x - 6$.

Находим:

g(2) = -40, значит 2 не является корнем многочлена g(x);

g(-2) = 12, -2 не является корнем;

g(3) = -48, 3 не является корнем;

g(-3) = 0, значит -3 является корнем многочлена g(x).

По теореме Безу, он делится на x + 3. В результате деления получаем:

$$x^3 - 2x^2 - 17x - 6 = (x+3)(x^2 - 5x - 2).$$

Чтобы найти другие корни, если они существуют, решим квадратное уравнение $x^2 - 5x - 2 = 0, \quad x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$.

Таким образом, исходное уравнение четвёртой степени имеет четыре корня.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$, $x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}$.

Замечание. Порой бывает нелегко проверять предполагаемые корни многочлена или вычислять его значение, особенно, если многочлен высокой степени и проверяемые числа большие.

Для облегчения этого процесса существует схема Горнера.

5.4. Схема Горнера

Пусть дан многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, который надо разделить на двучлен x - x_0.

Для этого, коэффициенты данного многочлена запишем в верхней строке таблицы.

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0	x_0
	$x_0 \cdot b_{n-1}$	...	$x_0 \cdot b_2$	$x_0 \cdot b_1$	$x_0 \cdot b_0$	
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$	...	$b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2$	$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$	**остаток**	

Во второй строке записывается произведение x_0 на предыдущие коэффициенты частного.

В третьей строке записываются коэффициенты частного и остаток.

Как получаются коэффициенты частного?

Обозначим коэффициенты частного: $b_{n-1}, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-3}, \quad \ldots, \quad b_2, \quad b_1, \quad b_0$.

Нижние индексы у коэффициентов частного на единицу меньше, чем у делимого. И это понятно, потому что в частном получится многочлен степени на 1 меньшей, чем у делимого. Так, если у делимого наивысшая степень была 5 и был член, содержащий x^5, то в частном будет самая высокая степень 4 и старший коэффициент частного: $b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1} + \dots$.

Посмотрим, как это делается на примерах.

Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена

$$P(x) = 2x^5 - 13x^3 + 5x^2 - 11x - 6 \text{ на x - 3.}$$

Решение

В верхней строке таблицы записываются коэффициенты данного многочлена в порядке убывания их индексов, а в правом уголке (можно в левом, дело вкуса) записывается число 3. Надо заметить, что члена, содержащего x^4 нет, значит, коэффициент при этом члене равен нулю - этот ноль записывается в таблицу. Об этом следует помнить.

2	0	-13	5	-11	-6	**3**
	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 20$	$3 \cdot 49$	
2	$0 + 3 \cdot 2 = 6$	$-13 + 3 \cdot 6 = 5$	$5 + 3 \cdot 5 = 20$	$-11 + 3 \cdot 20 = 49$	$-6+3 \cdot 49 =141$	

Получаем частное $Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 20x + 49$; остаток или значение многочлена в точке x = 3 равно P(3) = 141.

Ответ: частное $Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 20x + 49$; остаток или значение многочлена в точке x = 3 равно P(3) = 141.

Пример 2. Найти частное и остаток при делении $x^5 - 3x^2 + 7x + 2$ на x + 2.

Решение

1	0	0	-3	7	2	- 2
	$-2 \cdot 1$	$-2 \cdot (-2)$	$-2 \cdot 4$	$-2 \cdot (-11)$	$-2 \cdot 29$	
1	$0 - 2 \cdot 1 = -2$	$0 - 2 \cdot (-2) = 4$	$-3 - 2 \cdot 4 = -11$	$7 - 2 \cdot (-11) = 29$	2 - 58 = -56	

Ответ: частное: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 11x + 29$; остаток: -56 (значение многочлена в точке -2).

Пример 3. Найти частное и остаток при делении $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ на $x - 1$.

Решение

2	7	-2	-13	6	1
	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 9$	$1 \cdot 7$	$1 \cdot (-6)$	
2	$7 + 1 \cdot 2 = 9$	$-2 + 1 \cdot 9 = 7$	-13 + 7 = -6	6 - 6 = 0	

Ответ: частное: $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$; остаток равен нулю, значит данный многочлен делится без остатка на x - 1.

Задание

1. Найти частное и остаток при делении многочленов на двучлен, применяя схему Горнера:

а) $2x^3 + x^2 - 2$ на x + 4; **б**) $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5$ на x – 1

5.5. Возвратные уравнения

Определение. Уравнения вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0, \text{ где } a \neq 0 \quad (1)$$

называются **возвратными** или **симметричными**.

Отличительной особенностью таких уравнений является равенство коэффициентов, равноотстоящих от его начала и конца.

Свойство 1. Возвратное уравнение не может иметь число 0 своим корнем. В самом деле, если допустить, что x = 0 - корень уравнения, тогда, при подстановке в уравнение, получим ложное равенство a = 0 (по определению $a \neq 0$).

Свойство 2. Если возвратное уравнение имеет своим корнем число a, то оно имеет и корень, равный $\frac{1}{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В самом деле, пусть x = a - корень возвратного уравнения

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0, \text{ причём } a \neq 0,$$

тогда, $a \cdot a^n + b \cdot a^{n-1} + c \cdot a^{n-2} + ... + c \cdot a^2 + b \cdot a + a = 0$. (2)

Подставим в левую часть данного уравнение значение $x = \frac{1}{a}$, получим:

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n-2} + ... + c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{a} + a \text{ или}$$

$$\frac{a + a \cdot b + c \cdot a^2 + ... + c \cdot a^{n-2} + b \cdot a^{n-1} + a \cdot a^n}{a^n},$$

но из равенства (2) следует, что $a + a \cdot b + c \cdot a^2 + ... + c \cdot a^{n-2} + b \cdot a^{n-1} + a \cdot a^n = 0$, причем $a \neq 0$, следовательно, $\frac{a + a \cdot b + c \cdot a^2 + ... + c \cdot a^{n-2} + b \cdot a^{n-1} + a \cdot a^n}{a^n} = 0$, а это и означает, что $\frac{1}{a}$ - корень данного возвратного уравнения (1).

При решении возвратных уравнений часто применяется подстановка

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Пример 1. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Решение

Это уравнение возвратное четной степени. Делим обе части уравнения на x^2, тем более, что $x \neq 0$ (следствие 1), получим уравнение:

$$\frac{6x^4}{x^2} - \frac{13x^3}{x^2} + \frac{12x^2}{x^2} - \frac{13x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0,\ 6x^2 - 13x + 12 - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2} = 0,$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = y,\ \ y \neq 0$, тогда, возводя обе части этого равенства в квадрат, получим: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2,\ \ x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = y^2,\ \ x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,\ \ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Подставляя новые переменные в уравнение, имеем:

$$6(y^2 - 2) - 13y + 12 = 0,\ \ 6y^2 - 13y = 0,\ \ y(6y - 13) = 0,\ \ y_1 = 0,\ \ y_2 = \frac{13}{6}.$$

Значение $y_1 = 0$ не удовлетворяет условию $y \neq 0$ т является посторонним корнем. Остается одно значение: $y = \frac{13}{6}$.

