Иррациональные неравенства

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

В прошлом номере журнала была помещена статья о решении иррациональных уравнений. В данной статье те же идеи применяются для решения неравенств, содержащих квадратные радикалы; при этом появляются дополнительные трудности.

Дело в том, что нам придется, как и в случае иррациональных уравнений, избавляться от радикалов с помощью почленного возведения неравенства в квадрат. Но если при решении уравнений мы могли в результате этой операции получить посторонние корни, которые, как правило, легко проверить, и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в квадрат могут одновременно и теряться, и приобретаться.

Например, возведя в квадрат верное неравенство $-1 < 2$, мы получим верное неравенство $1 < 4$; из верного неравенства $-5 < 2$ получается уже неверное неравенство $25 < 4$; из неверного неравенство $1 < -2$ получим верное неравенство $1 < 4$; наконец, из неверного неравенства $5 < 2$ получается неверное неравенство $25 < 4$. Вы видите, что возможны все комбинации верных и неверных неравенств!

Однако верно основное используемое здесь утверждение: *если обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству, полученному из него почленным возведением в квадрат.*

Поскольку, в отличие от уравнений, где часто была возможна проверка найденных «кандидатов в ответ», при решении неравенств, как правило, бесконечно много решений и проверить их все принципиально невозможно, решая неравенства, надо тщательно следить за равносильностью всех переходов.

Простейшие неравенства

Так мы называем неравенства следующих трех типов:

1) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$; 2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$; 3) $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Нестрогие неравенства, аналогичные выписанным выше (со знаками $\le$ и $\ge$), мы будем относить к соответствующему типу – так, оба неравенства

$$\sqrt{5x+8} > \sqrt{4x^2-1} \text{ и } \sqrt{5x+8} \ge \sqrt{4x^2-1}$$

относятся к первому типу и т.п.

Поскольку обе части неравенства 1) неотрицательны, оно, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

(понятно, что неравенство $f(x) \ge 0$ выполняется при этом автоматически).

Рассуждая аналогично для остальных случаев, получим

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \qquad (1')$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2)$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2')$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) \le g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (3')$$

Мы видим, что самый громоздкий – второй случай. Это происходит из-за того, что здесь возможны оба варианта – когда правая часть, $g(x)$, неотрицательна и когда она меньше нуля. В первом варианте обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому его можно почленно возвести в квадрат, а во втором возводить в квадрат нельзя (правая часть меньше нуля), но в этом нет никакой необходимости – ведь тогда неотрицательная левая часть автоматически больше отрицательной правой.

Выписанные схемы (1) – (3′) – наш основной инструмент при окончании решения иррационального неравенства, к ним сводится решение практически любой такой задачи. Разберем несколько примеров.

Пример 1. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

Решение. Согласно схеме (1), данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \le \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5} < x \le \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{1-x^2-x}$.

Решение. Действуя по схеме (1′), приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 1-x^2-x, \\ 1-x^2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \ge 0, & (a) \\ x^2+x-1 \le 0. & (b) \end{cases}$$

Из неравенства (a):

$$x \le -3;\ x \ge 0,$$

из неравенства (b):

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

после чего без труда получаем ответ.

Ответ: $0 \le x \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Пример 3. *Решите неравенство* $\sqrt{x+2} > x$.

Решение. Действуем по схеме (2).

Если $x < 0$, данное неравенство выполняется при всех допустимых значениях неизвестного, т.е. при

$$x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2.$$

Таким образом, все $-2 \le x < 0$ – решения данного неравенства (это мы решили вторую систему из совокупности схемы (2)).

Если же $x \ge 0$, данное неравенство равносильно неравенству

$$x+2 > x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Таким образом, все $0 \le x < 2$ – также решения данного неравенства (это решения первой системы совокупности схемы (2)).

Объединяя полученные решения, найденные в обоих случаях, приходим к ответу.

Ответ: $-2 \le x < 2$.

Пример 4. *Решите неравенство* $\sqrt{x^2-3x+1} > x+1$.

Решение. Снова действуем по схеме (2). Если правая часть отрицательна, т.е. $x < -1$, подкоренное выражение положительно (как, очевидно, при всех отрицательных значениях переменной – ведь тогда оно состоит из трех положительных слагаемых), и данное неравенство выполняется. Таким образом, все $x < -1$ – решения данного неравенства. Пусть теперь $x \ge -1$. Тогда можно возвести данное неравенство в квадрат и получится равносильное данному неравенство $x < 0$. Таким образом, все $-1 \le x < 0$ – также решения данного неравенства.

