## Оглавление



# 1. Свойства корней n-й степени

***Арифметическим корнем n-й степени из числа a*** называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

## *Свойства корней*

Для любых натуральных n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполняются следующие свойства:

1. ***Корень n-й степени из произведения равен произведению корней n-й степени:***

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,.$$

2. ***Корень n-й степени из дроби равен частному корней n-й степени из числителя и знаменателя:***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0\,.$$

3. ***Корень n-й степени из корня k-й степени из a равен корню nk-й степени из a:***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a},\ k > 0\,.$$

4. ***Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же положительное число, то значение корня не изменится:***

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k},\ k > 0\,.$$

**5**. ***Чтобы извлечь корень n-й степени из a в степени k. нужно корень n-й степени из a возвести в степень k:***

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \ (если\ k \le 0,\ то\ a \ne 0).$$

**6**. ***Для любых неотрицательных чисел a и b таких, что a меньше b, выполняется неравенство: корень n-й степени из a меньше корня n-й степени из b***:

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},\ если\ 0 \le a < b.$$

***Докажем свойство 1***. По определению $\sqrt[n]{ab}$ — это такое неотрицательное число, n-я степень которого равна ab, т. е.

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab.$$

Рассмотрим правую часть данного равенства $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)$.

По определению корня n-й степени $\sqrt[n]{a} \ge 0$ и $\sqrt[n]{b} \ge 0$, следовательно, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ge 0$.

По свойству степени произведения ($(ab)^n = a^n \cdot b^n$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$) имеем

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n.$$

Вновь применим определение корня n-й степени: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$. Таким образом, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. Следовательно, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются свойства 2, 3 и 4:

**Свойство 2**

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b};\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ge 0\ и\ \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b},\ т.\ е.\ \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

**Свойство 3**

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geq 0 \text{ и } \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a\,;\ \left(\sqrt[n\cdot k]{a}\right)^{nk} = a,\ т.\ е.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}\ .$$

**Свойство 4**

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \text{ и } \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{k} = a^{k},\ \left(\sqrt[n\cdot k]{a^{k}}\right)^{nk} = a^{k},\ т.\ е.\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^{k}}\ .$$

**Докажем свойство 5**

По определению корня n-й степени $\left(\sqrt[n]{a^{k}}\right)^{n} = a^{k}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k} \geq 0$, так как $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Найдем n-ю степень выражения $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k}$. По свойству возведения степени в степень

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{k};$$

по определению корня n-й степени $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{k} = a^{k}$. Следовательно, $\sqrt[n]{a^{k}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{k}$.

***Доказательство свойства 6*** проводится методом от противного.

Допустим, что $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. Тогда по свойству степеней с натуральным показателем имеем $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} \geq \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n}$, т. е. $a \geq b$. Это противоречит условию a < b. Следовательно, для любых чисел a и b таких, что $0 \leq a < b$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

## 2. Свойства степеней с рациональным показателем

**Определение.** Пусть a - некоторое положительное число x - произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, a n - натуральное, тогда определяют

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ .$$

Если **a** = 0 и **x** — рациональное и положительное, то $\mathbf{a^x} = 0$.

Покажем, что данное определение корректно, а именно: результат возведения числа **a** в рациональную степень не зависит от выбора представления числа **x** в виде дроби. Действительно, всякое рациональное число можно представить единственным способом в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ где p - целое, q - натуральное числа. Все другие дроби, представляющие это число в виде отношения целого числа к натуральному, получаются из дроби $\frac{p}{q}$ умножением на одно и то же натуральное число k ее числителя и знаменателя, т. е.

$$\frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q} .$$

Следовательно,

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{kp}{kq}} = \sqrt[k \cdot q]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[q]{\sqrt[k]{\left(a^p\right)^k}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} .$$

**Теорема.** Пусть **a** и **b** положительные действительные числа, а **x** и **y** - рациональные числа. Тогда выполнены следующие равенства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, 3. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$, 4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