Делая обратную подстановку, получим $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$.

Отсюда находим $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

5.6. Возвратные уравнения второго рода

Пример 2. Решите уравнение $30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30 = 0$.

Решение

В этом уравнении, коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, при нечётных степенях равны, а при нечетных степенях противоположны, т. е. равны по модулю, но различны по знаку.

Такие уравнения, называются возвратными уравнениями ***второго рода.***

Решение этого уравнения принципиально не отличается от решения предыдущего.

Разделим обе уравнения на x^2 и сгруппируем попарно члены, равноудаленные ри начала и конца: $30\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x - \frac{1}{x}\right) - 228 = 0$.

Разница в знаках двучленов в скобках не помешает нам воспользоваться прежним методом решения.

Пусть $x-\dfrac{1}{x}=y,\ \ y\neq 0$. Возведем обе части этого равенства в квадрат, получим $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=y^2,\ \ x^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=y^2,\ \ x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=y^2,\ \ x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Отличие только в знаке перед числом 2.

После подстановки в уравнение и преобразований, получаем:

$30y^2-17y-168=0,\ \ y_1=\dfrac{8}{3},\ \ y_2=-\dfrac{21}{10};\ \ x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{21}{10},\ \ x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{3}$.

Ответ: $x_1=-\dfrac{5}{2},\ \ x_2=\dfrac{2}{5},\ \ x_3=3,\ \ x_4=-\dfrac{1}{3}$

Задание 1

Решите возвратные уравнения на множестве действительных чисел.

1. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$. **2**. $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

3. $15x^4-16x^3-30x^2+16x+15=0$. **4**. $3x^4+7x^3+7x+3=0$.

5.7. Возвратные уравнения нечетной степени

Пример 3. Решить возвратное уравнение нечетной степени

$$x^7+2x^6-5x^5-13x^4-13x^3-5x^2+2x+1=0.$$

Решение

Такое уравнение (возвратное нечетной степени) всегда имеет корень $x=-1$ (попробуйте самостоятельно доказать это в общем виде) следовательно, по теореме Безу, его левая часть делится на x + 1.

Выполним это деление по схеме Горнера:

1	2	-5	-13	-13	-5	2	1	-1
	$-1\cdot 1$	$-1\cdot 1$	$-1\cdot(-6)$	$-1\cdot(-7)$	$-1\cdot(-6)$	$-1\cdot 1$	$-1\cdot 1$	
1	$2-1\cdot 1=1$	-5 $-1\cdot 1$ = -6	-13 + 6 = -7	-13 + 7 = -6	-5 + 6 = 1	2 - 1 = 1	1 - 1 =0	

В частном получим многочлен: $x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1$.

Уравнение примет вид: $(x+1)\cdot\left(x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1\right)=0$.

Осталось решить возвратное уравнение четной степени:

$$x^6+x^5-6x^4-7x^3-6x^2+x+1=0.$$

Делим обе части на x^3: $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-7=0$.

Снова полагаем $x+\frac{1}{x}=y, \quad y\neq 0$, нам уже известно, что тогда получим:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\,.$$

Выразим $x^3+\frac{1}{x^3}$ через y. Для этого возведём обе части равенства $x+\frac{1}{x}=y$ в куб, получим:

$$x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=y^3, \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y\,.$$

Выполним подстановку и придём к уравнению $y^3+y^2-9y-9=0$.

Решим его, раскладывая левую часть на множители:

$y^2(y+1)-9(y+1)=0, \quad (y+1)(y^2-9)=0, \quad (y+1)(y+3)(y-3)=0,$

$y_1=-1, \quad y_2=3, \quad y_3=-3$.

Получаем три уравнения $x+\frac{1}{x}=-1, \quad x+\frac{1}{x}=3, \quad x+\frac{1}{x}=-3$.

Первое уравнение $x^2+x+1=0$ не имеет действительных корней,

$x^2-3x+1=0, \quad x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}; \quad x^2+3x+1=0, \quad x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_1=-1, \; x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \quad x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

5.8. Уравнения, приводящиеся к возвратным

Пример 4. Решите уравнение $x^4-2x^3-23x^2+8x+16=0$.

Решение

Это уравнение не является возвратным, но его можно легко привести к возвратному простой подстановкой, заменив x на 2u. Подставляя в уравнение x = 2u, получаем:

$$(2u)^4-2\cdot(2u)^3-23\cdot(2u)^2+8\cdot(2u)+16=0, \quad 16u^4-16u^3-92u^2+16u+16=0\,.$$

Полученное уравнение уже является возвратным, но его можно упростить, разделив обе части уравнения на 4, $4u^4-4u^3-23u^2+16u+16=0$.

Делим обе части уравнения на u^2, а затем, делая подстановку $u-\frac{1}{u}=y$, находим:

$4y^2-4y-15=0, \quad y_1=-\frac{3}{2}, \quad y_2=\frac{5}{2}$.

$u-\frac{1}{u}=-\frac{3}{2}, \quad 2u^2+3u-2=0, \quad u_1=-2, \quad u_2=\frac{1}{2}; \quad u-\frac{1}{u}=\frac{5}{2}, \quad 2u^2-5u-2=0,$

$u_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}, \quad x_1=-4, \quad x_2=1, \quad x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $x_1 = -4,\quad x_2 = 1,\quad x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Пример 5. Решите уравнение, преобразуя его в возвратное

$$2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0.$$

Решение

Чтобы свести уравнение к возвратному, необходимо сделать такую подстановку x = ku, где k - неопределенный коэффициент ($k \in R$), который предстоит найти.

Коэффициенты членов, равноотстоящих от концов многочлена должны быть равны. Коэффициент при первом члене: $2 \cdot (ku)^4 = 2k^4 \cdot u^4$.

Коэффициент при этом члене должен быть равен по модулю 18, т. е. $2k^4 = 18$, $k^4 = 9,\quad k^2 = 3,\quad k_1 = \sqrt{3},\quad k_2 = -\sqrt{3}$.

Теперь сделаем подстановку при $k = \sqrt{3},\quad x = \sqrt{3} \cdot u$.