Ответ: $x < 0$.

Пример 5. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \ge x+5$.

Решение. Применим схему (2′). Заметим, что при всех допустимых значениях x, т.е. при $x \ge -1$, правая часть данного неравенства положительна, так что вторая система схемы (2′) не имеет решений. Итак, в ОДЗ обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству $x+1 \ge x^2+10x+25$, не имеющему решений.

Ответ: нет решений.

Замечание. Другое решение этой задачи можно получить, сделав замену $t = \sqrt{x+1}$, т.е. $x = t^2-1$, где $t \ge 0$. Тогда данное неравенство приведется к квадратному неравенству $t \ge t^2+4$, не имеющему не только неотрицательных, а и вообще никаких решений.

Пример 6. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \ge 2x^2-x-1$.

Решение. Снова работает схема (2′). Разложим предварительно на множители правую часть. Неравенство примет вид

$$\sqrt{2x+1} \ge (2x+1)(x-1).\ (a)$$

Воспользуемся наличием в правой части неравенства (a) множителя, равного подкоренному выражению. Подкоренное выражение (и одновременно первый сомножитель правой части) неотрицательно, если $x \ge -0{,}5$; это и есть ОДЗ. Поэтому если $-0{,}5 \le x < 1$, неравенство (a) выполняется – неотрицательная левая часть больше отрицательной правой. Если же $x \ge 1$, после возведения обеих частей неравенства (a) в квадрат мы приходим к равносильному неравенству (a) соотношению $2x+1 \ge (2x+1)^2(x-1)^2$, которое при рассматриваемых ограничениях $x \ge 1$ равносильно неравенству

$$1 \ge (2x+1)\left(x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) \le 0.$$

Так как при $x \ge 1$ первый сомножитель левой части последнего неравенства положителен, получаем $2x-3 \le 0$. Итак, второй случай дает решения $1 \le x \le 1{,}5$.

Ответ: $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Пример 7. *Решите неравенство* $\sqrt{5x-4} < x$.

Решение. Воспользуемся схемой (3). Согласно ей, наша задача сводится к решению двойного неравенства $0 \le 5x-4 < x^2$ при условии $x > 0$. Таким образом, надо решить систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ 5x-4 \ge 0, \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ge \dfrac{4}{5}, \\ x < 1;\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{5};\,1\right) \cup (4;\,+\infty).$$

Ответ: $0{,}8 \le x < 1$; $x > 4$.

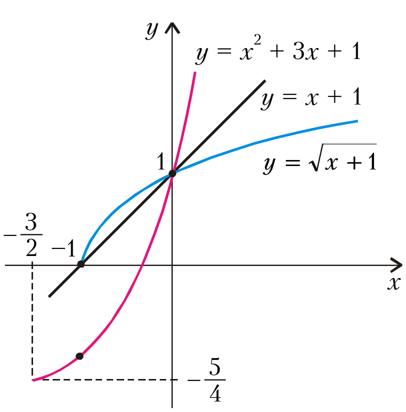
Пример 8. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \le x^2+3x+1$.

Прямое применение схемы $(3')$ приводит (после возведения данного неравенства в квадрат) к необходимости найти корни многочлена четвертой степени, причем легко подобрать лишь один его корень, $x = 0$ (он получится из-за взаимного уничтожения свободных членов, равных 1, в обеих частях полученного неравенства), а корни оставшегося кубического многочлена найти очень непросто – они не рациональны.

Решение. Заметим, что график левой части данного неравенства это верхняя ветвь параболы, ось симметрии которой – ось абсцисс, а вершина – точка $(-1;\,0)$; график правой части это парабола, ось которой параллельна оси ординат, а вершина – точка $\left(-\dfrac{3}{2};\,-\dfrac{5}{4}\right)$.

Воспользуемся теперь тем, что график левой части имеет «выпуклость вверх» (т.е. лежит выше любой своей хорды – отрезка, соединяющего любые две точки графика), а правая часть – «выпуклость вниз».

Мы уже установили, что графики левой и правой частей имеют общую точку с абсциссой, равной нулю. Поэтому становится очевидным, что луч с началом в точке $(-1;\,0)$, проходящий через точку $(0;\,1)$, разделяет два случая: левее общей точки график левой части выше графика правой, а правее – наоборот (это хорошо видно на рисунке).



В задаче требуется найти, при каких значениях переменной график левой части ниже графика правой. Это легко находится из рисунка.

Ответ: $[0;\,+\infty)$.

