РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Оглавление

8. Некоторые нестандартные способы решения уравнений

Пример 1. Решите уравнение $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

Решение

Область допустимых значений: $x\neq -5$, $M=\{x\in R|x\in(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ \infty)\}$.

Вычтем из обеих частей уравнения выражение $\frac{10x^2}{x+5}$, получим:

$$x^2-\frac{10x^2}{x+5}+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11-\frac{10x^2}{x+5},\quad \left(x^2-\frac{10x^2}{x+5}+\frac{25x^2}{(x+5)^2}\right)+\frac{10x^2}{x+5}-11=0.$$

Вынесем за скобки x^2 в первых трёх членах, уравнение примет вид:

$$x^2\left(1-\frac{10}{x+5}+\frac{25}{(x+5)^2}\right)+\frac{10x^2}{x+5}-11=0.$$

Замечаем, что в скобках находится полный квадрат разности двух выражений: 1 и $\frac{5}{x+5}$.

$$x^2\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^2+\frac{10x^2}{x+5}-11=0,\quad x^2\cdot\frac{x^2}{(x+5)^2}+\frac{10x^2}{x+5}-11=0,$$

$\frac{x^4}{(x+5)^2}+\frac{10x^2}{x+5}-11=0$. Положим $\frac{x^2}{x+5}=y$, тогда $\frac{x^4}{(x+5)^2}=y^2$, получим уравнение $y^2+10y-11=0,\ \ y_1=-11,\ \ y_2=1$. Получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+5}=-11,\\ \frac{x^2}{x+5}=1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+11x+55=0,\\ x^2-x-5=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{решений нет},\\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $x^2 \cdot (x-3)^2 - 16 \cdot (x-3)^2 + 9x^2 = 0$,

$x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 16 \cdot (x-3)^2 + 9x^2 = 0,\quad x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 9x^2 - 16(x-3)^2 = 0$,

$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 16 \cdot (x-3)^2 = 0,\quad x^4 - 6x^2(x-3) - 16(x-3)^2 = 0$.

Разделим обе части уравнения на $(x-3)^2$. Это сделать можно, так как $x \neq 3$, в противном случае (т. е. при x = 3), мы получим ложное равенство 81 = 0.

В результате деления, получим:

$\frac{x^4}{(x-3)^2} - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 16 = 0,\quad \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 16 = 0$. Положим $\frac{x^2}{x-3} = y$, получим квадратное уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0,\quad y_1 = -2,\quad y_2 = 8$.

$\frac{x^2}{x-3} = -2,\quad x^2 + 2x - 6 = 0,\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7};\quad \frac{x^2}{x-3} = 8,\quad x^2 - 8x + 24 = 0$ - это уравнение корней не имеет.

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$.

Пример 3. Выяснить, при каких действительных значениях x и y имеет место равенство

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0.$$

Решение

1-й способ

Преобразуем левую часть уравнения:

$4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 + x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$,

$\left(\left(4x^2 + 4xy + y^2\right) - 2(2x+y) + 1\right) + \left(\left(4x^2 + 4xy + y^2\right) + 2(2x+y) + 1\right) = 0$,

$\left((2x+y)^2 - 2(2x+y) + 1\right) + \left((2x+y)^2 + 2(2x+y) + 1\right) = 0$,

$(2x + y - 1)^2 + (2x + y + 1)^2 = 0$. Следовательно, $2x + y - 1 = 0,\quad 2x + y + 1 = 0$, откуда x = 1, y = -1.

2-й способ

Расположим в левой части слагаемые по убывающим степеням x, получим квадратное уравнение относительно x: $5x^2 + (8y-2)x + (5y^2 + 2y + 2) = 0$.

Это уравнение при действительных значениях y имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$(8y-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5y^2 + 2y + 2) \geq 0.$$

Это неравенство после раскрытия скобок принимает вид $-36(y+1)^2 \geq 0$. Последнее возможно лишь при y = -1, а тогда из уравнения следует, что x = 1.

Ответ: x = 1, y = -1.

9. Трехчленные уравнения

9.1. Трехчленные уравнения, приводящиеся к квадратным уравнениям

Трехчленное уравнение вида $Ax^{2n}+Bx^{n}+C=0,$ где n > 2 - натуральное число, $A\neq 0$, при помощи подстановки $x^{n}=y$ сводится к квадратному уравнению

$$Ay^{2}+By+C=0.$$

Частным видом трехчленного уравнения является **биквадратное** уравнение

$$Ax^{4}+Bx^{2}+C=0.$$

9.1.2. Исследование биквадратного уравнения

Преобразуем биквадратное уравнение $Ax^{4}+Bx^{2}+C=0$ к приведенному. Для этого разделим обе его части на A, зная, что $A\neq 0$, получим:

$$x^{4}+\frac{B}{A}x^{2}+\frac{C}{A}=0.$$

Положим $\frac{B}{A}=P,\ \ \frac{C}{A}=Q$, приходим к уравнению: $x^{4}+Px^{2}+Q=0$.

Заменим $x^{2}=y,\ \ y\geq 0$, получим квадратное уравнение: $y^{2}+Py+Q=0$.

Полученное квадратное уравнение, при D < 0, т. е. при $P^{2}-4Q<0$ не имеет действительных корней, а значит не будет иметь корней и исходное биквадратное уравнение.

Если D = 0, т. е. $P^{2}-4Q=0,\ \ P^{2}=4Q,\ \ Q=\frac{P^{2}}{4}$, тогда квадратное уравнение имеет один действительный корень $y=-\frac{P}{2}$, а биквадратное уравнение может:

а) имеет два равных по модулю, но противоположных по знаку корня - это будет в том случае, если полученный корень положительный, что произойдет при $-\frac{P}{2}>0,\ \ P<0$;

б) не имеет корней, если полученный корень отрицательный, что получится при P > 0;

в) иметь единственный корень, x = 0, если P = 0, но тогда и Q = 0.

Если D > 0, $P^{2}-4Q>0$, тогда квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $y_{1,2}=-\frac{P\pm\sqrt{P^{2}-4Q}}{2}$, а биквадратное уравнение может:

а) не иметь действительных корней, если оба корня отрицательные, что произойдет при $y_1\cdot y_2=Q>0,\ \ y_1+y_2=-P<0,\ \ P>0$;

б) имеет два корня, если один из корней квадратного уравнения отрицателен, а другой - положителен, т. е. корни y_1 и y_2 - разных знаков, что произойдет при Q<0;

в) имеет три корня, если один из корней соответствующего квадратного уравнения равен нулю, а второй положителен, положим $y_1=0$, а $y_2>0$, что произойдет при $0\cdot y_2=Q,\ \ Q=0;\ \ 0+y_2=-P>0,\ \ P<0$;

г) имеет четыре корня, если оба корня y_1 и y_2 положительные, что произойдет при Q > 0 и P < 0.

Выводы

1. Биквадратное уравнение $x^4 + Px^2 + Q = 0$ **не имеет действительных кор**ней, **если:**

а) $P^2 - 4Q < 0$; **б**) $P^2 = 4Q$ и P > 0; **в**) $P^2 - 4Q > 0$, Q > 0 и P > 0.

2. Биквадратное уравнение имеет один действительный корень, если:

P = Q = 0.

3. Биквадратное уравнение имеет два действительных, равных по модулю, но противоположных по знаку, отличных от нуля корня, если:

а) $P^2 = 4Q$ и P < 0; **б)** $P^2 - 4Q > 0$ и Q < 0.

4. Имеет четыре действительных, отличных от нуля, корня, если $P^2 - 4Q > 0$, Q > 0 и P < 0.

Пример 1. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Решение

Положим $x^2 = y, \ \ y \ge 0$, получим квадратное уравнение $y^2 - 13y + 36 = 0$, которое имеет два различных действительных корня: $y_1 = 4, \ \ y_2 = 9$.

Получим два уравнения:

(1) $x^2 = 4, \ \ x_1 = -2, \ \ x_2 = 2$; (2) $x^2 = 9, \ \ x_3 = -3, \ \ x_4 = 3$.

Ответ: $x_1 = -2, \ \ x_2 = 2$, $x_3 = -3, \ \ x_4 = 3$.

Пример 2. При каком значении λ равнение имеет два равных по модулю корня?

$$x^4 + (3\lambda - 1)x^2 + 2\lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Решение

Биквадратное уравнение имеет два действительных, равных по модулю, но противоположных по знаку, отличных от нуля корня, если:

а) $P^2 = 4Q$ и P < 0; б) $P^2 - 4Q > 0$ и Q < 0.

Для данного уравнения: $P = 3\lambda - 1$, $Q = 2\lambda + \frac{1}{4}$.

а) Получим смешанную систему:

$$\begin{cases} (3\lambda - 1)^2 = 4\left(2\lambda + \frac{1}{4}\right), \\ 3\lambda - 1 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda^2 - 14\lambda = 0, \\ 3\lambda - 1 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = \frac{14}{9}, \\ \lambda < \frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

б) Из условий $P^2 - 4Q > 0$ и Q < 0 получим систему неравенств:

$$\begin{cases} (3\lambda-1)^2 - 4\left(2\lambda+\dfrac{1}{4}\right) > 0, \\ 2\lambda+\dfrac{1}{4} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda^2 - 14\lambda > 0, \\ 2\lambda < -\dfrac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(9\lambda-14) > 0, \\ \lambda < -\dfrac{1}{8}, \end{cases}$$

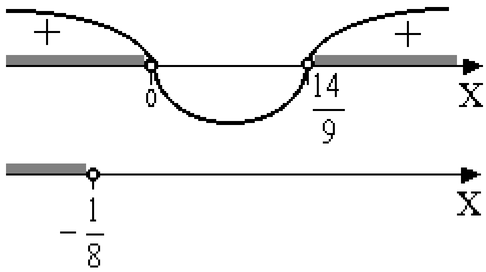


Рис. 56

Ответ: при $\lambda < -\dfrac{1}{8}$ и $\lambda = 0$, или можно записать так $\left\{\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{8}\right)\right\} \cup \{0\}$.