Уравнение примет вид: $18u^4 - 45\sqrt{3} \cdot u^3 + 120u^2 - 45\sqrt{3} \cdot u + 18 = 0$,

$$6u^2 - 15\sqrt{3}u + 40 - \frac{15\sqrt{3}}{u} + \frac{6}{u^2} = 0,\quad 6 \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) - 15\sqrt{3} \cdot \left(u + \frac{1}{u}\right) + 40 = 0.$$

Положим $u + \dfrac{1}{u} = z$, тогда $u^2 + \dfrac{1}{u^2} = z^2 - 2$. После подстановки в уравнение получим

$$6z^2 - 15\sqrt{3} \cdot z + 28 = 0,\quad z_1 = \frac{7\sqrt{3}}{6},\quad z_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя вместо z значения, получим два квадратных уравнения

$$u + \frac{1}{u} = \frac{7\sqrt{3}}{6},\quad 6u^2 - 7\sqrt{3}u + 6 = 0,\quad u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}};\quad x_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},\quad x_2 = 2.$$

$$u + \frac{1}{u} = \frac{4}{\sqrt{3}},\quad \sqrt{3}u^2 - 4u + \sqrt{3} = 0,\quad u_3 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}},\quad u_4 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}};$$

$$x_3 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2},\quad x_4 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}.$$

Если $k = -\sqrt{3}$, тогда, при подстановке $x = -\sqrt{3} \cdot u$ получим возвратное уравнение, которое решается теми же методами:

$$18u^4 + 45\sqrt{3} \cdot u^3 + 120u^2 + 45\sqrt{3} \cdot u + 18 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{3}{2},\quad x_2 = 2,\quad x_3 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2},\quad x_4 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Задание 2

Решите уравнения.

1. $12x^5-56x^4+107x^3-107x^2+56x-12=0$. **2**. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.
3. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$. **4**. $5x^4-14x^3-79x^2+84x+180=0$.

6. Частные методы решения алгебраических уравнений

6.1. Метод разложения левой части уравнения f(x) = 0 на множители

Этот метод решения основан на **теореме:**

Если функции $f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x)$ определены на некотором множестве М, то на этом множестве уравнение $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \dots\dots\dots.., \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$$x^3-3x-2=0.$$

Решение

Нетрудно заметить, что после замены 3x = x + 2x, уравнение примет вид:

$$x^3-x-2x-2=0,\quad x(x^2-1)-2(x+1)=0,\quad x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0,$$

$$(x+1)(x^2-x-2)=0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2-x-2=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=-1,\quad x_3=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-1,\quad x_2=2$.

Пример 2. $2x^3-x^2-1=0$.

Решение

Это уравнение также нетрудно решить. Достаточно лишь $2x^3$ представить в виде суммы $2x^3 = x^3 + x^3$, тогда левую часть уравнения легко разложить на множители:

$x^3 + x^3 - x^2 - 1 = 0,\ \ (x^3 - x^2) + (x^3 - 1) = 0,\ \ x^2(x-1) + (x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$
$(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0.$

Получим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ 2x^2 + x + 1 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$

Ответ: x = 1.

Пример 3. $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

Решение

В отличие от предыдущих уравнений, здесь труднее усмотреть способ разложения на множители (хотя он и существует).

Воспользуемся уже известным приёмом.

1. Находим делители свободного члена: $\pm 1,\ \ \pm 2,\ \ \pm 4$.

2. Пробуем среди них найти корень уравнения. Сразу понятно, что положительное число не может быть корнем, ибо все коэффициенты уравнения положительны, а сумма положительных чисел не может дать в результате нуль.

Пробуем отрицательные.

При x = -1 получаем: -1 + 4 - 6 + 4 =1, $1 \neq 0$, значит, x = -1 не является корнем.

При x = -2 получаем: $(-2)^3 + 4 \cdot x(-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 4 = 0,\ \ 0 = 0$, значит, x = -2 является корнем уравнения, а значит, его левая часть, делится на x + 2.

Разделим, используя схему Горнера:

1	4	6	4	-2
	$-2 \cdot 1$	$-2 \cdot 2$	$-2 \cdot 2$	
1	$4 - 2 \cdot 1 = 2$	$6 - 2 \cdot 2 = 2$	$4 - 2 \cdot 2 = 0$	

В частном получим: $x^2 + 2x + 2$.

Уравнение примет вид: $(x+2)(x^2 + 2x + 2) = 0$. Оно равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ x^2 + 2x + 2 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2$, т. е. уравнение имеет один корень.

Ответ: x = -2.

Для решения некоторых других примеров нам потребуется теорема.

Теорема. Если $x_0 = \dfrac{p}{q}$ - несократимая дробь, является корнем уравнения $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами, то **p** - делитель a_0, а **q** - делитель a_n.

Пример 4. Решите уравнение $10x^3-3x^2-2x+1=0$.

Решение

1. Найдем делители свободного члена и делители первого коэффициента. Составим всевозможные дроби вида $\dfrac{p}{q}$, где p - делители свободного члена, а q - делители первого коэффициента.

Для свободного члена - 1 имеем два делителя: ± 1.

Для первого коэффициента делители: $\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 5,\quad \pm 10$.

Составим всевозможные дроби:

$\dfrac{p}{q}=\pm 1,\quad \pm\dfrac{1}{2},\quad \pm\dfrac{1}{5},\quad \pm\dfrac{1}{10}$.

Сразу ясно, что -1 и 1 не являются корнями уравнения.

Проверим другие дроби. При $x=-\dfrac{1}{2}$ получим:

$10\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=0,\quad -\dfrac{10}{8}-\dfrac{3}{4}+2=0,\quad \dfrac{-10-6+16}{8}=0,\quad 0=0$,

значит, $x=-\dfrac{1}{2}$ - корень уравнения.

Следовательно, левая часть уравнения делится на $x+\dfrac{1}{2}$.

Применим схему Горнера:

10	-3	-2	1	$-\dfrac{1}{2}$
	$-\dfrac{1}{2}\cdot 10$	$-\dfrac{1}{2}\cdot(-8)$	$-\dfrac{1}{2}\cdot 2$	
10	-3 $-\dfrac{1}{2}\cdot 10$ = -8	-2 $-\dfrac{1}{2}\cdot(-8)$ = 2	1 $-\dfrac{1}{2}\cdot 2$ = 0	

В частном получим: $10x^2-8x+2$. Уравнение примет вид:

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(10x^2-8x+2\right)=0$. Оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{2}=0, \\ 10x^2-8x+2=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{1}{2}$.

Задание 3

Решите уравнения.

1. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. **2**. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$.

3. $2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$.

Пример 5. Решите уравнение $(x^3 + x^2 + 1)^2 + (x^3 - x^2 + 1)^2 = 2x^4$.