Упражнения. Решите неравенства.

1. $x < \sqrt{2-x}$. **2.** $x+1 > \sqrt{2+x}$. **3.** $x + \dfrac{9}{8} > \sqrt{x+1}$.

4. $2x-3 < 2\sqrt{x^2-9}$. **5.** $\sqrt{x^2+3} \ge \sqrt{3-x-2x^2}$.

6. $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$. **7.** $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$. **9.** $\sqrt{-x^2-4x}+x+1 > 0$.

10. $\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1 > 0$.

Более сложные неравенства

В этом разделе мы начнем решать более сложные задачи, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям – к простейшим неравенствам, рассмотренным выше. Приемы сведения во многом аналогичны применяемым при решении иррациональных уравнений.

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится возводить неравенство в квадрат дважды, конечно, обеспечивая при этом необходимые для проведения этой операции условия.

Пример 9. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

Первое решение. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и его можно было возвести в квадрат (не рассматривая при этом два случая):

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2}+2 \Leftrightarrow 2x+3 >$$

$$> x-2+4\sqrt{x-2}+4 \Leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}. \quad (*)$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству (см. схему (3) в первом разделе статьи):

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 16(x-2) < x^2+2x+1, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2-14x+33 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x < 3;\ x > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

Замечание. При получении неравенства $(*)$ мы не выписывали допустимые значения неизвестного, но в этом не было необходимости, так как там фигурировал $\sqrt{x-2}$, который существует при $x \ge 2$, но при этих значениях x существует и $\sqrt{2x+3}$.

Второе решение. Сделаем замену переменной: $t = \sqrt{x-2} \ge 0$. Тогда $x = t^2+2$, и данное неравенство приводится к стандартному виду $\sqrt{2t^2+7} > t+2$. Решив это неравенство по схеме (2), получим $0 \le t < 1$, $t > 3$. Остается сделать обратную замену и найти x.

Ответ: $x \in [2;\,3) \cup (11;\,+\infty)$.

Пример 10. *Решите неравенство* $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

Решение. Заметим, что для избавления от радикала достаточно возвести данное неравенство в квадрат. Но для этого необходима неотрицательность обеих его частей, что выполняется лишь при условии $x + 6 > 0$ (ведь все остальные выражения, входящие в неравенство, неотрицательны). Но при этом условии можно умножить данное неравенство на положительное выражение $x + 6$.

Итак, если $x > -6$, данное неравенство преобразуется и решается так:

$$\begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ \sqrt{x^2 - 25} < x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \le -5, \\ x \ge 5. \end{array} \right.$$

Если же $x < -6$, данное неравенство выполняется, так как его отрицательная левая часть меньше положительной правой.

Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\dfrac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$.

Решим еще одну задачу. Хотя новые идеи здесь не встречаются, важно не упустить многочисленные детали (ОДЗ, схемы и т.п.).

Пример 11. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}\,.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \ge 0, \\ x^2 - x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge -1. \end{array} \right.$$

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны, после возведения его в квадрат получим неравенство, равносильное ему в ОДЗ:

$$x^2 + 3x + 2 < 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Для последнего неравенства в ОДЗ работает схема (2):

$$2x < \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 4x^2 < x^2 - x + 1 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 3x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \\ x < 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{13} - 1}{6},$$

Осталось учесть ОДЗ и получить ответ.

Ответ: $x \le -2$; $-1 \le x < \dfrac{\sqrt{13} - 1}{6}$.

И в заключение этого раздела решим три более трудные задачи. Они предлагались на вступительных экзаменах в МГУ в 1975 году: первая – на отделении политической экономии экономического факультета, вторая – на геологическом факультете, третья – на отделении экономической кибернетики экономического факультета. Из приведенных решений можно увидеть, как важно владеть хорошей техникой вычислений и преобразований, а также находить удачную замену переменной.