Пример 3. При каких значениях параметра **а** уравнение имеет ровно три корня:

$$(a^3+8)x^4 + (a^2-1)x^2 + a + \sqrt{a^2} = 0.$$

Решение

Уравнение имеет три различных действительных корня, если P < 0 и Q = 0.

Преобразуем уравнение в приведенное, потребовав, чтобы $a^3+8 \neq 0$. Это неравенство будет выполняться при $a \neq -2$.

Получим приведенное уравнение: $x^4 + \dfrac{a^2-1}{a^3+8} \cdot x^2 + \dfrac{a+\sqrt{a^2}}{a^3+8} = 0$, в котором $P = \dfrac{a^2-1}{a^3+8},\ Q = \dfrac{a+|a|}{a^3+8}$.

Для этого уравнения получим смешанную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-1}{a^3+8} < 0, \\ a+|a| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a+2)(a^2-2a+4)} < 0, \\ a+|a| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{a+2} < 0, \\ a+|a| = 0. \end{cases}$$

Последняя система распадается на совокупность двух систем:

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{a+2} < 0, \\ a \le 0, \\ a - a = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{a+2} < 0, \\ a \le 0. \end{cases}$$

Эту систему решим методом промежутков:

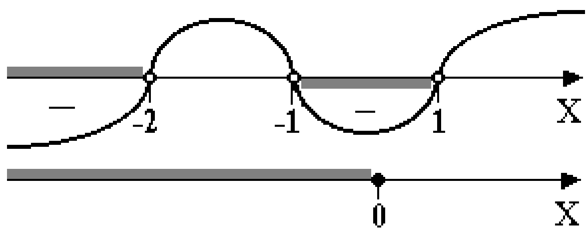


Рис. 57

Получим результат: $(-\infty;\ \ -2)\cup(-1;\ \ 0]$.

(2) $\begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{a+2}<0, \\ a>0, \\ a+a=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(a+1)}{a+2}<0, \\ a>0, \\ a=0, \end{cases}$ система не имеет решений.

Осталось исследовать уравнение, при значении а = -2. Получим уравнение:

$3x^2-2+2=0,\ \ 3x^2=0,\ \ x=0$. В этом случае, уравнение имеет только один корень, значит а = -2 не может удовлетворять условию задачи.

Ответ: $(-\infty;\ \ -2)\cup(-1;\ \ 0]$.

Пример 4. При каких значениях параметра **а** уравнение имеет ровно три корня:

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot x^4+\frac{a+1}{a-3}\cdot x^2+a+\sqrt{a^2-4a+4}-2=0.$$

Решение

Область допустимых значений параметра а: $a\neq 0,\ \ a\neq 3$.

Преобразуем уравнение к приведенному, предположив при этом, что первый коэффициент не равен нулю: $a-\dfrac{1}{a}\neq 0,\ \ \dfrac{a^2-1}{a}\neq 0,\ \ a\neq\pm 1$.

Получим уравнение $x^4+\dfrac{a(a+1)}{(a^2-1)(a-3)}x^2+\dfrac{a(a-2+|a-2|)}{a^2-1}=0$.

Поскольку $a\neq\pm 1$, тогда уравнение примет вид:

$x^4+\dfrac{a}{(a-1)(a-3)}x^2+\dfrac{a(a-2+|a-2|)}{a^2-1}=0$, в котором $P=\dfrac{a}{(a-1)(a-3)}$,

$Q=\dfrac{a(a-2+|a-2|)}{(a-1)(a+1)}$.

Уравнение имеет три различных действительных корня, если P < 0 и Q = 0.

Получим смешанную систему

$$\begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ \dfrac{a(a-2+|a-2|)}{(a-1)(a+1)} = 0, \end{cases}$$ поскольку $a \neq 0$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ a-2+|a-2| = 0, \end{cases}$$ которая распадается на две системы.

$$(1) \begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ a-2 \le 0, \\ a-2-(a-2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ a \le 2, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

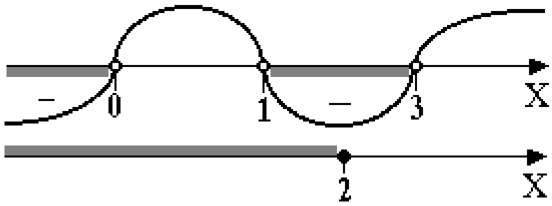


Рис. 58

Решением системы является объединение промежутков: $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ 2]$.

$$(2) \begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ a-2 > 0, \\ a-2+(a-2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{(a-1)(a-3)} < 0, \\ a > 2, \\ a = 0. \end{cases}$$ система не имеет решений.

Исследуем уравнение при а = -1 и а = 1.

Если а = -1, уравнение примет вид: $0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^2 - 1 + 3 - 2 = 0,\ \ 0 = 0$ - уравнение имеет бесконечное множество решений, значит а = -1 не удовлетворяет условию задачи.

Если а = 1, уравнение примет вид: $0 \cdot x^4 - x^2 + 1 + 1 - 2 = 0,\ \ x = 0$ - один корень, значит а = 1 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ 2]$.

Задание 1

1. При каких значениях параметра **а** уравнение имеет единственный корень:

1) $\left(a^2 - 2a\right)x^4 + \left(a - \dfrac{1}{a}\right)x^2 + a - 1 - \sqrt{a^2 + 2a + 1} = 0$;

2) $\left(a - \sqrt{2a+3}\right)x^4 + \left(1 - \dfrac{4}{a}\right)x^2 + 5 - a - \sqrt{a^2 - 10a + 25} = 0$.

2. При каких значениях параметра **а** уравнение имеет ровно три корня:

1) $\left(4-a^2\right)x^4+\left(a^2+3a+2\right)x^2-a-\sqrt{a^2}=0$;

2) $\left(a^2+\frac{1}{a}\right)x^4+\frac{a-1}{a+5}x^2-a-2+\sqrt{a^2+4a+4}=0$.

9.1.2. Зависимости между корнями уравнения и его коэффициентами

Пусть дано приведенное биквадратное уравнение $x^4+Px^2+Q=0$.

Допустим, что это уравнение имеет действительные корни и пусть x_1 и x_2 - корни этого уравнения, тогда $-x_1$ и $-x_2$ также будут являться корнями этого уравнения, в силу четности функции $f(x)=x^4+Px^2+Q$.

Получим: $(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2)=0,\ \left(x^2-x_1^2\right)\left(x^2-x_2^2\right)=0$,

$$x^4-\left(x_1^2+x_2^2\right)\cdot x^2+x_1^2\cdot x_2^2=0.$$

Отсюда находим: $x_1^2+x_2^2=-P,\ \ x_1^2\cdot x_2^2=Q$.

Пример 5. Составить биквадратное уравнение, имеющее в числе своих корней $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

Решение

Из вышеприведенной теореме следует, что для уравнения $x^4+Px^2+Q=0$, имеем $x_1^2+x_2^2=-P,\ \ x_1^2\cdot x_2^2=Q$. Подставляя значения вместо корней уравнения, находим: $P=-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)=-5,\ \ Q=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=6$.

Получим уравнение: $x^4-5x^2+6=0$.

Ответ: $x^4-5x^2+6=0$.

Пример 6. Найти q в уравнении $x^4-3x^2+q=0$, зная, что $x_1+x_2=2$ (x_1 и x_2 - корни уравнения).

Решение

Если x_1 и x_2 - корни уравнения, тогда $x_1^2+x_2^2=3$, $x_1^2\cdot x_2^2=q$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1^2+x_2^2=3, \\ (x_1\cdot x_2)^2=q, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2, \\ \left(x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2\right)-2x_1\cdot x_2=3, \\ (x_1\cdot x_2)^2=q, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2, \\ (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=3, \\ (x_1\cdot x_2)^2=q, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ 2^2-2x_1\cdot x_2=3, \\ (x_1\cdot x_2)^2=q, \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}, \\ (x_1\cdot x_2)^2=q, \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}, \Rightarrow q=\dfrac{1}{4}. \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2=q, \end{cases}$$

Ответ: $q=\dfrac{1}{4}$.

***Пример** 7*. Определить, при каком значении λ корни уравнения

$$x^4-(3\lambda+1)x^2+2\lambda+1=0$$

составляют арифметическую прогрессию.

Решение

Во-первых, выясним, при каких значениях λ уравнение вообще будет иметь корни. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$D=(3\lambda+1)^2-4(2\lambda+1)$$

(следуя аналогии с квадратным уравнением, назовем его дискриминантом) было больше нуля или равнялось нулю.

$$9\lambda^2+6\lambda+1-8\lambda-4\ge 0,\quad 9\lambda^2-2\lambda-3\ge 0.$$

Решать неравенство не будем, но, когда будут найдены значения λ, проверим, будет ли выполняться это неравенство.

Во-вторых. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения, причем $|x_1|\le|x_2|$, тогда $-x_1$ и $-x_2$, также будут являться корнями уравнения.

Расположим эти корни в порядке возрастания, получим следующую последовательность: $-x_2$, $-x_1$, x_1, x_2.

Поскольку эти корни должны образовывать арифметическую прогрессию, получим:
$-x_1=\dfrac{-x_2+x_1}{2}$, $-2x_1=-x_2+x_1$, $x_2=3x_1$.