Решение

Представим $2x^4$ в виде суммы $x^4 + x^4$ и перенесём в левую часть уравнения. Уравнение примет вид: $\left((x^3 + x^2 + 1)^2 - x^4\right) + \left((x^3 - x^2 + 1)^2 - x^4\right) = 0$. Разложим каждое из выражений в скобках на множители, как разности квадратов двух выражений. Дальнейшие преобразования очевидны:

$$(x^3 + x^2 + 1 - x^2)(x^3 + x^2 + 1 + x^2) + (x^3 - x^2 + 1 - x^2)(x^3 - x^2 + 1 + x^2) = 0,$$
$$(x^3 + 1)(x^3 + x^2 + 1 + x^2) + (x^3 - x^2 + 1 - x^2)(x^3 + 1) = 0,$$
$$(x^3 + 1)(x^3 + x^2 + 1 + x^2 + x^3 - x^2 + 1 - x^2) = 0,\quad (x^3 + 1)(2x^3 + 2) = 0,$$
$$(x^3 + 1)(x^3 + 1) = 0,\quad x^3 + 1 = 0,\quad (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x^2 - x + 1 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: x = -1.

Пример 6. Решите уравнение $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$.

Решение

Рассмотрим левую часть уравнения как сумму кубов двух выражений $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3$, а правую часть уравнения, как сумму кубов $27x^3 + 8$.

В результате получим:

$$\left(x - 1 + 2x + 3\right)\cdot\left((x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3) + (2x + 3)^2\right) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4),$$
$$\left(3x + 2\right)\cdot\left(x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - x + 3 + 4x^2 + 12x + 9\right) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4),$$
$$\left(3x + 2\right)\cdot\left(3x^2 + 9x + 13\right) - (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 0,\quad (3x + 2)(-6x^2 + 15x + 9) = 0,$$

$(3x + 2)(2x^2 - 5x - 3) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 2 = 0, \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{2}{3}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2},\quad x_3 = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = -\dfrac{2}{3},\quad x_2 = -\dfrac{1}{2},\quad x_3 = 3$.

6.2. Уравнения с параметрами

Пример 7. Решите уравнение $x^3 + (1 - a^2)x + a = 0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $x^3 + x - a^2x + a = 0,\ \ x^3 - a^2x + x + a = 0$,
$x(x^2 - a^2) + (x + a) = 0,\ \ (x + a)(x^2 - ax + 1) = 0$.

Полученное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x + a = 0, \\ x^2 - ax + 1 = 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение имеет корень x = -a. Второе уравнение, квадратное, исследуем в зависимости от параметра a.

Находим дискриминант: $D = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$.

Если a = 2 или a = -2, то уравнение имеет один корень $x = \frac{a}{2}$.

Если $-2 < a < 2$, то квадратное уравнение не имеет корней.

Если a < -2 или a > 2, тогда квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2},\ \ x_3 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Ответ:

1. Если $-2 < a < 2$, то уравнение имеет один корень x = -a.
2. Если a = 2 или a = -2, то уравнение имеет два корня $x_1 = -a,\ \ x_2 = \frac{a}{2}$.
3. Если a < -2 или a > 2, тогда уравнение имеет три корня:

$$x_1 = -a,\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2},\ \ x_3 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Пример 8. Решите уравнение на множестве действительных чисел

$$x(x^2 - 2) = a(x^2 + 2ax + 2).$$

Решение

Раскроем скобки и перенесем все члены из правой части в левую, получим: $x^3 - 2x - ax^2 - 2a^2x - 2a = 0;\ \ -2a^2x$ представим в виде: $-2a^2x = -a^2x - a^2x$, подставим это значение в уравнение и после группировки будем иметь:

$x^3 - a^2x - ax^2 - a^2x - 2x - 2a = 0,\ \ x(x^2 - a^2) - ax(x + a) - 2(x + a) = 0,$
$(x + a)(x^2 - ax - ax - 2) = 0,\ \ (x + a)(x^2 - 2ax - 2) = 0$.

Полученное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x + a = 0, \\ x^2 - 2ax - 2 = 0. \end{array}\right.$

Перовое уравнение имеет корень x = -a, для второго уравнения проведем исследование в зависимости от значений параметра a.

Найдём дискриминант: $D = 4a^2 + 8 = 4(a^2 + 2)$. При любых действительных значениях а дискриминант положителен, значит, квадратное уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_2 = a - (a^2 + 2) = -(a^2 - a + 2), \quad x_3 = a + (a^2 + 2) = a^2 + a + 2.$$

Ответ: $x_1 = -a$, $x_2 = -(a^2 - a + 2)$, $x_3 = a^2 + a + 2$.

6.3. Решение уравнений вида $(ax + b_1)^n + (ax + b_2)^n = k$, где n - четное

Уравнения вида $(ax + b_1)^n + (ax + b_2)^n = k$ подстановкой $ax + b_1 = y + c$, $ax + b_2 = y - c$, где $c = \dfrac{b_1 - b_2}{2}$, сводится к более простому алгебраическому уравнению.

Пример 9. Решить уравнение $(2x - 3)^4 + (2x - 5)^4 = 2$.

Решение

Положим $2x - 3 = y + c$ и $2x - 5 = y - c$, получим уравнение

$$(y + c)^4 + (y - c)^4 = 2.$$

Постоянную с находим из системы уравнений $\begin{cases} y + c = 2x - 3, \\ y - c = 2x - 5, \end{cases} \Leftrightarrow 2c = 2, \quad c = 1$ и тогда уравнение станет таким:

$$(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 2, \quad y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 2,$$

$$2y^4 + 12y^2 = 0, \quad y^4 + 6y^2 = 0, \quad y^2(y^2 + 6) = 0 \quad \Rightarrow y = 0.$$

Далее находим $2x - 3 = 1, \quad x = 2$.

Ответ: x = 2.

Пример 10. Решите уравнение $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$.

Решение

Положим $x - 2 = y + c$ и $x - 4 = y - c$, получим уравнение

$$(y + c)^6 + (y - c)^6 = 64.$$

Постоянную с находим из системы уравнений $\begin{cases} y + c = x - 2, \\ y - c = x - 4, \end{cases} \Leftrightarrow 2c = 2, \quad c = 1$ и тогда уравнение станет таким: $(y + 1)^6 + (y - 1)^6 = 64$.

Для возведения двучлена в 6-ю степень воспользуемся формулой бинома Ньютона[1]

$y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1+y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1=64,$

$2y^6+30y^4+30y^2-62=0,\quad y^6+15y^4+15y^2-31=0.$

Положим $y^2=z$, $z\geq 0$ получим уравнение: $z^3+15z^2+15z-31=0$.

Так как сумма коэффициентов последнего уравнения равна 0 (1+15+15-31=0), тогда z = 1 является корнем уравнения, значит, левая часть его делится на $z-1$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	15	15	-31	1
	$1\cdot 1$	$1\cdot 16$	$1\cdot 31$	
1	$15+1\cdot 1=16$	$15+1\cdot 16=31$	$-31+1\cdot 31=0$	

Получим частное: $z^2+16z+31$.

Уравнение примет вид:

$(z-1)(z^2+16z+31)=0\Rightarrow z_1=1,\quad z_2=-8-\sqrt{33},\quad z_3=-8+\sqrt{33}.$

z_2, z_3 не удовлетворяют условию $z\geq 0$ и являются посторонними.