**Доказательство**

**Доказательство свойства 1**. Поскольку два рациональных числа всегда можно представить в виде дробей с равными знаменателями, будем считать, что рациональные числа **x** и **y** уже представлены в таком виде $\frac{m1}{n}$ и $\frac{m2}{n}$.

$$a^x \cdot a^y = a^{\frac{m1}{n}} \cdot a^{\frac{m2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m2}} = \sqrt[n]{a^{m1} \cdot a^{m2}} = \sqrt[n]{a^{m1+m2}} = a^{\frac{m1+m2}{n}} = a^{\frac{m1}{n}+\frac{m2}{n}} = a^{x+y}.$$

**Доказательство свойства 2.** Используя доказанное свойства 1, получаем

$$a^{x-y} \cdot a^y = a^{x-y+y} = a^x,\ a^x = a^y \cdot a^{x-y} \Rightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

**Доказательство свойства 3**. Пусть рациональные числа x и y представлены в виде двух дробей $\frac{m1}{n1}$ и $\frac{m2}{n2}$. Тогда по свойствам арифметических корней n-й степени получаем

$$\left(a^x\right)^y = \left(a^{\frac{m1}{n1}}\right)^{\frac{m2}{n2}} = \left(\sqrt[n1]{a^{m1}}\right)^{\frac{m2}{n2}} = \sqrt[n2]{\left(\sqrt[n1]{a^{m1}}\right)^{m2}} = \sqrt[n2]{\sqrt[n1]{a^{m1\cdot m2}}} = \sqrt[n1\cdot n2]{a^{m1\cdot m2}} = a^{\frac{m1\cdot m2}{n1\cdot n2}} = a^{\frac{m1}{n1}\cdot\frac{m2}{n2}} = a^{x\cdot y}$$

**Доказательство свойства 4.** Пусть x — произвольное рациональное число. Представим его в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое, n - натуральное. На основании свойства 1 арифметических корней получаем

$$(a \cdot b)^x = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^x \cdot b^x.$$

**Доказательство свойства 5.** Равенство 5 следует из свойств 3 и 4

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(a \cdot b^{-1}\right)^x = a^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x = a^x \cdot b^{-x} = \frac{a^x}{b^x}.$$

## *Примеры*

***1. Упростить***: $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}} + \frac{1}{b+\sqrt{a}}\right) : \frac{\sqrt{\frac{1}{9}} \cdot a^{-2}b^{-2}}{a^{-2} - a^{-1}b^{-2}}.$

**Решение**

Наложим ограничения на величины a и b: $a > 0, \quad b \neq 0, \quad b \neq \pm\sqrt{a}.$

$$\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt{\frac{1}{9}\cdot a^{-2}b^{-2}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}=\frac{b-\sqrt{a}+b-\sqrt{a}}{b^2-a}:\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab^2}}=$$

$$=\frac{2b}{b^2-a}:\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^2b^2}}{\frac{b^2-a}{a^2b^2}}=\frac{2b}{b^2-a}:\frac{1}{3(b^2-a)}=\frac{2b}{b^2-a}\cdot\frac{3(b^2-a)}{1}=6b.$$

**Ответ**: 6b, при $a>0,\quad b\neq 0,\quad b\neq\pm\sqrt{a}.$

***2. Упростить:*** $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x^2:\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$

**Решение**

Выражение имеет смысл при $x>0,\quad y\geq 0,\quad x\neq y.$

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}+\frac{3\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{x}\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=3.$$

**Ответ**: 3, при $x > 0, \quad y \geq 0, \quad x \neq y.$

***3. Упростить:*** $\dfrac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) - \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right) \cdot \dfrac{4-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$

**Решение**

Выражение имеет смысл, если $x \neq \pm 8, \quad x \neq 0.$

$$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) - \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right) \cdot \frac{4-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \left(\frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right) \cdot \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+2\right)} =$$

$$= 2-\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\cdot\sqrt[3]{x}} = 2-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x} = 2.$$