С другой стороны, известно, что $x_1^2+x_2^2=3\lambda+1$ и $x_1^2\cdot x_2^2=2\lambda+1$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2=3x_1, \\ x_1^2+x_2^2=3\lambda+1, \\ x_1^2\cdot x_2^2=2\lambda+1, \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_2=3x_1, \\ x_1^2+9x_1^2=3\lambda+1, \\ 9x_1^2\cdot x_1^2=2\lambda+1, \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_2=3x_1, \\ x_1^2=\dfrac{3\lambda+1}{10}, \\ 9\left(\dfrac{3\lambda+1}{10}\right)^2=2\lambda+1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$9\left(9\lambda^2+6\lambda+1\right)=200\lambda+100,\quad 81\lambda^2-146\lambda-91=0,\quad \lambda_{1,2}=\frac{146\pm\sqrt{50800}}{2\cdot 81},$$

$\lambda_{1,\,2}=\dfrac{73\pm 10\sqrt{127}}{81}$ - эти корни входят в область допустимых значений.

Ответ: $\lambda_{1,\ 2} = \dfrac{73 \pm 10\sqrt{127}}{81}$.

Задание 2

1. Составить биквадратное уравнение с рациональными коэффициентами, зная, что один из корней равен $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2. Определить, при каком значении m корни уравнения

$$x^4 - (3m-5)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

составляют арифметическую прогрессию.

10. Трехчленные кубические уравнения

Рассмотрим один из методов решения неполных кубических уравнений на частных примерах.

Пример 1. Решите уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Решение

Положим $x = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha + \beta)^3 - 12 \cdot (\alpha + \beta) + 16 = 0$$

или

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha \cdot \beta - 12) \cdot (\alpha + \beta) + 16 = 0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha \cdot \beta - 12 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 16 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = -16.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha \cdot \beta - 12 = 0$ находим:

$$3\alpha \cdot \beta = 12, \quad \alpha \cdot \beta = 4, \quad \alpha^3 \cdot \beta^3 = 64.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -16, а произведение 64.

Получим уравнение: $z^2 + 16z + 64 = 0$, $(z+8)^2 = 0, \quad z_1 = z_2 = -8$;

$$\alpha^3 = \beta^3 = -8, \quad \alpha = \beta = -2.$$

Тогда $x = \alpha + \beta, \quad x_1 = -2 - 2 = -4$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $x + 4$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	-12	16	-4
1	$-4 \cdot 1 + 0 = -4$	$-4 \cdot (-4) - 12 = 4$	$4 \cdot (-4) + 16 = 0$	

Уравнение примет вид: $(x+4)(x^2 - 4x + 4) = 0, \quad (x+4)(x-2)^2 = 0$.

Получим еще один корень: $x - 2 = 0, \quad x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -4, \quad x_2 = 2$.

Пример 2. Решите уравнение $x^3 - 6x + 9 = 0$.

Решение

Положим $x = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha + \beta)^3 - 6 \cdot (\alpha + \beta) + 9 = 0$$

или
$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha \cdot \beta - 6) \cdot (\alpha + \beta) + 9 = 0 .$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha \cdot \beta - 6 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 9 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = -9 .$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha \cdot \beta - 6 = 0$ находим:

$$3\alpha \cdot \beta = 6, \quad \alpha \cdot \beta = 2, \quad \alpha^3 \cdot \beta^3 = 8 .$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -9, а произведение 8.

Получим уравнение: $z^2 + 9z + 8 = 0$, $z_1 = -1, \quad z_2 = -8$;

$$\begin{cases} \alpha^3 = -1, \\ \beta^3 = -8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = -2. \end{cases}$$

Тогда $x = \alpha + \beta, \quad x_1 = -1 - 2 = -3$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $x + 3$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	-6	9	-3
1	$-3 \cdot 1 + 0 = -3$	$-3 \cdot (-3) - 6 = 3$	$-3 \cdot 3 + 9 = 0$	

Уравнение примет вид: $(x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0$. Уравнение $x^2 - 3x + 3 = 0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $x_1 = -3$.

Ответ: $x_1 = -3$.

Пример 3. Решите уравнение $x^3 + 12x + 63 = 0$.

Решение

Положим $x = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha + \beta)^3 + 12 \cdot (\alpha + \beta) + 63 = 0$$

или
$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha \cdot \beta + 12) \cdot (\alpha + \beta) + 63 = 0 .$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha \cdot \beta + 12 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 63 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = -63 .$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+12=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-12,\quad \alpha\cdot\beta=-4,\quad \alpha^3\cdot\beta^3=-64.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -63, а произведение -64.

Получим уравнение: $z^2+63z-64=0$, $z_1=-64,\quad z_2=1$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-64,\\ \beta^3=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-4,\\ \beta=1.\end{cases}$$

Тогда $x=\alpha+\beta,\quad x_1=1-4=-3$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $x+3$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	12	63	-3
1	$-3\cdot1+0=-3$	$-3\cdot(-3)+12=21$	$-3\cdot21+63=0$	

Уравнение примет вид: $(x+3)(x^2-3x+21)=0$. Уравнение $x^2-3x+21=0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $x=-3$.

Ответ: $x=-3$.

Пример 4. Решите уравнение $x^3-6x+4=0$.

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-6\cdot(\alpha+\beta)+4=0$$

или

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-6)\cdot(\alpha+\beta)+4=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta-6=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+4=0,\quad \alpha^3+\beta^3=-4.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=6,\quad \alpha\cdot\beta=2,\quad \alpha^3\cdot\beta^3=8.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -4, а произведение 8.

Получим уравнение: $z^2+4z+8=0$, $D=16-32=-16<0$;

Квадратное уравнение корней не имеет.

Однако, первоначальное кубическое уравнение $x^3-6x+4=0$ имеет действительные корни. В самом деле, среди делителей свободного члена: $\pm1,\quad \pm2,\quad \pm4$ нетрудно найти корень: $x_1=2$. В самом деле: $2^3-6\cdot2+4=8-12+4=0$.

Разделим, по схеме Горнера, трёхчлен x^3-6x+4 на x - 2, получим:

1	0	-6	4	2

1	$2\cdot 1+0=2$	$2\cdot 2-6=-2$	$-2\cdot 2+4=0$

Уравнение примет вид: $(x-2)(x^2+2x-2)=0$. Решим квадратное уравнение:

$$x^2+2x-2=0,\ \ x_2=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3},\ \ x_3=-1+\sqrt{3}.$$

Ответ: $x_1=2,\ \ x_3=-1-\sqrt{3},\ \ x_3=-1+\sqrt{3}$.

Пример 5. Решите уравнение $x^3+6x+2=0$.

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+6\cdot(\alpha+\beta)+2=0$$

или

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+6)\cdot(\alpha+\beta)+2=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+6=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+2=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=-2.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-6,\ \ \alpha\cdot\beta=-2,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=-8.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -2, а произведение -8.

Получим уравнение: $z^2+2z-8=0$, $z_1=-4,\ \ z_2=2$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-4,\\ \beta^3=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\sqrt[3]{4},\\ \beta=\sqrt[3]{2}.\end{cases}$$

Тогда $x=\alpha+\beta,\ \ x_1=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $x-\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	6	2 $\quad\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$
1	$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\cdot 1+0=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^2+6$	$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3+6(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})+2=0$

Уравнение примет вид: $\left(x-\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)\right)\left(x^2+\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)x+6+\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)^2\right)=0$.

Уравнение $x^2+\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)x+6+\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)^2=0$ не имеет действительных корней, т. к. его дискриминант отрицателен:

$$D=\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)^2-4\cdot\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)^2-24=-3\cdot\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)^2-24<0.$$

Уравнение имеет один действительный корень: $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$.

Ответ: $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$.

Не всегда этот метод может дать положительный результат!

Пример 6. Решите уравнение $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Решение

Положим $x = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3 - 19\cdot(\alpha+\beta) + 30 = 0$$

или
$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\cdot\beta - 19)\cdot(\alpha+\beta) + 30 = 0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta - 19 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 30 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = -30.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta - 19 = 0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta = 19, \quad \alpha\cdot\beta = \frac{19}{3}, \quad \alpha^3\cdot\beta^3 = \frac{6859}{27}.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -30, а произведение $\frac{6859}{27}$.

Получим уравнение: $z^2 + 30z + \frac{6859}{27} = 0$, $27z^2 + 810z + 6859 = 0$

$D = 656100 - 740772 = -84672$, а значит квадратное уравнение не имеет решений.

Однако, исходное уравнение имеет три действительных корня 2, 3 и -5.

Методика решения такого типа уравнений рассматривается на множестве комплексных чисел и будет приведено ниже.

Задание 1

Решите уравнения:

1. $x^3 + 9x - 26 = 0$. **2**. $x^3 + 24x - 56 = 0$. **3**. $x^3 + 45x - 98 = 0$.
4. $x^3 + 18x + 15 = 0$. **5**. $x^3 - 4x - 1 = 0$. **6**. $x^3 - 4x + 2 = 0$

10.2. Полные кубические уравнения

Полное кубическое (кубичное) уравнение вида

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

легко приводится к трёхчленному кубическому уравнению $y^3 + py + q = 0$ подстановкой $x = y - \frac{a}{3}$.

Покажем это

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0, \quad y^3 - 3\cdot y^2\cdot\frac{a}{3} + 3\cdot y\cdot\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} +$$

$$+a\cdot y^2-2\cdot a\cdot\frac{a}{3}\cdot y+\frac{a^3}{9}+b\cdot y-\frac{b\cdot a}{3}+c=0,$$

$$y^3-a\cdot y^2+\frac{a^2}{3}\cdot y-\frac{a^3}{27}+a\cdot y^2-\frac{2a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0,$$

$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\cdot y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$. Положим $b-\frac{a^2}{3}=p,\ \frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=q$, получим трёхчленное кубическое уравнение $y^3+py+q=0$.

Пример 1. Решите уравнение $x^3+3x^2-3x-14=0$.

Решение

Положим $x=y-\frac{3}{3},\ \ x=y-1$, получим $(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-14=0$,

$y^3-3y^2+3y-1+3y^2-6y+3-3y+3-14=0,\ \ y^3-6y-9=0$.