Пример 12. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x + 1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x + 1)^2}{8}}\,.$$

Решение. Заметим сначала, что ОДЗ есть луч $x \ge 0{,}5$. Затем, поскольку подкоренное выражение в правой части данного неравенства можно записать как $2\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{x + 1}{4}\right)^2\right)$, удобно сделать замену переменной, причем ввести сразу две новые переменные:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} = u \ge 0, \quad \frac{x + 1}{4} = v\,.$$

Отметим, что в ОДЗ второе новое переменное, v, положительно. Данное неравенство после замены примет вид

$$u + v < \sqrt{2(u^2 + v^2)} \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 < 2(u^2 + v^2) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0 \Leftrightarrow u \ne v\,.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} \ne \frac{x + 1}{4}.$$

Решая полученное неравенство, находим

$$x \ne 7 \pm \sqrt{20}\,.$$

Ответ:

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 7 - 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 - 2\sqrt{10}; 7 + 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 + 2\sqrt{10}; +\infty\right).$$

Пример 13. *Решите неравенство*

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} > -\sqrt{x - 3} - 1 + \sqrt{-x + 5}\,.$$

Решение. Преобразовав данное неравенство к виду

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \sqrt{-x + 5} - \sqrt{x - 3}\,, \qquad (a)$$

мы добьемся, во-первых, того, что левая часть неравенства стала положительной, а во-вторых, если возвести последнее неравенство почленно в квадрат, то, поскольку в сумме подкоренных выражений правой части неизвестное уничтожится, получится неравенство, квадратное относительно $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)}$, — это и есть основная идея нашего решения. Теперь надо ее аккуратно осуществить.

Если правая часть неравенства (a) отрицательна, все допустимые значения неизвестного будут его решениями – положительная левая его часть будет больше отрицательной правой:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} < \sqrt{x - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ -x + 5 < x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \le 5\,.$$

Если же правая часть неравенства (a) неотрицательна, его можно в ОДЗ возвести почленно в квадрат и получить остальные решения:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} \ge \sqrt{x - 3}, \\ (x - 3)(-x + 5) + 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \\ > (-x + 5) - 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ (x - 3)(-x + 5) + 4\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} - 1 > 0. \end{cases} \qquad (b)$$

Решим отдельно второе неравенство системы (b), введя, как уже было сказано, обозначение $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} = t \ge 0$:

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ t^2 + 4t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t < -2 - \sqrt{5};\ t > -2 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow t > \sqrt{5} - 2\,.$$

Вернемся к старой переменной:

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} > \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow x^2-8x+24-4\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x < 4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Отметим, что первый равносильный переход в последней цепочке преобразований – то, что остается от (довольно громоздкой!) схемы (2), если в ней $g(x)$ просто положительное число.

Для того чтобы решить систему (b) и получить ответ, надо заметить, что решения ее второго неравенства – интервал с центром в точке 4 радиуса $r = 2\sqrt{\sqrt{5}-2}$, поэтому осталось только сравнить числа 3 и $(4-r)$. Делаем это следующим образом: подставляем $x=3$ в квадратный трехчлен, фигурировавший в последнем решенном нами неравенстве:

$$3^2-8\cdot 3+24-4\sqrt{5} = 9-4\sqrt{5} = \sqrt{81}-\sqrt{80} > 0.$$

Итак, число 3 расположено вне интервала корней квадратного трехчлена, поэтому оно меньше меньшего корня трехчлена, и мы можем завершить решение системы (b):

$$4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 4.$$

Учитывая найденные ранее другие решения данного неравенства, получаем ответ.

Ответ: $4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 5$.

Пример 14. *Решите неравенство* $\sqrt{9-\frac{9}{x}} < x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства: $-3 \le x < 0$; $x \ge 3$.

Заметим, во-первых, что при $x < 0$ данное неравенство не имеет решений: его неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательной правой. Поэтому осталось решить данное неравенство при $x \ge 3$.

Во-вторых, при $x \ge 3$ правая часть данного неравенства положительна: от числа, большего или равного 3, отнимается число, меньшее $\sqrt{3}$. Поэтому обе части данного неравенства в этом случае неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$9-\frac{9}{x} < x^2-2x\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x-\frac{9}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(x^2-9\right)-2x\sqrt{\frac{x^2-9}{x}}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)-2\sqrt{\left(x^2-9\right)x}+x > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x}\right)^2 > 0.$$

Последнее неравенство при наших ограничениях равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge 3, \\ \sqrt{x^2-9} \ne \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x \ne \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Это и есть ответ.

Ответ: $x \in \left[3; \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$.

Упражнения. Решите неравенства.

11. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x} > 1$. **12.** $\sqrt{2-x}-\sqrt{x} < 1$.

13. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

16. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

17. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+x} > 3$.

18. $\sqrt{x-1}+x-3 \ge \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$.

19. $\sqrt{x+7}-1 < \sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$.

20. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

Домножим на сопряженное

Напомним, что выражения $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ и $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ называются сопряженными друг другу. Нам понадобится хорошо известное свойство этих выражений: их произведение $\alpha^2 a-\beta^2 b$ уже не содержит корней из a и b. Поэтому в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

Пример 15. *Решите неравенство*

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3} < 2x-1.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+1 \ge 0, \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{5}.$$

Домножим обе части данного неравенства на выражение, сопряженное его левой части и, очевидно, положительное в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right).$$

Дальнейшее решение зависит, очевидно, от знака общего множителя $(2x-1)$ левой и правой частей полученного неравенства.

Если он меньше нуля, т.е. $-\frac{1}{5} \le x < \frac{1}{2}$, сократив на этот отрицательный множитель, приходим к неравенству $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} < 2$, из которого находим (например, с помощью подстановки $\sqrt{x+3} = t \ge 0$ или прямым возведением в квадрат – ведь обе части этого неравенства положительны) $-\frac{1}{5} \le x < \frac{4-\sqrt{19}}{2}$ (обязательно проделайте все выкладки и убедитесь в правильности этого ответа).

Во втором случае, если общий множитель положителен, т.е. при $x > \frac{1}{2}$, после сокращения на него получаем неравенство $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > 2$, справедливое при всех этих значениях x: ведь тогда верны оценки

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > \sqrt{\frac{5}{2}+1}+\sqrt{\frac{1}{2}+3} = \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}} > 1+1 = 2.$$

Осталось указать, что в третьем возможном случае — если общий множитель равен нулю, — неравенство не выполняется: мы получаем тогда $0 > 0$, что неверно.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Замечание. Конечно, примененный способ привел к успеху из-за того, что разность подкоренных выражений оказалась кратной правой части данного неравенства. Это обстоятельство можно считать признаком, по которому можно оценивать целесообразность применения такого приема.

Вы, возможно, заметили, что последний пример получен из примера 9 нашей статьи «Иррациональные уравнения» (см. «Квант» №5 за 2001 г.) заменой знака равенства на знак неравенства. Ниже помещено несколько упражнений, часть из них получена тем же способом. Вы можете аналогично использовать и остальные задачи соответствующего раздела указанной статьи.

Упражнения. Решите неравенства.

21. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$. **22.** $\sqrt{3x}-\sqrt{1+x}<1-2x$.

23. $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x}>\dfrac{2x^2-x-1}{2}$.

24. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}>\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

Использование некоторых свойств функций

Начнем с примера.

Пример 16. *Решите неравенство* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}<6$.

Решение. Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая функция (этот достаточно очевидный факт в случае необходимости, например на экзамене, легко доказать). Угадав, при каком значении x левая часть равна правой (конечно, при $x=5$), и учтя ОДЗ исходного неравенства ($x\ge 1$), можно записать ответ.

Ответ: $1\le x<5$.

Мы не выписали подробно рассуждение, которое привело к ответу: поскольку левая часть – возрастающая функция (обозначим ее через $f(x)$), при $1\le x<5$ имеем $f(5)<f(x)=$ $=6$, т.е. данное неравенство выполняется, а при $x\ge 5$ по той же причине (из-за возрастания функции) $f(5)\le f(x)$, т.е. данное неравенство не выполняется; так как исследование проведено при всех допустимых значениях x, решение закончено.

Рассуждая аналогично, можно выписать общее применяемое в этих случаях утверждение:

Пусть на промежутке $(a;\ b)$ задана возрастающая функция $y=f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)<c$ (или $f(x)>c$). Если x_0 – корень уравнения $f(x)=c$, причем $a<$ $<x_0<b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a;x_0)$ (соответственно, промежуток $(x_0;b)$). (Единственность корня следует из монотонности функции f.) Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или на полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Пример 17. *Решите неравенство*

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}\,.$$

Решение. Найдем допустимые значения переменного:

$$\begin{cases} x-2\ge 0,\\ x-3\ge 0,\\ 2-\sqrt[4]{x}\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 3\le x\le 16.$$

Левая часть данного неравенства (обозначим ее через $f(x)$) — возрастающая функция, правая (назовем ее $g(x)$) – убывающая. При $x=3$ имеем

$$f(3)=1>g(3)=\sqrt{2-\sqrt[4]{3}}\,,$$

т.е. данное неравенство выполняется. Но при увеличении x левая часть становится (в силу возрастания) еще больше, а правая (из-за убывания) – еще меньше, т.е. неравенство между соответствующими значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ сохранится.

Ответ: $3\le x\le 16$.