$y^2=1,\quad y_1=-1,\quad y_2=1$. Тогда $x-2=-1+1,\quad x_1=2;\quad x-2=1+1,\quad x_2=4$.

Ответ: $x_1=2,\quad x_2=4$.

Задание 4

Решите уравнение на множестве действительных чисел.

1. $x^4+2a^3x=a^4$. **2**. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$. **3**. $(x-1)^4+(x+1)^4=16$.

4. $x^4+(x+2)^4=17$. **5**. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x$. **6**. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

6.4. Метод введения нового неизвестного (новой переменной)

Пример 1. Решите уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.

Решение

Замечаем, что каждый из множителей в скобках имеет два одинаковых слагаемых, содержащих сумму переменны x^2+x. Это дает возможность заменить их сумму одной новой переменной и тем самым свести уравнение к квадратному.

Но ещё лучше, заменить $x^2+x+1=y$ и отсюда выразить $x^2+x=y-1$, а затем подставить в уравнение, получим:

$$y(y-1+2)-12=0,\quad y(y+1)-12=0,\quad y^2+y-12=0,\quad y_1=-4,\quad y_2=3.$$

Подставляя вместо y найденные значения, получим совокупность двух квадратных уравнений:

[1] $(ax+b)^n=C_n^0(ax)^n\cdot b^0+C_n^1(ax)^{n-1}\cdot b^1+...+C_n^{n-1}\cdot(ax)^1\cdot b^{n-1}+C_n^n\cdot(ax)^0\cdot b^n$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-4, \\ x^2+x+1=3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+5=0, \\ x^2+x-2=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \textit{не имеет корней}, \\ x_1=-2,\ \ x_2=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1=-2,\ \ x_2=1.$$

Ответ: $x_1=-2,\ \ x_2=1$.

Пример 2. Решите уравнение $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$.

Решение

В этом уравнении сразу не видно, как в предыдущем, членов, содержащих одинаковые перемененные, но после несложных преобразований это можно получить.

$(x^2-2x-1)^2+3(x^2-2x)-13=0$. Положим $x^2-2x-1=y,\ \ x^2-2x=y+1$, тогда уравнение примет вид:

$$y^2+3(y+1)-13=0,\ \ y^2+3y-10=0,\ \ y_1=-5,\ \ y_2=2.$$

Подставляя вместо y значения, приходим к совокупности двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=-5, \\ x^2-2x-1=2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+4=0, \\ x^2-2x-3=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \textit{корней не имеет}, \\ x_1=-1,\ \ x_2=3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1=-1,\ \ x_2=3.$$

Ответ: $x_1=-1,\ \ x_2=3$.

Пример 3. Решите уравнение $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

Решение

Сгруппируем множители по два следующим образом:

$\big((x-2)(x+7)\big)\big((x+1)(x+4)\big)=19,\ \ \left(x^2+5x-14\right)\cdot\left(x^2+5x+4\right)-19=0$.

Положим $x^2+5x-14=y,\ \ x^2+5x=y+14$. Подставляя в уравнение, получим: $y\cdot(y+14+4)-19=0,\ \ y^2+18y-19=0,\ \ y_1=-19,\ \ y_2=1$.

Получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x-14=-19, \\ x^2+5x-14=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+5=0, \\ x^2+5x-15=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}, \\ x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{85}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2},\ \ x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{85}}{2}$.

Задание 5

Решите уравнение

1. $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)=15$. **2**. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$.

3. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$. **4**. $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.

6.5. Дробно-рациональные уравнения

Применяя основные теоремы о равносильности алгебраических уравнений, можно заменить дробно-рациональное уравнение целым алгебраическим уравнением. Но при этом, мы выполняем преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней.

Отбор посторонних корней можно производить или путем сопоставления с множеством допустимых значений переменного, или путем проверки корней.

Пример 1. Решите уравнение на множестве действительных чисел

$$\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}-\frac{1}{x^2-4}-\frac{4}{2x^2+7x+6}+\frac{1}{2x+3}=0.$$

Решение

Это уравнение дробно-рациональное. Прежде надо установить область допустимых значений переменной, что удобнее сделать, если разложить знаменатели дробей на множители:

Многочлен $2x^3+3x^2-8x-12$ если имеет целые корни, то они будут находиться среди делителей свободного члена.

Делители свободного члена: $\pm 1,\ \ \pm 2,\ \ \pm 3,\ \ \pm 4,\ \ \pm 6,\ \ \pm 12$.

После проверки находим, что -2 и 2 являются корнями этого многочлена, значит он делится на произведение (x - 2)(x + 2), т. е. на x^2-4.

Разделив "уголком" данный многочлен на x^2-4 получим в частном 2x + 3.

Таким образом, многочлен $2x^3+3x^2-8x-12$ можно представить в виде произведения множителей: $2x^3+3x^2-8x-12=(2x+3)(x+2)(x-2)$.

Два других знаменателя нетрудно разложить на линейные множители:

$$x^2-4=(x-2)(x+2),\quad 2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2).$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{4}{(2x+3)(x+2)(x-2)}-\frac{1}{(x+2)(x-2)}-\frac{4}{(2x+3)(x+2)}+\frac{1}{2x+3}=0.$$

Теперь достаточно найти наименьший общий знаменатель, а затем область допустимых значений.

Общий знаменатель: $(2x+3)(x+2)(x-2)$.

Область допустимых значений:

$(2x+3)(x+2)(x-2)\neq 0,\ \ x\neq -2;\ \ x\neq -1{,}5;\ \ x\neq 2$ или

$(-\infty;\ \ -2)\cup(-2;\ \ -1{,}5)\cup(-1{,}5;\ \ 2)\cup(2;\ \ \infty)$.

Преобразуем уравнение, умножив обе его части на общий знаменатель, который, по нашему требованию, не равен нулю. Попросту говоря, этот процесс называется ещё с младших классов "приведение к общему знаменателю", получим:

$4-(2x+3)-4(x-2)+x^2-4=0,\ \ x^2-6x+5=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=5$.

Оба корня входят в область допустимых значений, а значит являются решениями уравнениями.

Ответ: $x_1=1,\ \ x_2=5$.

Задание 6

Решите уравнение на множестве действительных чисел.

1. $\frac{12x+1}{6x-2}-\frac{9x-5}{3x+1}=\frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$. **2**. $\frac{12x+1}{2x^2-7x+5}-\frac{4}{2x-5}+\frac{3}{x-1}=0$.

3. $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x^2-16}+\frac{1}{2x^2+11x+12}-\frac{x-8}{2x^3+3x^2-32x-48}=0$.

6.6. Разные уравнения

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Решение

Область допустимых значений: $x \neq 0$ или $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.

