C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\cos x=0, \\ \left(3\sqrt{\cos x}-1\right)(3y-2)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=\frac{2}{3}, \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ или $\cos x=\frac{1}{9}$.

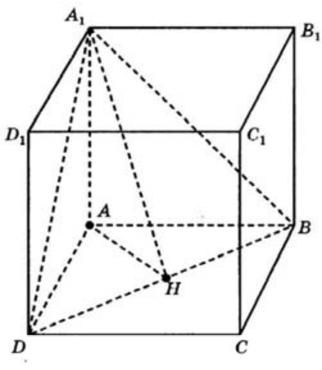
Если $y=\frac{2}{3}$, то из первого уравнения $\cos x=-\frac{2}{3}$. Это противоречит условию $\cos x \geq 0$.

Если $\cos x=\frac{1}{9}$, то $x=\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n;\ -\frac{1}{9}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=6$, $AD=8$, $CC_1=16$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

Решение.



Плоскости ABC и A_1DB имеют общую прямую BD. Проведем перпендикуляр AH к BD. По теореме о трех перпендикулярах $A_1H \perp BD$. Значит, угол A_1HA — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и A_1DB.

Из прямоугольного треугольника BAD находим: $AH=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$.

Из прямоугольного треугольника A_1AH находим:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA=\frac{AA_1}{AH}=\frac{16\cdot 5}{24}=\frac{10}{3}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{2^{x+7}} 4}{\log_{2^{x+7}}(-16x)} \le \frac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne -\dfrac{1}{16}, \\ x \ne -7, \\ x < 0. \end{cases}$

Пусть $t = \log_2(-x)$, тогда $\frac{2}{4+t} \le \frac{1}{t}$, откуда $t < -4$ или $0 < t \le 4$.

Значит, $-16 \le x < -1$ или $-\frac{1}{16} < x < 0$. Из полученных промежутков нужно исключить точку -7.

Ответ: $[-16; -7), (-7; -1), \left(-\frac{1}{16}; 0\right)$.

C4 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN = 1:2$. Найдите BC, если $AB=12$.

Решение.

Пусть E — точка пересечения биссектрис, $BM = x$, $MN = y$, $NC = z$.

Так как $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} < 1$, точка M лежит между точками B и N. Возможны два случая.

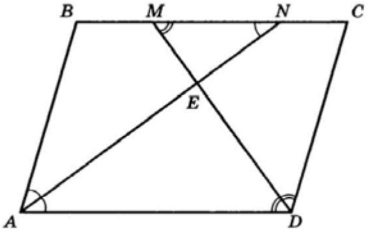


Рис. 1

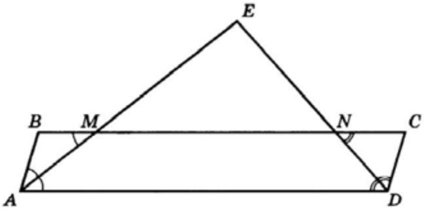


Рис. 2

1. Точка E — внутри параллелограмма (рис. 1). Треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x+y=12=y+z$, следовательно, $x=z<y$; $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, откуда, $y=8$, $z=x=4$, $BC=2x+y=16$.

2. Точка E — вне параллелограмма (рис. 2). Тогда $x=z=12$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, откуда $y = 24$, $BC=2x+y=48$. **Ответ:** 16 или 48.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|$ больше 1.

Решение.

При $x^2-4x+3\geq 0$ $\quad f(x)=x^2+2(a-2)x+3$, график функции состоит из двух частей парабол с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=2-a$;

При $x^2-4x+3<0$ $\quad f(x)=-x^2+2(a+2)x-3$, график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

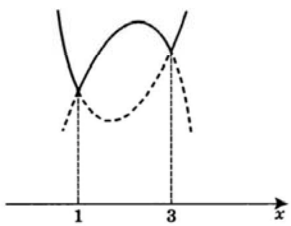


Рис. 1

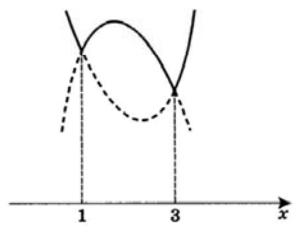


Рис. 2

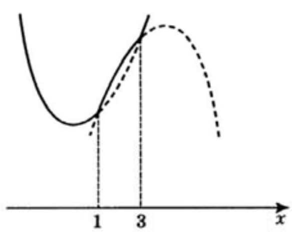


Рис. 3

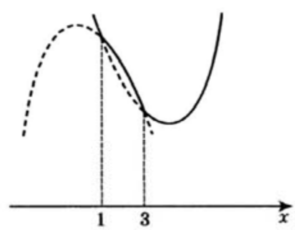


Рис. 4

Наименьшее значение функции $f(x)$ может быть только в точках $x=1$ или $x=3$, а если $2-a\notin[1;\,3]$ — то в точке $x=2-a$.

Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(3)>1, \\ f(2-a)>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a>1, \\ 6a>1, \\ 2a(2-a)+|a^2-1|>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{6}, \\ 2a^2-4a+1-|a^2-1|<0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 1, \\ a^2-4a+2<0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<1, \\ 3a^2-4a<0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 1, \\ 2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<1, \\ 0<a<\dfrac{4}{3}; \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\ 2+\sqrt{2}\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} 1\leq a<2+\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{2}<a<1; \end{array}\right. \qquad \frac{1}{2}<a<2+\sqrt{2}.$$

C6 Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма наибольшая и она равна

$$(5+\ldots+9)(12+\ldots+17)=\left(\frac{5+9}{2}\cdot 5\right)\cdot\left(\frac{12+17}{2}\cdot 6\right)=35\cdot 87=3045.$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(5+6+7-8-9)(12-13-14+15-16+17)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1 и 3045.