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-6\cdot(\alpha+\beta)-9=0$$

или

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-6)\cdot(\alpha+\beta)-9=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta-6=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3-9=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=9.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=6,\ \ \alpha\cdot\beta=2,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=8.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 9, а произведение 8.

Получим уравнение: $z^2-9z+8=0$, $z_1=1,\ \ z_2=8$;

$$\begin{cases}\alpha^3=1,\\ \beta^3=8,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1,\\ \beta=2.\end{cases}$$

Тогда $y=\alpha+\beta,\ \ y_1=1+2=3$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y-3$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	-6	-9	3
1	$3\cdot1+0=3$	$3\cdot3-6=3$	$3\cdot3-9=0$	

Уравнение примет вид: $(y+3)(y^2+3y+3)=0$. Уравнение $y^2+3y+3=0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $y=3$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y-1,\ \ x=3-1=2$. Оно также имеет один действительный корень.

Ответ: $x=2$.

Пример 2. Решите уравнение $x^3+9x^2+18x+28=0$.

Решение

Положим $x=y-3$, получим $(y-3)^3+9(y-3)^2+18(y-3)+28=0$,

$y^3-9y^2+27y-27+9y^2-54y+81+18y-54+28=0$,

$$y^3-9y+28=0.$$

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-9\cdot(\alpha+\beta)+28=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-9)\cdot(\alpha+\beta)+28=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta-9=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+28=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=-28.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-9=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=9,\ \ \alpha\cdot\beta=3,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=27.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -28, а произведение 27.

Получим уравнение: $z^2+28z+27=0$, $z_1=-27,\ \ z_2=-1$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-27,\\ \beta^3=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3,\\ \beta=-1.\end{cases}$$

Тогда $y=\alpha+\beta,\ \ y_1=-3-1=-4$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y+4$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	-9	28	-4
1	$-4\cdot1+0=-4$	$-4\cdot(-4)-9=7$	$-4\cdot7+28=0$	

Уравнение примет вид: $(y+4)(y^2-4y+7)=0$. Уравнение $y^2-4y+7=0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $y=-4$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y-3,\ \ x=-4-3=-7$. Оно также имеет один действительный корень.

Ответ: $x=-7$.

Пример 3. Решите уравнение $x^3+6x^2+30x+25=0$.

Решение

Положим $x=y-2$, получим $(y-2)^3+6(y-2)^2+30(y-2)+25=0$,

$y^3-6y^2+12y-8+6y^2-24y+24+30y-60+25=0,\ \ y^3+18y-19=0$.

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+18\cdot(\alpha+\beta)-19=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+18)\cdot(\alpha+\beta)-19=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+18=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3-19=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=19.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+18=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-18,\ \ \alpha\cdot\beta=-6,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=-216.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 19 а произведение -216.

Получим уравнение: $z^2-19z-216=0$, $z_1=-8,\ \ z_2=27$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-8,\\ \beta^3=27,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2,\\ \beta=3.\end{cases}$$

Тогда $y=\alpha+\beta,\ \ y_1=-2+3=1$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y-1$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	18	-19	1
1	$1\cdot1+0=1$	$1\cdot1+18=19$	$1\cdot19-19=0$	

Уравнение примет вид: $(y-1)(y^2+y+19)=0$. Уравнение $y^2+y+19=0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $y=1$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y-2,\ \ x=1-2=-1$. Оно также имеет один действительный корень.

Ответ: $x=-1$.

Пример 4. Решите уравнение $x^3-3x^2-3x+11=0$.

Решение

Положим $x=y+1$, получим $(y+1)^3-3(y+1)^2-3(y+1)+11=0$,

$y^3+3y^2+3y+1-3y^2-6y-3-3y-3+11=0,\ \ y^3-6y+6=0$.

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-6\cdot(\alpha+\beta)+6=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-6)\cdot(\alpha+\beta)+6=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta-6=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+6=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=-6.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=6,\ \ \alpha\cdot\beta=2,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=8.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -6 а произведение 8.

Получим уравнение: $z^2+6z+8=0$, $z_1=-2,\ \ z_2=-4$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-2,\\ \beta^3=-4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\sqrt[3]{2},\\ \beta=-\sqrt[3]{4}.\end{cases}$$

Тогда $y=\alpha+\beta,\ \ y_1=-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	-6	6 $\quad -\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$
1	$-1\cdot(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+0=-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2-6$	$-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3+6\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+6=0$

Уравнение примет вид: $\left(y+\left(3\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\right)\right)\left(y^2-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)y+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2-6\right)=0$.

Уравнение $y^2-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)y+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2-6=0$ не имеет действительных корней, поскольку его дискриминант отрицателен.

Получим один корень: $y=-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y+1,\ \ x=1-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$. Оно также имеет один действительный корень.

Ответ: $x=1-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$.

Пример 5. Решите уравнение $x^3+3x^2-3x-1=0$.

Решение

Положим $x=y-1$, получим $(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-1=0$,

$y^3-3y^2+3y-1+3y^2-6y+3-3y+3-1=0,\ \ y^3-6y+4=0$.

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-6\cdot(\alpha+\beta)+4=0$$

или

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-6)\cdot(\alpha+\beta)+4=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta-6=0$, и поэтому получаем: $\alpha^3+\beta^3+4=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=-4$.

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=6,\ \ \alpha\cdot\beta=2,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=8.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -4 а произведение 8.

Получим уравнение: $z^2+4z+8=0$. Полученное квадратное уравнение не имеет корней на множестве действительных чисел, значит такой метод к решению данного уравнения не применим.

Хотя, совершенно очевидно, что х = 1 является корнем данного уравнения, ибо сумма его коэффициентов равна нулю.

Разделим многочлен x^3+3x^2-3x-1 на х - 1 по схеме Горнера:

1	3	-3	-1	1
1	$1\cdot1+3=4$	$4\cdot1-3=1$	$1\cdot1-1=0$	

Получаем следующее уравнение: $(x-1)(x^2+4x+1)=0$.

Квадратное уравнение $x^2+4x+1=0$ имеет два корня:

$$x_2=-2-\sqrt{3},\ \ x_3=-2+\sqrt{3}.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-2-\sqrt{3}$, $x_3=-2+\sqrt{3}$.

Пример 6. Решите уравнение $x^3-6x^2+57x-196=0$.

Решение

Положим $x=y+2$, получим $(y+2)^3-6(y+2)^2+57(y+2)-196=0$,
$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+57y+114-196=0,\ \ y^3+45y-98=0$.

Положим $y=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+45\cdot(\alpha+\beta)-98=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+45)\cdot(\alpha+\beta)-98=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+45=0$, и поэтому получаем: $\alpha^3+\beta^3-98=0,\ \ \alpha^3+\beta^3=98$.

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+45=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-45,\ \ \alpha\cdot\beta=-15,\ \ \alpha^3\cdot\beta^3=-3375.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 98 а произведение -3375.

Получим уравнение $z^2-98z-3375=0$. Оно имеет корни $z_1=-27,\ \ z_2=125$.

$$\begin{cases}\alpha^3=-27,\\ \beta^3=125,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3,\\ \beta=5.\end{cases}$$

Тогда $y=\alpha+\beta,\ \ y_1=-3+5=2$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y-2$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	45	-98	2
1	$1\cdot2+0=2$	$2\cdot2+45=49$	$2\cdot49-98=0$	

Уравнение примет вид: $(y-2)(y^2+2y+49)=0$. Уравнение $y^2+2y+49=0$ не имеет действительных корней.

Получим один корень: $y=2$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y+2,\ \ x=2+2=4$. Оно также имеет один действительный корень.

Ответ: $x=4$.

Пример 7. Решите уравнение $27x^3+9x^2-48x+20=0$.

Решение

Преобразуем уравнение, разделив обе его части на коэффициент при x^3, т. е. на 27, получим уравнение: $x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{27} = 0$.

Положим $x = y - \frac{1}{9}$, получим $\left(y - \frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{3}\cdot\left(y - \frac{1}{9}\right)^2 - \frac{16}{9}\cdot\left(y - \frac{1}{9}\right) + \frac{20}{27} = 0$,

$y^3 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{27}y - \frac{1}{729} + \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{27}y + \frac{1}{243} - \frac{16}{9}y + \frac{16}{81} + \frac{20}{27} = 0$,

$y^3 - \frac{49}{27}y + \frac{686}{729} = 0$, $y^3 - 3\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot y + 2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3 = 0$.

Положим $y = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha + \beta)^3 - \frac{49}{27}\cdot(\alpha + \beta) + \frac{686}{729} = 0$$

или

$$\alpha^3 + \beta^3 + \left(3\alpha\cdot\beta - \frac{49}{27}\right)\cdot(\alpha + \beta) + \frac{686}{729} = 0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta - \frac{49}{27} = 0$, и поэтому получаем: $\alpha^3 + \beta^3 + \frac{686}{729} = 0,\ \ \alpha^3 + \beta^3 = -\frac{686}{729}$.

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta - \frac{49}{27} = 0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta = \frac{49}{27},\ \ \alpha\cdot\beta = \frac{49}{81},\ \ \alpha^3\cdot\beta^3 = \left(\frac{7}{9}\right)^6.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна $-\frac{686}{729} = -2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3$ а произведение $\left(\frac{7}{9}\right)^6$.

Получим уравнение $z^2 + 2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot z + \left(\frac{7}{9}\right)^6 = 0$ или $\left(z + \left(\frac{7}{9}\right)^3\right)^2 = 0$

Оно имеет корни $z_1 = z_2 = -\left(\frac{7}{9}\right)^3$.

$$\begin{cases} \alpha^3 = -\left(\frac{7}{9}\right)^3, \\ \beta^3 = -\left(\frac{7}{9}\right)^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{7}{9}, \\ \beta = -\frac{7}{9}. \end{cases}$$

Тогда $y = \alpha + \beta,\ \ y = -\frac{7}{9} - \frac{7}{9} = -\frac{14}{9}$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $y+\frac{14}{9}$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	$-3\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2$	$2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3$	$-\frac{14}{9}$
1	$1\cdot\left(-\frac{14}{9}\right)+0=-\frac{14}{9}$	$4\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2-3\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2=\left(\frac{7}{9}\right)^2$	$-2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3+2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3=0$	

Уравнение примет вид: $\left(y+\frac{14}{9}\right)\cdot\left(y^2-2\cdot\frac{7}{9}y+\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)=0$.