Положим $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$, $y \neq 0$, тогда $\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=y^2$, $\frac{x^2}{9}-2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}=y^2$. Отсюда выразим $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$.

Левую часть уравнения преобразуем так:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\cdot\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right),$$

тогда уравнение примет вид:

$$3\cdot\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

Подставляя вместо $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$, а вместо $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$, получим уравнение:

$$3\cdot\left(y^2+\frac{8}{3}\right)=10y,\ \ 3y^2-10y+8=0,\ \ y_1=\frac{4}{3},\ \ y_2=2.$$

Приходим к совокупности двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3},\\ \frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x-12=0,\\ x^2-6x-12=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-2,\ \ x_2=6,\\ x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}.\end{array}\right.$$

Все корни входят в область допустимых значений.

Ответ: $x_1=-2,\ \ x_2=6,\ \ x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}.$

Пример 2. Решите уравнение $\frac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2$.

Решение

Квадратный трехчлен, находящийся в знаменателе дроби имеет отрицательный дискриминант, а потому не будет равен ни при каких значениях переменной, т. е. областью допустимых значений является множество всех действительных чисел, $x\in R$.

Замечаем, что, если в правой части уравнения вынести за скобки "минус" (строго говоря, "минус единицу") у двух слагаемых $-x-x^2$, тогда в обеих частях уравнения получатся одинаковые суммы с переменными $\frac{10}{1+x+x^2}=6-(x+x^2)$.

Теперь решим полученное уравнение методом введения новой переменной, пусть $1+x+x^2=y$, $y\neq 0$, отсюда $x+x^2=y-1$.

Подставляя в уравнение, получим: $\frac{10}{y}=6-(y-1),\ \ \frac{10}{y}=7-y,\ \ y^2-7y+10=0$.

Последнее уравнение имеет два корня: $y_1=2,\ \ y_2=5$.

Получим совокупность двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}1+x+x^2=2,\\1+x+x^2=5,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-1=0,\\x^2+x-4=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\\x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Решение

Найдём область допустимых значений: $x\neq 0,\ \ x^2+x-5\neq 0,\ \ x\neq\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Положим $\frac{x^2+x-5}{x}=y,\ \ y\neq 0$, тогда $\frac{x}{x^2+x-5}=\frac{1}{y}$. Уравнение примет вид:

$y+\frac{3}{y}+4=0,\ \ y^2+4y+3=0,\ \ y_1=-3,\ \ y_2=-1$.

Получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2+x-5}{x}=-3,\\\frac{x^2+x-5}{x}=-1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x-5=0,\\x^2+2x-5=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-5,\ \ x_2=1,\\x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Все корни входят в область допустимых значений.

Ответ: $x_1=-5,\ \ x_2=1,\ \ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$.

Пример 4. Решите уравнение $x^4 - \dfrac{50}{2x^4 - 7} = 14$.

Решение

Область допустимых значений переменной:

$2x^4 - 7 \neq 0,\ \ (\sqrt{2}x^2 - \sqrt{7})(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{7}) \neq 0,\ \ \sqrt{2}x^2 - \sqrt{7} \neq 0,\ \ x \neq \pm\sqrt[4]{\dfrac{7}{2}}$.

Положим $2x^4 - 7 = y,\ \ y \neq 0$, тогда $2x^4 = y + 7,\ \ x^4 = \dfrac{y+7}{2}$. Подставляя в уравнение, получим: $\dfrac{y+7}{2} - \dfrac{50}{y} = 14,\ \ y^2 + 7y - 100 = 28y,\ \ y^2 - 21y - 100 = 0$,

$y_1 = -4,\ \ y_2 = 25$.

Получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^4 - 7 = -4, \\ 2x^4 - 7 = 25, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 = \dfrac{3}{2}, \\ x^4 = 16, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}, \\ x_{3,4} = \pm 2. \end{array}\right.$$

Все корни входят в область допустимых значений.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}},\ \ x_{3,4} = \pm 2$.

Задание 7

Решите уравнение на множестве действительных чисел.

1. $\left(x + \dfrac{8}{x}\right)^2 + x = 42 - \dfrac{8}{x}$.

2. $2\left(1 + \dfrac{9}{x}\right) + 3\left(\dfrac{x+9}{x}\right)^2 = 14$.

3. $\dfrac{24}{x^2 + 2x - 8} - \dfrac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

4. $\dfrac{2}{x^2 - 3x} + \dfrac{3}{x^2 - 3x + 1} = -4$.

5. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$.

6. $\dfrac{x^2 + 1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1} = 2{,}9$.

7. $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47$.

8. $3\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

9. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$.

7. Аналитическое и графическое решение уравнений

Пример 1. Решить уравнение аналитически и графически $\dfrac{3|x| + 2}{|x| - 1} = 3$.

Решение

Аналитическое решение

Найдём область допустимых значений: $|x|-1 \neq 0, \quad |x| \neq 1, \quad x \neq \pm 1$.

Преобразуем уравнение, приведя его к общему знаменателю, получим:

$3|x|+2 = 3|x|-3, \quad 0 \neq -5$.

Уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Графическое решение

Для графического решения уравнения, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $y = \dfrac{3|x|+2}{|x|-1}$ и y = 3.

Преобразуем функцию $y = \dfrac{3|x|+2}{|x|-1}$ к виду $y = A + \dfrac{B}{|x|-1}$, где A и B - некоторые действительные числа, которые пока нам неизвестны, а поэтому называются *неопределёнными коэффициентами*. Отсюда и название метода - ***метод неопределённых коэффициентов***.

Итак, по условию, $A + \dfrac{B}{|x|-1} = \dfrac{3|x|+2}{|x|-1}, \quad \dfrac{A \cdot |x| + (B-A)}{|x|-1} = \dfrac{3|x|+2}{|x|-1}$.

Приравнивая коэффициенты в числителе дроби, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A = 3, \\ B - A = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 5. \end{cases}$$

Получим функцию: $y = 3 + \dfrac{5}{|x|-1}$. Построение графика этой функции разобьем на несколько этапов:

1) построим график функции $y = \dfrac{5}{|x|}$, которая является чётной, в самом деле, $f(-x) = \dfrac{5}{|-x|} = \dfrac{5}{|x|} = f(x)$, значит, чтобы построить график функции $y = \dfrac{5}{|x|}$, надо построить график функции $y = \dfrac{5}{x}$ для положительных значений x, получим график (см. рис. 50), после чего, построим кривую симметричную полученной относительно оси OY и получим график функции $y = \dfrac{5}{|x|}$ (см. рис. 51).