В примере 17 мы встретились с новой ситуацией: надо было на промежутке $[a;\ b]$ решить неравенство $f(x)>g(x)$, где левая часть возрастала, а правая убывала. Мы выяснили, что на левом конце промежутка неравенство выполняется, и сделали вывод, что тогда оно выполняется и на всем промежутке. В несколько более общей ситуации можно сформулировать такое обобщение нашего стандартного рассуждения:

Пусть на промежутке $(a;\ b)$ заданы возрастающая функция $y=f(x)$ и убывающая функция $y=g(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)>g(x)$. Если x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, лежащий на рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка $(x_0;b)$.

Упражнение 25. а) Докажите утверждение, сформулированное в предыдущем абзаце текста.

б) Рассмотрите различные варианты знаков неравенства (строгих и нестрогих, а также типов промежутков (включающих концы или нет), которые могут встретиться в рассуждении п. а), и для каждого варианта найдите ответ.

в) Рассмотрите все ситуации п. б), если на рассматриваемом промежутке не существует корня x_0 уравнения $f(x)=g(x)$.

Пример 18. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}-\sqrt{3}<\sqrt{x}-1.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного – все неотрицательные числа. Заметим, что обе части данного неравенства – возрастающие функции, поэтому пока что рассматриваемый метод неприменим. Но попробуем преобразовать данное неравенство. Оно равносильно такому:

$$\sqrt{x+x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}}-\sqrt{x}<\sqrt{3}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-1\right)<\sqrt{3}-1.$$

В последнем полученном нами неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция (она равна произведению двух неотрицательных возрастающих функций). Осталось заметить, что при $x=1$ левая часть равна правой, поэтому, в силу наших стандартных утверждений, ответ – все допустимые значения x, меньшие 1.

Ответ: $0\le x<1$.

Замечания. 1) При доказательстве возрастания левой части преобразованного неравенства в примере 18 мы существенно использовали *неотрицательность* возрастающих сомножителей. Без этого условия утверждение о возрастании произведения возрастающих функций может быть неверным: например, если $x<0$, произведение возрастающей функции $y=x$ на себя – функция $y=x^2$, — как известно, убывает. 2) Для доказательства монотонности можно, конечно, использовать и производную функции.

Упражнения. Решите неравенства.

26. $x^5+2x^4+\sqrt{x}>4$. **27.** $x^{15}+3\sqrt[4]{x-1}\ge 1$.

28. $\sqrt{x+3}+3\sqrt{3x-2}<15$. **29.** $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>0{,}5$.

30. $\sqrt[4]{x^4+66}>x+1$, если $0<x<2$.

31. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

А вот пример другого рода.

Пример 19. *Решите неравенство* $\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x=-1$; $1\leq x\leq\sqrt{3}$.

Сначала убедимся прямой подстановкой, что $x=-1$ – решение нашего неравенства. Далее, при $1\leq x\leq\sqrt{3}$ выполняются неравенства $\sqrt{3-x^2}\geq 0$ и $\sqrt{x+1}\geq\sqrt{2}$, но $\sqrt{x^2-1}\leq$ $\leq\sqrt{2}$, поэтому данное неравенство выполняется на всей своей области определения.

Ответ: $x=-1$; $1\leq x\leq\sqrt{3}$.

Похожие идеи лежат в основе решения и следующей задачи.

Пример 20. *Решите неравенство* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}+x>3$.

Решение. ОДЗ исходного неравенства: $x<-2$; $x>2$. Заметим, что отрицательные значения неизвестного не могут быть решениями задачи, так как тогда отрицательная левая часть неравенства не может быть больше положительной правой; таким образом, из ОДЗ осталось исследовать только случай $x>2$. Но тогда $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}>1$ (поскольку числитель дроби, очевидно, больше знаменателя); итак, первое слагаемое левой части больше 1, а второе больше 2, поэтому их сумма – вся левая часть данного неравенства – больше 3, что и требуется.

Ответ: $x>2$.

Таким образом, мы убедились в том, что иногда полезно найти область определения данного неравенства (или, что то же самое, его ОДЗ) и непосредственно исследовать ситуацию на этой области – оценить значения его левой и правой частей.

Упражнения. Решите неравенства.

32. $\sqrt{x-2}+5\sqrt{2x-1}\leq 3\sqrt{3-2x}$.

33. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x-1}\leq 2$.

34. $|x|+\sqrt{x^2-1}\geq 1$.

35. $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}>1$.

36. $\dfrac{\lg(|x|+1)}{\lg(|x|-1)}+\sqrt{x^2-4}>1$.

37. $\sqrt{x-2}+2^x>9$.

38. $4^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$.

39. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.