Уравнение $y^2-2\cdot\frac{7}{9}y+\left(\frac{7}{9}\right)^2=0,\ \left(y-\frac{7}{9}\right)^2=0$ имеет два равных действительных корня $y_2=y_3=\frac{7}{9}$.

Получим корни: $y_1=-\frac{14}{9}$, $y_2=y_3=\frac{7}{9}$. Найдем решение данного кубического уравнения: $x=y-\frac{1}{9}$, $x_1=-\frac{14}{9}-\frac{1}{9}=-\frac{5}{3}$, $x_2=x_3=\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1=-\frac{5}{3}$, $x_2=x_3=\frac{2}{3}$.

Задание 2

Решите уравнение.

1. $x^3-6x^2-39x-10=0$; **2**. $x^3+x^2-20x-50=0$; **3**. $x^3-2x^2-3x+10=0$;
4. $x^3-3\sqrt{3}x^2+7x-\sqrt{3}=0$; **5**. $2x^3-5x^2+6x-2=0$; **6**. $6x^3-3x^2-2x+1=0$;
7. $12x^3+4x^2-17x+6=0$; **8**. $8x^3+4x^2-34x+15=0$.

11. Для любителей и знатоков

11.1. Решение кубических уравнений по формуле Кардано

Мы познакомились с решением трехчленных кубических уравнений по формуле Кардано, затем решали уравнения, степени выше второй, используя различные частные методы. Но существует метод решения кубических уравнений с любыми комплексными коэффициентами по формуле, когда корни выражаются через коэффициенты уравнения.

Пусть дано кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) **с любыми комплексными коэффициентами.**

Решение

Заменим в уравнении (1) переменную x новым неизвестным y: $x = y - \frac{a}{3}$, получим уравнение:

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y-\frac{a}{3}\right) + c = 0,\quad y^3 - y^2a + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} +$$

$$+ by - \frac{ab}{3} + 3 = 0,\quad y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\cdot y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + 3 = 0.$$

Положим $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + 3,$ получим трехчленное кубическое уравнение вида: $y^3 + py + q = 0$ (2).

Мы уже знаем, что последнее уравнение решается по формуле Кардано:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad (1')$$

$$y_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (2)$$

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 + \beta_1, \\ y_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 \\ y_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{a}{3}, \\ x_2 = y_2 - \frac{a}{3}, \\ x_3 = y_3 - \frac{a}{3}. \end{cases} \qquad (3)$$

11.2. Кубические уравнения с действительными коэффициентами

Если коэффициенты неполного кубического уравнения $x^3 + px + qx = 0$ (**4**) - действительные числа, то основную роль играет знак выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, стоящего в формуле Кардано под знаком квадратного корня.

Знак этого выражения противоположен знаку выражения

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right),$$

которое называется дискриминантом неполного кубического уравнения. В дальнейших рассуждениях используется и указывается знак именно этого дискриминанта.

1. Пусть D < 0. В этом случае в формуле Кардано под знаком каждого из квадратных корней стоит положительное число, а поэтому под знаком каждого из кубических корней оказываются действительные числа. Кубический корень из действительного числа имеет одно действительное значение и два сопряженных комплексных корня. Пусть α_1 будет действительное значение корня α; тогда значение β_1 радикала β, соответствующее α_1 на основании формулы $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$, также будет действительным ввиду действительности числа p.

Таким образом, корень $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ уравнения (**4**) оказывается действительным. Два других корня мы найдем, заменяя в формулах (**3**) корни из единицы $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon^2 = \varepsilon_2$ из выражения (**5**):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \qquad (\mathbf{5})$$

$$x_2 = \alpha_1 \cdot \varepsilon + \beta_1 \cdot \varepsilon^2 = \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta_1 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2},$$

$$x_3 = \alpha_1 \cdot \varepsilon^2 + \beta_1 \cdot \varepsilon = \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta_1 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}.$$

Эти два корня оказываются ввиду действительности чисел α_1 и β_1 сопряженными комплексными числами, причём коэффициент при мнимой части отличен от нуля, так как $\alpha_1 \neq \beta_1$, - эти числа являются значениями различных кубических корней.

Таким образом, ***если* D < 0**, ***то уравнение*** (**4**) ***имеет один действительный и два сопряжённых комплексных корня.***

2) Пусть D = 0. В этом случае

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Пусть α_1 будет действительное значение радикала α; тогда β также будет, ввиду равенства $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$, действительным числом, причем $\alpha_1 = \beta_1$. Заменяя в формулах (3) β_1 через α_1 и используя очевидное равенство $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, мы получим:

$$x_1 = 2\alpha_1, \quad x_2 = \alpha_1 \cdot \left(\varepsilon + \varepsilon^2\right) = -\alpha_1, \quad x_3 = \alpha_1 \cdot \left(\varepsilon^2 + \varepsilon\right) = -\alpha_1.$$

Таким образом, ***если* D = 0, то *все корни уравнения* (4) *действительны, причем два из них равны между собой..***

3) Пусть, наконец, D > 0. В этом случае в формуле Кардано под знаком квадратного корня стоит отрицательное действительное число, поэтому под знаками кубичных корней стоят сопряженные комплексные числа. Таким образом, все значения корней α и β будут теперь комплексными числами. Среди корней уравнения (4) должен, однако, содержаться хотя бы один действительный. Пусть это будет корень

$$x_1 = \alpha_0 + \beta_0 .$$

Так как действительны и сумма чисел α_0 и β_0, и их произведение, равное $-\frac{p}{3}$, то числа α_0 и β_0 сопряжены между собой как корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами. Но тогда сопряжены между собой и числа $\alpha_0 \cdot \varepsilon$ и $\beta_0 \cdot \varepsilon^2$, а также числа $\alpha_0 \cdot \varepsilon^2$ и $\beta_0 \cdot \varepsilon$, откуда следует, что корни уравнения (4)

$$x_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon + \beta_0 \cdot \varepsilon^2 ,\ \ x_3 = \alpha_0 \cdot \varepsilon^2 + \beta_0 \cdot \varepsilon$$

также будут действительными числами.

Мы получили, что все три корня уравнения (4) действительны, причем легко показать, что среди них нет равных. В самом деле, в противном случае выбор корня x_1 можно было бы осуществить так, чтобы имело место равенство $x_2 = x_3$ откуда

$$\alpha_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) = \beta_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2),$$

т. е. $\alpha_0 = \beta_0$, что явно невозможно.

Таким образом, ***если* D > 0, *то уравнение* (4) *имеет три различных действительных корня.***

Рассмотренный сейчас последний случай показывает, что практическое значение формулы Кардано весьма невелико. В самом деле, хотя при D > 0 все корни уравнения (4) с действительными коэффициентами являются действительными числами, однако разыскание их по формуле Кардано требует извлечения кубичных корней из комплексных чисел, что мы умеем делать лишь переходом к тригонометрической форме этих чисел. ***Поэтому запись корней с помощью корней теряет практическое значение*. При помощи методов, выходящих за рамки этой главы, можно было бы доказать, что в рассматриваемом случае корни уравнения (4) вообще никаким способом не могут быть выражены через коэффициенты при помощи корней с действительными подкоренными выражениям**и. Этот случай решения уравнения (4) называется ***неприводимым*** (не смешивать с неприводимостью многочленов!).

Пример 1. Решите уравнение по формуле Кардано

$$x^3-6x^2+57x-196=0.$$

Решение

Положим $x=y+2$, получим $(y+2)^3-6(y+2)^2+57(y+2)-196=0$,

$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+57y+114-196=0,\quad y^3+45y-98=0$.

Здесь $p=45,\quad q=-98$, поэтому

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(-98)^2}{4}+\frac{45^3}{27}=2401+3375=5776>0,$$

$D=-108\cdot 5776<0$ - уравнение имеет один действительный и два сопряжённых комплексных корня.

По формулам (1')

$$\alpha_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad \beta_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

находим $\alpha_1=\sqrt[3]{49+\sqrt{5776}}=\sqrt[3]{125}=5$, $\beta_1=\sqrt[3]{49-76}=\sqrt[3]{-27}=-3$, $x_1=5-3=2$.

Два других корня найдём по формулам

$$x_2=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{2},\ x_3=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}$$

$$x_2=-\frac{2}{2}+i\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{5+3}{2}=-1+4\sqrt{3}\cdot i,\quad x_3=-1-4\sqrt{3}\cdot i$$

Ответ: $x_1=2,\quad x_{2,3}=-1\pm 4\sqrt{3}\cdot i$.

Пример 2. Решите уравнение по формуле Кардано

$$27x^3+9x^2-48x+20=0.$$

Решение

Преобразуем уравнение, разделив обе его части на коэффициент при x^3, т. е. на 27, получим уравнение: $x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{27}=0$.

Положим $x=y-\frac{1}{9}$, получим $\left(y-\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(y-\frac{1}{9}\right)^2-\frac{16}{9}\cdot\left(y-\frac{1}{9}\right)+\frac{20}{27}=0$,

$y^3-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{27}y-\frac{1}{729}+\frac{1}{3}y^2-\frac{2}{27}y+\frac{1}{243}-\frac{16}{9}y+\frac{16}{81}+\frac{20}{27}=0$,

$y^3-\frac{49}{27}y+\frac{686}{729}=0$, $y^3-3\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot y+2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3=0$.