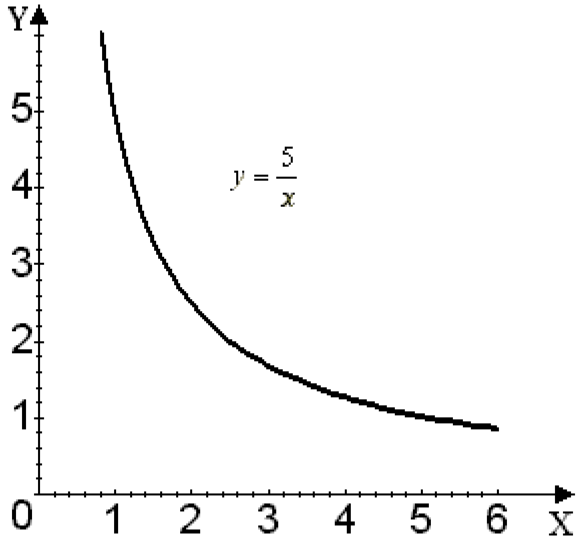

Рис. 50

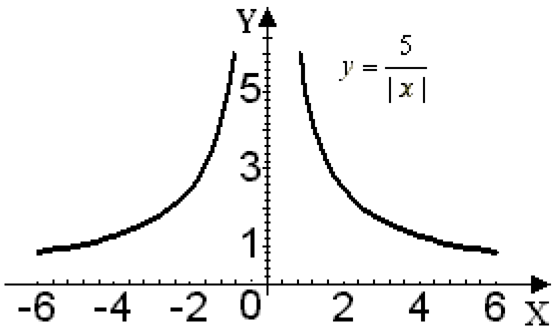

Рис. 51

2) чтобы построить график функции $y=\frac{5}{|x|-1}$, достаточно график функции $y=\frac{5}{|x|}$ перенести параллельно себе вдоль оси OX на 1 вправо (рис. 52);

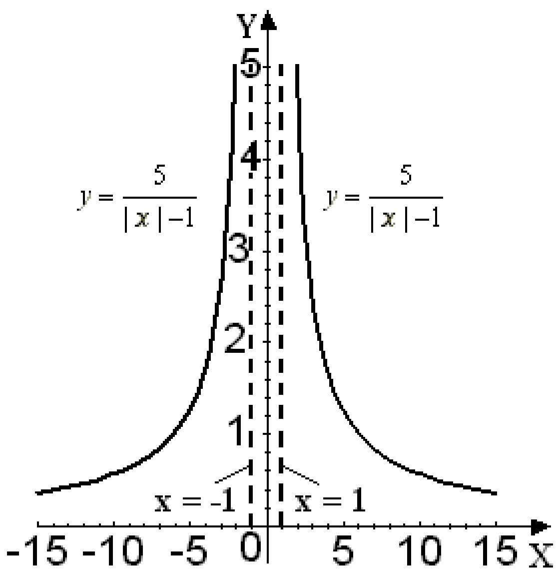

Рис. 52

3) для построения искомого графика функции $y = 3 + \dfrac{5}{|x|-1}$ достаточно выполнить параллельный перенос графика функции $y = \dfrac{5}{|x|-1}$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх.

Графиком функции y = 3 является прямая, параллельная оси OX, и проходящая через точку 3 на оси OY.

Окончательно будем иметь графики (см. рис. 53).

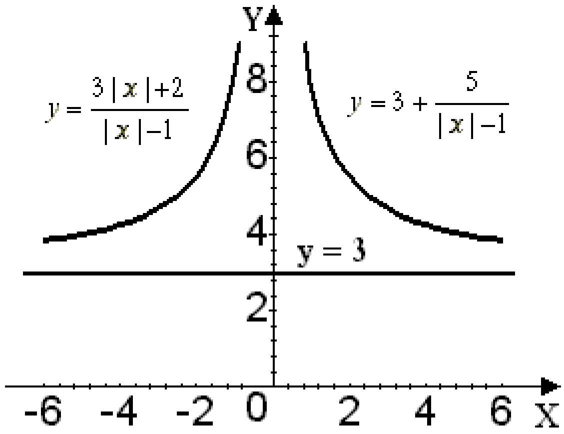

Рис. 53

Графики не пересекаются, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 2. Решите аналитически и графически уравнение $\left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right| = 1$.

Решение

Аналитическое решение

Область допустимых значений: $x \neq -1$ или $M = \{x \in R | x \in (-\infty; \ -1) \cup (-1; \ \infty)\}$.

По определению модуля, получим, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-3x}{1+x} = -1, \\ \dfrac{2-3x}{1+x} = 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-3x = -1-x, \\ 2-3x = 1+x, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 3, \\ 4x = 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2}, \\ x_2 = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Оба корня входят в область допустимых значений, а значит являются корнями уравнения.

Ответ: $x_1 = 1\dfrac{1}{2}, \ \ x_2 = \dfrac{1}{4}$.

Графическое решение

Построим графики функций $y=\left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right|,\quad y=1$.

Преобразуем функцию $y=\left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right|$, а точнее, преобразуем выражение, находящееся под знаком модуля к виду $A+\dfrac{B}{1+x}$. Для этого воспользуемся ***методом неопределенных коэффициентов***.

$$A+\frac{B}{1+x}=\frac{2-3x}{1+x},\quad \frac{A+Ax+B}{1+x}=\frac{2-3x}{1+x},\quad \frac{(A+B)+Ax}{1+x}=\frac{2-3x}{1+x}.$$

Получим систему уравнений: $\begin{cases} A=-3, \\ A+B=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3, \\ B=5. \end{cases}$

Функция примет вид: $y=\left|\dfrac{5}{x+1}-3\right|$.

Построение графика выполним в несколько этапов:

1) строим график функции $y=\dfrac{5}{x}$, её графиком является гипербола, ветви которой расположены в 1-й и 3-й координатных четвертях (построение выполним "по точкам");

2) для построения графика функции $y=\dfrac{5}{x+1}$, выполним параллельный перенос графика функции $y=\dfrac{5}{x}$ вдоль оси Ох на 1 влево;

3) график функции $y=\dfrac{5}{x+1}-3$ получается из графика функции $y=\dfrac{5}{x+1}$ параллельным переносом его вдоль оси Оу на 3 единицы вниз;

4) и, наконец, чтобы построить график функции $y=\left|\dfrac{5}{x+1}-3\right|$, т. е. искомый график, надо "зеркально отразить" в оси Ох ту часть графика $y=\dfrac{5}{x+1}-3$, которая находится ниже оси Ох (под осью Ох).

Графиком функции y = 1 является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку 1 на оси Oy.

Абсциссы точек пересечения графиков дадут решения уравнения (см. рис. 54).

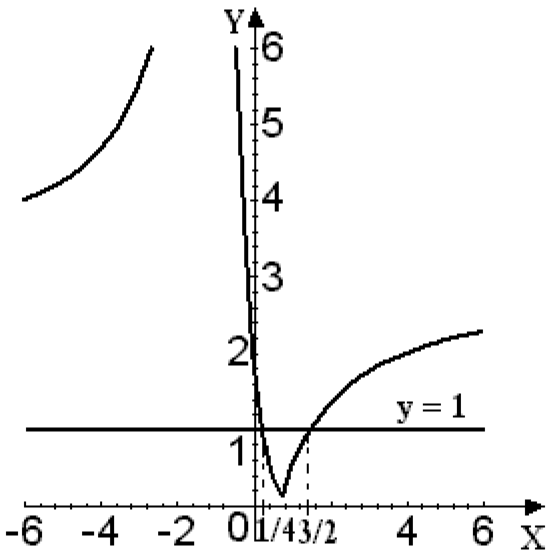

Рис. 54

Ответ: $x_1 = 1\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4}$.

Пример 3. Решите аналитически и графически уравнение $\left|\frac{3|x|-2}{|x|-1}\right| = 2$.

Решение

Аналитическое решение

Область допустимых значений: $|x|-1 \neq 0, \quad |x| \neq 1, \quad x \neq \pm 1$.

По определению модулю, получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3|x|-2}{|x|-1} = -2, \\ \frac{3|x|-2}{|x|-1} = 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3|x|-2 = -2|x|+2, \\ 3|x|-2 = 2|x|-2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0{,}8, \\ |x| = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -0{,}8, \quad x_2 = 0{,}8, \\ x_3 = 0. \end{array}\right.$$

Все три корня входят в область допустимых значений.

Ответ: $x_1 = -0{,}8, \quad x_2 = 0{,}8, \quad x_3 = 0$.

Графическое решение

Построим графики функций $y=\left|\frac{3|x|-2}{|x|-1}\right|$, y = 2 и найдём абсциссы их точек пересечения.

Преобразуем выражение, находящееся под знаком модуля функции

$$y=\left|\frac{3|x|-2}{|x|-1}\right|.$$

Для этого снова воспользуемся методом неопределённых коэффициентов.

$$\frac{3|x|-2}{|x|-1}=A+\frac{B}{|x|-1},\quad \frac{3|x|-2}{|x|-1}=\frac{A|x|-A+B}{|x|-1}.$$

Получим систему уравнений: $\begin{cases}A=3,\\ -A+B=-2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=3,\\ B=1.\end{cases}$

Получим функцию: $y=\left|\frac{1}{|x|-1}+3\right|$.

Этапы построения графика этой функции:

1) строим график функции $y=\frac{1}{x}$ для положительных значений аргумента, т. е. одну (правую) ветвь гиперболы;

2) достроим симметричную ей кривую относительно оси Оу и получаем график функции $y=\frac{1}{|x|}$;

3) выполним параллельный перенос этого графика вдоль оси Ох на 1 вправо, получим график функции $y=\frac{1}{|x|-1}$;

4) полученный график перенесём параллельно самому себе вдоль оси Оу на 3 единицы вверх, получим график функции $y=\frac{1}{|x|-1}+3$;

5) зеркально отразим в оси Ох ту часть графика, которая находится ниже оси Ох, получим график функции $y=\left|\frac{1}{|x|-1}+3\right|$.

Графиком функции y = 2 является прямая, параллельная оси Ох и проходящая через точку (0; 2) на оси Оу.

Абсциссы их точек пересечения являются решениями уравнения (см. рис. 55).

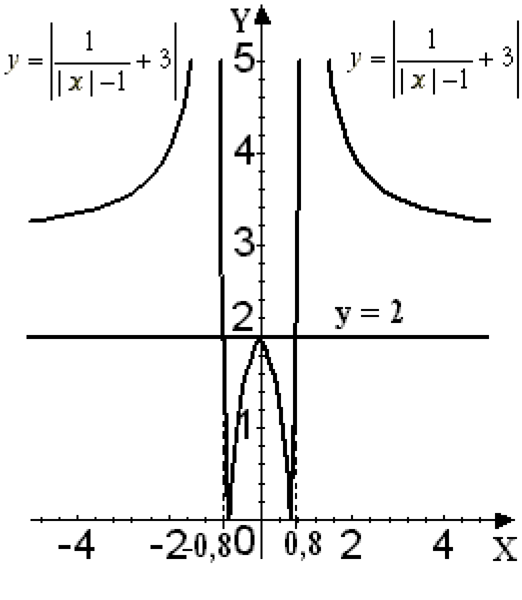

Рис. 55

Ответ: $x_1 = -0{,}8, \quad x_2 = 0{,}8, \quad x_3 = 0$.

Задание 8

Решите аналитически и графически уравнения:

$$1)\ \frac{2-3|x|}{1+|x|} = 1, \quad 2)\ \left|\frac{3x+2}{x-1}\right| = 3, \quad 3)\ \left|\frac{3|x|+2}{|x|-1}\right| = 3.$$

Литература

1. С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, С. Г. Борчугова “Сборник задач по элементарной алгебре”, Москва “Просвещение”, 1973 г.

2. “Сборник задач по математике для поступающих в вузы”, под редакцией проф. А. И. Прилепко, Москва “Высшая школа”, 1982 г.

3. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов “Задачи вступительных экзаменов по математике”, Москва “Наука”, 1983 г.

4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин “Лекции и задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1971 г.

5. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов. и. Шварцбурд “Алгебра и математический анализ” для 11 класса, учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, Москва “Просвещение”, 1993 г.

6. “Пособие по математике для поступающих в вузы”, под ред. Г. Н. Яковлева, Москва “Наука”, 1985 г.

7. “Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы”, под редакцией М. И. Сканави, учебное пособие, 1994 г.

8. О. Н. Доброва “Задания по алгебре и математическому анализу”, Москва “Просвещение”, 1996 г.

9. В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин “Задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1965 г.

10. И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев “Факультативный курс по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

11. М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко “Математика для абитуриента”, Москва, НТЦ “Университетский”, 1994 г.

12. Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Пиварцбурд “Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа”, Москва “Просвещение”, 1990 г.

13. “Практикум абитуриента”. Алгебра и тригонометрия. Под ред. А. А. Егорова, приложение к журналу “Квант”, 3, 1995 г., Москва, 1995 г., бюро “Квантум”.

14. В. В. Зорин "Пособие по математике для поступающих в вузы", Москва "Высшая школа", 1965 г.

15. А. Я. Симонов, д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. "Система тренировочных задач и упражнений по математике", Москва "Просвещение", 1991 г.

16. Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго "Московские математические материалы", под ред. А. Н. Колмогорова, Москва "Просвещение", 1986 г.

17. Журналы "Квант", 1/1972, 3/1975, 4/1975, 7/1976, 5/1987, 6/1987, 1/1990, 2/1991, 3/1991, 5/1991, 1/1995, 2/1995, 3/1995.

18. Журналы "Математика в школе", 3/1991, 1/1992, 1, 2, 3, 4, 5, 6/1993.