Здесь $p=-3\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2,\quad q=2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3$, поэтому

$$\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=\left(\frac{7}{9}\right)^6-\left(\frac{7}{9}\right)^6=0,$$

$D=0$ - уравнение имеет три действительных корня, причём два из них равны между собой.

По формуле

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad \alpha_1 = -\frac{7}{9},$$

находим $x_1 = 2\alpha_1 = -\frac{14}{9}, \quad x_2 = x_3 = -\alpha_1 = \frac{7}{9}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{14}{9}, \quad x_2 = x_3 = \frac{7}{9}$.

Пример 3. Решить уравнение, применяя формулу Кардано

$$x^3 - 6x^2 - 39x - 10 = 0.$$

Решение

Подстановка $x = y + 2$ приводит это уравнение к виду

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 39(y+2) - 10 = 0,$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 39y - 78 - 10 = 0, \quad y^3 - 51y - 104 = 0.$$

Здесь $p = -51, \quad q = -104$, поэтому

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{104^2}{4} - \frac{51^3}{27} = 2704 - 4913 = -2209 < 0,$$

$D = -108 \cdot (-2209) = 238572 > 0$ - уравнение имеет три различных действительных корня, но если оставаться в области действительных чисел, формула Кардано к этому уравнению не применима, хотя его корнями являются действительные числа $x_1 = 10, \quad x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $x_1 = 10, \quad x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Задание 1

Решите по формуле Кардано уравнения

1. $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$. **2**. $x^3 - 12x + 16 = 0$. **3**. $x^3 - 19x + 30 = 0$.
4. $x^3 - 2x^2 - 17x - 6 = 0$. **5**. $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$. **6**. $x^3 + 5x + 7 = 0$.

11.3. Уравнения четвертой степени

Решение уравнения четвертой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (\mathbf{6})$$

с произвольными комплексными коэффициентами сводится к решению некоторого вспомогательного кубичного уравнения. Осуществляется это методом, принадлежащим Феррари.

Предварительно уравнение (**6**) подстановкой $x = y - \frac{a}{4}$ приводится к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (\mathbf{7})$$

Затем левая часть этого уравнения следующим образом тождественно преобразуется при помощи вспомогательного параметра α:

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qy + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha y^2 - p\alpha$$

или

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0\,. \qquad (\mathbf{8})$$

Подберем теперь α так, чтобы многочлен, стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, т. е. должно иметь место равенство

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0\,. \qquad (\mathbf{9})$$

Равенство (**9**) является кубичным уравнением относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами. Это уравнение имеет, как мы знаем, три комплексных корня. Пусть α_0 будет один из них; он выражается ввиду формулы Кардано при помощи корней через коэффициенты уравнения (**9**), т. е. через коэффициенты уравнения (**7**),

При этом выборе значения для α многочлен, стоящий в квадратных скобках в (**8**), имеет двукратный корень $\frac{q}{4\alpha_0}$, и поэтому уравнение (**8**) принимает вид

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(y-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0,$$

т. е. оно распадается на два квадратных уравнения:

$$\begin{cases} y^2-\sqrt{2\alpha_0}\cdot y+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0+\dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0, \\ y^2-\sqrt{2\alpha_0}\cdot y+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0-\dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0. \end{cases} \qquad (\mathbf{10})$$

Так как от уравнения (**7**) к уравнениям (**10**) мы пришли при помощи тождественных преобразований, то корни уравнений (**10**) будут служить корнями и для уравнения (**7**). Легко видеть вместе с тем, что корни уравнения (**7**) выражаются через коэффициенты при помощи корни. Мы не будем выписывать соответствующих формул ввиду их громоздкости и практической бесполезности, не станем также исследовать отдельно случай, когда уравнение (**7**) имеет действительные коэффициенты.

Замечания об уравнениях высших степеней

В то время как методами решения квадратных уравнений владели еще древние греки, открытие изложенных выше методов решения уравнений третьей и четвертой степени относится к XVI веку. После этого почти три столетия продолжались безуспешные попытки сделать следующий шаг, т. е. найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени (т. е. уравнения пятой степени с буквенными коэффициентами) через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Абель в двадцатых годах прошлого века доказал, что такие формулы для уравнений n-й степени при любом $n \geq 5$ заведомо не могут быть найдены.

Этот результат Абеля не исключал, однако, возможности того, что корни всякого конкретного многочлена с числовыми коэффициентами все же каким-либо способом выражаются через коэффициенты при помощи некоторой комбинации радикалов, т. е., как принято говорить, что всякое уравнение разрешимо в радикалах. Полностью вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Галуа в тридцатых годах прошлого века. Оказалось, что для всякого n, начиная с n = 5, можно указать неразрешимые в радикалах уравнения n-й степени даже с целочисленными коэффициентами. Таким будет, например, уравнение

$$x^5-4x-2=0.$$

Исследования Галуа оказали решающее влияние на дальнейшее развитие алгебры.

Пример 1. Решите уравнение на множестве действительных чисел

$$x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0.$$

Решение

Поставим задачу привести это уравнение к виду $y^4 + py^2 + qy + r = 0.$

Для этого воспользуемся подстановкой $x = y - \frac{a}{4} = y - \frac{-2}{4} = y + \frac{1}{2}$, получим:

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y+\frac{1}{2}\right) - 8 = 0,$$

$$y^4 + 4y^3\frac{1}{2} + 6y^2\frac{1}{4} + 4y\frac{1}{8} + \frac{1}{16} - 2y^3 - 6y^2\frac{1}{2} - 6y\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{8} + 2y^2 + 2y + \frac{1}{2} + 4y + 2 - 8 = 0,$$

$$y^4 + 2y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} - 2y^3 - 3y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} + 2y^2 + 2y + \frac{1}{2} + 4y - 6 = 0,$$

$$y^4 + \frac{1}{2}y^2 + 5y - \frac{91}{16} = 0 \text{, откуда находим } p = \frac{1}{2},\ q = 5,\ r = -\frac{91}{16}.$$

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qy + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha y^2 - p\alpha,$$

$$\left(y^2 + \frac{1}{4} + \alpha\right)^2 + 5y - \frac{91}{16} - \frac{1}{16} - \alpha^2 - 2\alpha y^2 - \frac{1}{2}\alpha = 0$$

или

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0$$

$$\left(y^2 + \frac{1}{4} + \alpha\right)^2 - \left(2\alpha y^2 - 5y + \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{23}{4}\right)\right) = 0.$$

Подберем α так, чтобы квадратный трехчлен, стоящий в скобках, стал полным квадратом, чтобы затем получить разность квадратов двух выражений.

Для этого его дискриминант должен быть равен нулю

$$25 - 8\alpha\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{23}{4}\right) = 0,\quad 25 - 8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 46\alpha = 0,$$

$$8\alpha^3 + 4\alpha^2 + 46\alpha - 25 = 0,\quad \alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{23}{4}\alpha - \frac{25}{8} = 0.$$

Мы получили кубическое уравнение относительно α. Решение кубических уравнений по формуле Кардано нам уже известно.

Положим $\alpha = z - \frac{1}{6}$, тогда кубическое уравнение примет вид:

$$\left(z-\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{4}\left(z-\frac{1}{6}\right) - \frac{25}{8} = 0,$$

$$z^3 - 3z^2\cdot\frac{1}{6} + 3z\cdot\frac{1}{36} - \frac{1}{216} + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{72} + \frac{23}{4}z - \frac{23}{24} - \frac{25}{8} = 0,$$

$$z^3 + \frac{17}{3}z - \frac{110}{27} = 0.\quad p = \frac{17}{3},\quad q = -\frac{110}{27}.$$

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-110)^2}{4\cdot 27^2} + \frac{17^3}{27^2} = \frac{12100 + 19652}{2916} = \frac{98}{9},\quad \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{98}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{3},$$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{55}{27} - \frac{7\sqrt{2}}{3}} = \sqrt[3]{\frac{55 - 63\sqrt{2}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{55 - 63\sqrt{2}}}{3} = -1{,}081,$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt[3]{55 + 63\sqrt{2}}}{3} \approx 1{,}748, \; z = \alpha_1 + \beta_1 = \frac{\sqrt[3]{55 - 63\sqrt{2}} + \sqrt[3]{55 + 63\sqrt{2}}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\alpha = z - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\left(y^2 + \frac{1}{4} + \alpha\right)^2 - \left(2\alpha y^2 - 5y + \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{23}{4}\right)\right) = 0,$$

$$\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = 0, \; \left(y^2 + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(y^2 - \frac{5}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(y^2 - \frac{5}{2}\right)^2 = 0, \; \left(y^2 + \frac{3}{4} - y^2 + \frac{5}{2}\right)\left(y^2 + \frac{3}{4} + y^2 - \frac{5}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{13}{4}\left(2y^2 - \frac{7}{4}\right) = 0, \; y^2 = \frac{7}{8}, \; y_1 = -\frac{\sqrt{14}}{4}, \; y_2 = \frac{\sqrt{14}}{4},$$

$$x = y + \frac{1}{2}, \; x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{14}}{4}, \; x_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{4}.$$

Так как $x_1 = \frac{2 - \sqrt{14}}{4}$ и $x_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{4}$ корни данного уравнения, тогда многочлен $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ будет делиться на произведение

$\left(x - \frac{2 - \sqrt{14}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{2 + \sqrt{14}}{4}\right)$ или на $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{14}}{4}x - \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{14}}{4}x + \frac{4 - 14}{16} =$

$= x^2 - x - \frac{5}{8}.$

Разделим "уголком" $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ на $x^2 - x - \frac{5}{8}$

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 \quad x^2 - x - \frac{5}{8}$

$x^4 - x^3 - \frac{5}{8}x^2$

$-x^3 + \frac{21}{8}x^2 + 4x$

$-x^3 + x^2 + \frac{5}{8}x$

$\frac{13}{8}x^2 + \frac{27}{8}x - 8$

$\frac{13}{8}x^2 - \frac{13}{8}x - \frac{65}{64}$

Ответ: $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{14}}{4}, \quad x_2 = \dfrac{2+\sqrt{14}}{4}.$

Пример 2. Решите уравнение на множестве действительных чисел

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Решение

Поставим задачу привести это уравнение к виду $y^4 + py^2 + qy + r = 0.$

Для этого воспользуемся подстановкой $x = y - \dfrac{a}{4} = y - \dfrac{-4}{4} = y + 1,$ получим:

$$(y+1)^4 - 4(y+1)^3 + 3(y+1)^2 + 2(y+1) - 1 = 0,$$

$$y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 - 4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 + 3y^2 + 6y + 3 + 2y + 2 - 1 = 0,$$

$y^4 - 3y^2 + 0 \cdot y + 1 = 0$, откуда находим $p = -3$, $q = 0$, $r = 1$.

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qy + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha y^2 - p\alpha,$$

$$\left(y^2 - \frac{3}{2} + \alpha\right)^2 - \frac{5}{4} - \alpha^2 - 2\alpha y^2 + 3\alpha = 0$$

или

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0$$

$$\left(y^2 - \frac{3}{2} + \alpha\right)^2 - \left(2\alpha y^2 + 0 \cdot y + \left(\alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{4}\right)\right) = 0.$$

Подберем α так, чтобы квадратный трехчлен, стоящий в скобках, стал полным квадратом, чтобы затем получить разность квадратов двух выражений.

Для этого его дискриминант должен быть равен нулю

$$-8\alpha\left(\alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{4}\right) = 0, \quad -8\alpha^3 + 24\alpha^2 - 10\alpha = 0,$$

$$8\alpha^3 - 24\alpha^2 - 10\alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad 4\alpha^2 - 12\alpha - 5 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{12 - 3\sqrt{26}}{8}, \quad \alpha_3 = \frac{12 + 3\sqrt{26}}{8}.$$

Если $\alpha = 0$, тогда получим уравнение:

$\left(y^2 - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$ - это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$y^2 - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \ (1) \text{ или } y^2 - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \ (2)$$

Решим каждое из них:

(1) $y^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_1 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

(2) $y^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y_3 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

$x = y+1$, $x_1 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}+1$, $x_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}+1$,

$x_3 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+1$, $x_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+1$.

Если $\alpha = \frac{12-3\sqrt{26}}{8}$, тогда $\begin{cases} y^2 - \sqrt{2\alpha_0}\cdot y + \left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0, \\ y^2 - \sqrt{2\alpha_0}\cdot y + \left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0. \end{cases}$

Упражнения

Решите уравнения на множестве действительных чисел.

72. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0.$ **73.** $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0.$

74. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0.$ **75.** $2x^4-9x^3+9x+2=0.$

76. $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0.$

77. $12x^5+18x^4-45x^3-45x^2+18x+12=0.$

78. $6x^3-x^2-20x+12=0.$ **79.** $x^4+1=2(1+x)^4.$ **80.** $(x-2{,}5)^4+(x-1{,}5)^4=1.$

81. $27x^6+27x^5-117x^4+195x^2-75x-125=0.$ **82.** $x^3-19x-30=0.$

83. $x^3+x-2=0.$ **84.** $6x^4-13x^3-27x^2+40x-12=0.$ **85.** $9x^2+4x^3=1+12x^4.$

86. $x^5-6x^4+9x^3-6x^2+8x=0.$ **87.** $3x^7+x^6+3x^4+x^3+15x+5=0.$

88. $8x^7-6x^6-4x^4+3x^3+8x-6=0.$

89. $x^7+2x^5+4x^4-36x^3+32x^2-72x+48=0.$

90. $x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0.$ **91**. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0.$

92. $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10=0.$ **93**. $(x-1)x(x+1)(x+2)=24.$

94. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$

95. $(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2).$

96. $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5(2x^2+3x+2).$

97. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

98. $\frac{5(6-x)}{x-2}=\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}.$

99. $\frac{1}{2x+3}+\frac{21}{2x^3+3x^2-2x-3}=\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x^2+5x+3}.$

100. $\dfrac{10}{6x^2-x-12}+\dfrac{3}{3x+4}=\dfrac{7}{6x^2-x-12}+\dfrac{5x+9{,}4}{2x-3}$.

101. $\dfrac{4x^2+29x+45-(x+1)(2x+15)}{(2(x-1))^2-2(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x-1)(x-2)}$.

102. $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}+\dfrac{3}{x(x-3)}$.

103. $\dfrac{1}{x^2+7x}-\dfrac{1}{x^2+7x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+18}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0.$

104. $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0.$

105. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$. **106**. $\dfrac{2}{x^2+2x-2}+\dfrac{3}{x^2-2x+3}=\dfrac{x}{2}$.

107. $\dfrac{24}{x^2-2x}=\dfrac{12}{x^2-x}+x^2-x$. **108**. $\dfrac{3x^2-4a}{ax-a-3x+3}=\dfrac{3x}{a-3}-\dfrac{x}{x-1}$.

110. $\dfrac{x}{a^2-ab}+\dfrac{x}{ax-3a}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{a+3}{ax-3a-bx+3b}$.

111. $\dfrac{x}{a^2+ab}-\dfrac{x}{ax+3a}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{a+3}{ax+3a+bx+3b}$.

112. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-a^2-\dfrac{1}{a^2}=0.$ **113**. $\dfrac{10}{x^2-4ax}-\dfrac{8}{x^2-4ax+3a^2}-\dfrac{9}{x^2-4ax+4a^2}=0.$

114. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$ **115**. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

116. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0.$ **117**. $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$

118. $\dfrac{16}{x^3+3x^2-x+5}-\dfrac{5}{x^3+3x^2-x+2}=1.$

Решить аналитически и графически уравнения.

119. $\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}=2.$ **120**. $\left|\dfrac{3x-2}{x-1}\right|=2.$ **121**. $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+|x|}\right|=1.$

Ответы к заданиям и упражнениям

К заданию 1, стр. 15

Равносильны ли уравнения в поле действительных чисел?

№ **1**.

Ответ: не равносильны.

№ **2**.

Ответ: не равносильны.

№ **3**.

Ответ: уравнения равносильны.

№ **4**. (1)

Ответ: уравнения равносильны.

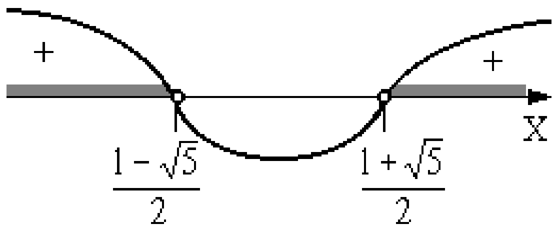
№ **5**. (1) $x^2 - x - 1 = 1$ и (2) $\lg(x^2 - x - 1) = \lg 1.$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения - множество всех действительных чисел: $M_1 = \{x| \quad x \in R\}.$

Область допустимых значений второго уравнения найдем из решения неравенства: $x^2 - x - 1 > 0,\ \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$

Последнее неравенство решим методом промежутков:



$$M_2 = \left\{x| \quad x \in \left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)\right\}.$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), область допустимых значений сузилась, значит возможна потеря корней.

Первое уравнение имеет два корня: $x^2 - x - 2 = 0,\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 2.$

Второе уравнение имеет один корень: $x = 2.$

Произошла потеря корня $x = -1 \in M_1 - M_2 = \left\{x| \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

Значит, уравнение не равносильны.

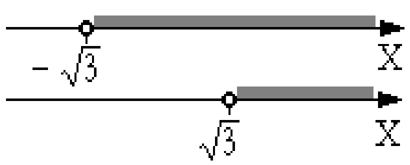
Ответ: не равносильны.

№ **6**. (1) $\lg\left(x+\sqrt{3}\right) + \lg\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$ и (2) $\lg\left(\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\right) = 0.$

Решение

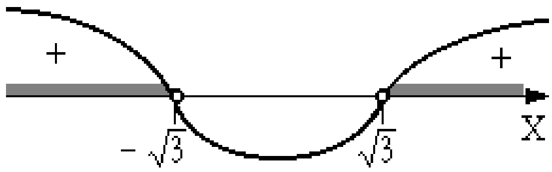
Область допустимых значений первого уравнения найдем из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x+\sqrt{3} > 0, \\ x-\sqrt{3} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\sqrt{3}, \\ x > \sqrt{3}, \end{cases}$$



$$M_1 = \left\{x| \quad x \in \left(\sqrt{3};\ \infty\right)\right\}.$$

Область допустимых значений второго уравнения найдем из решения неравенства $\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right) > 0$, которое решим методом промежутков:



$$M_2 = \left\{x \mid \; x \in \left(-\infty; \; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \; \infty\right)\right\}.$$

Область допустимых значений при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) расширилась, поэтому возможно появление посторонних корней.

Первое уравнение имеет один корень: $x = 2.$

Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$

Появился посторонний корень: $x = -2 \in M_2 - M_1 = \left\{x \mid \; x \in \left(-\infty; \; -\sqrt{3}\right)\right\}.$

Значит, уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

№ 7. (1) $3\lg(-x) = \lg x^2$ и (2) $-x^3 = x^2.$

Решение

Область допустимых значений первого уравнения - множество всех отрицательных действительных чисел: $-x > 0, \quad x < 0, \quad M_1 = \left\{x \mid \; x\left(-\infty; \; 0\right)\right\}.$

Область допустимых значений второго уравнения - множество всех действительных чисел: $M_2 = \left\{x \mid \; x \in R\right\}.$

Область допустимых значений при переходе от первого уравнения ко второму расширилась, значит возможно появление посторонних корней.

Первое уравнение имеет один корень: $x = -1.$

Второе уравнение имеет два корня: $x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$

Появился посторонний корень: $x = 0 \in M_2 - M_1 = \left\{x \mid \; x \in \left[0; \; \infty\right)\right\}.$

Значит, уравнения не равносильны.

Ответ: не равносильны.

Ответы к заданиям и упражнениям главы "Трехчленные уравнения"

Ответы к разделу 7 а "Трехчленные кубические уравнения"

К заданию 1

Пример 1. Решите уравнение $x^3 + 9x - 26 = 0$.

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+9\cdot(\alpha+\beta)-26=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+9)\cdot(\alpha+\beta)-26=0\,.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+9=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3-26=0,\;\;\alpha^3+\beta^3=26\,.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta-6=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-9,\;\;\alpha\cdot\beta=-3,\;\;\alpha^3\cdot\beta^3=-27\,.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 26, а произведение -27.

Получим уравнение: $z^2-26z-27=0,\;\;z_1=-1,\;\;z_2=27$

$$\begin{cases}\alpha^3=-1,\\ \beta^3=27,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1,\\ \beta=3.\end{cases}$$

$x_1=\alpha+\beta,\;\;x_1=-1+3=2\,.$

Разделим, по схеме Горнера, трёхчлен $x^3+9x-26$ на x - 2, получим:

1	0	9	-26	2
1	$2\cdot1+0=2$	$2\cdot2+9=13$	$2\cdot13-26=0$	

Уравнение примет вид: $(x-2)(x^2+2x+13)=0\,.$

Квадратное уравнение $x^2+2x+13=0$ действительных корней не имеет.
Уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: $x=2\,.$

Пример 2. Решите уравнение $x^3+24x-56=0\,.$

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+24\cdot(\alpha+\beta)-56=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+24)\cdot(\alpha+\beta)-56=0\,.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+24=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3-56=0,\;\;\alpha^3+\beta^3=56\,.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+24=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-24,\;\;\alpha\cdot\beta=-8,\;\;\alpha^3\cdot\beta^3=-512\,.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 56, а произведение -512.

Получим уравнение: $z^2-56z-512=0,\;\;z_1=-8,\;\;z_2=64$

$$\begin{cases}\alpha^3=-8,\\ \beta^3=64,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2,\\ \beta=4.\end{cases}$$

$x_1 = \alpha + \beta, \quad x_1 = -2 + 4 = 2$.

Разделим, по схеме Горнера, трёхчлен $x^3 + 24x - 56$ на x - 2, получим:

1	0	24	-56	2
1	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	$2 \cdot 2 + 24 = 28$	$2 \cdot 28 - 56 = 0$	

Уравнение примет вид: $(x-2)(x^2 + 2x + 28) = 0$.

Квадратное уравнение $x^2 + 2x + 28 = 0$ действительных корней не имеет.
Уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: $x = 2$.

Пример 3. Решите уравнение $x^3 + 45x - 98 = 0$.

Решение

Положим $x = \alpha + \beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha + \beta)^3 + 45 \cdot (\alpha + \beta) - 98 = 0$$

или

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha \cdot \beta + 45) \cdot (\alpha + \beta) - 98 = 0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha \cdot \beta + 45 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 - 98 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = 98.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha \cdot \beta + 24 = 0$ находим:

$$3\alpha \cdot \beta = -45, \quad \alpha \cdot \beta = -15, \quad \alpha^3 \cdot \beta^3 = -3375.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 98, а произведение -3375.

Получим уравнение: $z^2 - 98z - 3375 = 0, \quad z_1 = -27, \quad z_2 = 125$

$$\begin{cases} \alpha^3 = -27, \\ \beta^3 = 125, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3, \\ \beta = 5. \end{cases}$$

$x_1 = \alpha + \beta, \quad x_1 = -3 + 5 = 2$.

Разделим, по схеме Горнера, трёхчлен $x^3 + 45x - 98$ на x - 2, получим:

1	0	45	-98	2
1	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	$2 \cdot 2 + 45 = 49$	$2 \cdot 49 - 98 = 0$	

Уравнение примет вид: $(x-2)(x^2 + 2x + 49) = 0$.

Квадратное уравнение $x^2 + 2x + 49 = 0$ действительных корней не имеет.
Уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: $x = 2$.

Пример 4. Решите уравнение $x^3+18x+15=0$.

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3+18\cdot(\alpha+\beta)+15=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta+18)\cdot(\alpha+\beta)+15=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha\cdot\beta+18=0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3+\beta^3+15=0,\quad \alpha^3+\beta^3=-15.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha\cdot\beta+18=0$ находим:

$$3\alpha\cdot\beta=-18,\quad \alpha\cdot\beta=-6,\quad \alpha^3\cdot\beta^3=-216.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна -15, а произведение -216.

Получим уравнение: $z^2+15z-216=0$, $z_1=-24,\ \ z_2=9$;

$$\begin{cases}\alpha^3=-24,\\ \beta^3=9,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\sqrt[3]{3},\\ \beta=\sqrt[3]{9}.\end{cases}$$

Тогда $x=\alpha+\beta,\ \ x_1=\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$.

После того, как найден один из действительных корней, следует проверить, а не существуют ли другие действительные корни.

Для этого, применяя теорему Безу, устанавливаем, что кубический трёхчлен будет нацело делится на двучлен $x-\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)$. Выполним деление по схеме Горнера:

1	0	18	15	$\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$
1	$\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$	$(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3})^2+18$	$(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3})^3+18(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3})+15=0$	

Уравнение примет вид: $\left(x-\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)\right)\left(x^2+\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)x+18+\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{2}\right)^2\right)=0$.

Уравнение $x^2+\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)x+18+\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)^2=0$ не имеет действительных корней, т. к. его дискриминант отрицателен:

$$D=\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)^2-4\cdot\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)^2-72=-3\cdot\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}\right)^2-72<0.$$

Уравнение имеет один действительный корень: $x=\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $x=\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$.

Пример 5. Решите уравнение $x^3-4x-1=0$.

Решение

Положим $x=\alpha+\beta$ и подставим в уравнение, получим:

$$(\alpha+\beta)^3-4\cdot(\alpha+\beta)-1=0$$

или
$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\cdot\beta-4)\cdot(\alpha+\beta)-1=0.$$

Поскольку α и β выбраны произвольно, потребуем, чтобы $3\alpha \cdot \beta - 4 = 0$, и поэтому получаем:

$$\alpha^3 + \beta^3 - 1 = 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 = 1.$$

С другой стороны, из равенства $3\alpha \cdot \beta - 4 = 0$ находим:

$$3\alpha \cdot \beta = 4, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{4}{3}, \quad \alpha^3 \cdot \beta^3 = \frac{64}{27}.$$

Рассмотрим α^3 и β^3, как корни квадратного уравнения, сумма корней которого равна 1, а произведение $\frac{64}{27}$.

Получим уравнение: $z^2 - z + \frac{64}{27} = 0, \quad 27x^2 - 27x + 64 = 0$.

Последнее квадратное уравнение действительных корней не имеет. Поэтому, такой метод решения к данному кубическому трёхчленному уравнению не применим.

К заданию 3

1) $x^3 + 12x + 63 = 0;$ один корень: x = -3;
2) $x^3 + 18x + 15 = 0;$ один корень: x = -0,804415; примеры:
3) $x^3 + 9x - 26 = 0;$ один корень: x = 8; задание 4;
4) $x^3 - 6x + 4 = 0;$ три корня;
5) $x^3 + 6x + 2 = 0;$ один корень: x = -0,32748; упр.
6) $x^3 + 24x - 56 = 0;$ один корень: x = 2; упр.
7) $x^3 + 45x - 98 = 0;$ один корень: x = 2;
8) $x^3 - 4x - 1 = 0;$ три корня; примеры;
9) $x^3 - 4x + 2 = 0;$ три корня; задание 4;
10) $x^3 - 27x - 54 = 0;$ два корня: x = -6; x = 3;

Литература

1. С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, С. Г. Борчугова “Сборник задач по элементарной алгебре”, Москва “Просвещение”, 1973 г.

2. “Сборник задач по математике для поступающих в вузы”, под редакцией проф. А. И. Прилепко, Москва “Высшая школа”, 1982 г.

3. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов “Задачи вступительных экзаменов по математике”, Москва “Наука”, 1983 г.

4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин “Лекции и задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1971 г.

5. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов. и. Шварцбурд “Алгебра и математический анализ” для 11 класса, учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, Москва “Просвещение”, 1993 г.

6. “Пособие по математике для поступающих в вузы”, под ред. Г. Н. Яковлева, Москва “Наука”, 1985 г.

7. “Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы”, под редакцией М. И. Сканави, учебное пособие, 1994 г.

8. О. Н. Доброва “Задания по алгебре и математическому анализу”, Москва “Просвещение”, 1996 г.

9. В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин “Задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1965 г.

10. И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев “Факультативный курс по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

11. М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко “Математика для абитуриента”, Москва, НТЦ “Университетский”, 1994 г.

12. Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Пиварцбурд “Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа”, Москва “Просвещение”, 1990 г.

13. “Практикум абитуриента”. Алгебра и тригонометрия. Под ред. А. А. Егорова, приложение к журналу “Квант”, 3, 1995 г., Москва, 1995 г., бюро “Квантум”.

14. В. В. Зорин “Пособие по математике для поступающих в вузы”, Москва “Высшая школа”, 1965 г.

15. А. Я. Симонов, д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. “Система тренировочных задач и упражнений по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

16. Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго “Московские математические материалы”, под ред. А. Н. Колмогорова, Москва “Просвещение”, 1986 г.

17. Журналы “Квант”, 1/1972, 3/1975, 4/1975, 7/1976, 5/1987, 6/1987, 1/1990, 2/1991, 3/1991, 5/1991, 1/1995, 2/1995, 3/1995.

18. Журналы “Математика в школе”, 3/1991, 1/1992, 1, 2, 3, 4, 5, 6/1993.