**Ответ**: 2, при $x \neq \pm 8, \quad x \neq 0$ .

***4. Упростить:*** $\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right) \cdot \left(\dfrac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}\right)^{-1} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^{-2}}}.$

**Решение**

Выражение будет иметь смысл, если а > 0, $b \geq 0, \quad a \neq 8b$ .

$$\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) \cdot \left(\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}\right)^{-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^{-2}}} = \left(1-\frac{2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}\right)}\cdot\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=1.$$

**Ответ**: 1, при $b \geq 0, \quad a \neq 8b$ .

***5. Упростить выражение:*** $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$

**Решение**

Найдем значения a, при которых выражение имеет смысл:

$$\begin{cases}\frac{a+1}{a-1}\geq 0,\\ a\geq 0,\\ a+1\geq 0,\quad a-1>0,\\ \sqrt{a}-\sqrt{a-1}\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a+1}{a-1}\geq 0,\\ a\geq 0,\\ a>1,\\ a\neq a-1,\end{cases}\Leftrightarrow a>1.$$

Итак, выражение имеет смысл, если a > 1.

Преобразуем выражение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}\right):\left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)=$$

$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{|a|-|a+1|}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{|a|-|a-1|}\right):\left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)$; но при условии a > 1; |a| = a,

|a - 1| = a - 1; тогда $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{a-a-1}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-a+1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}\right)=$

$$=\left(-\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}\right)=\frac{\sqrt{a-1}\cdot\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}\,.$$

**Ответ**: $\sqrt{a-1}$, при а > 1.

### *6. Упростить выражение:*

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\frac{3}{a+1}+\frac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[3]{a^2}-1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a^{1/3}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-a^{\frac{2}{3\cdot\log_2\frac{1}{4}}}.$$

**Решение**

Область допустимых значений переменной а: $a\neq 0,\quad a\neq\pm 1$.

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\frac{3}{a+1}+\frac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[3]{a^2}-1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a^{1/3}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-a^{\frac{2}{3\cdot\log_2\frac{1}{4}}}=$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\frac{3}{(\sqrt[3]{a}+1)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}+\frac{\sqrt[3]{a}-1}{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a}+1)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-a^{\frac{2}{3\cdot(-2)}}=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{a}+1\right)-3+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-a^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+1}{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}\right)-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1-1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\left(\sqrt[3]{a}-1\right)}{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a}-1.$$

**Ответ**: $\sqrt[3]{a}-1,\quad при \quad a\neq 0,\quad a\neq\pm 1$.

**7. *Упростить:*** $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\cdot\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}$.

**Решение**

Выражение имеет смысл, если $a\geq 0,\quad b\geq 0,\quad a\neq b$.

$$\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}+\frac{3\cdot\sqrt{b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}+\frac{3\cdot\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}+\frac{3\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}+3b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}+3b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{3a\sqrt{a}+3b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=\frac{3\cdot\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=3.$$

**Ответ**: 3, при $a\ge 0,\quad b\ge 0,\quad a\ne b$.

***8. Упростить выражение:***

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right);\quad a>b>0.$$

**Решение**

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)=$$

$$=\frac{\left(a^2+a\sqrt{a^2-b^2}-2\sqrt{a^4-a^4+a^2b^2}+a^2-a\sqrt{a^2-b^2}\right)}{2a\sqrt{ab}}:\left(\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}\right)=$$

$$=\frac{\left(2a^2-2ab\right)}{2a\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{2a(a-b)}{2a\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}.$$

**Ответ**: $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$, при $a>b>0$.

***9. Упростите*** $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

**Решение**

Выражение имеет смысл, если $a>0,\quad b>0,\quad a\neq b.$

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-4b}{(a-b):\left(\frac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)}:\frac{a+6\sqrt{ab}+9b}{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}}=$$

$$=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}-3b\right)\cdot\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{(a-b)\cdot\sqrt{ab}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(a+6\sqrt{ab}+9b\right)\cdot\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}-3b\right)\cdot\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{ab}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2\cdot\sqrt{ab}}=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{ab\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{ab\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{ab\cdot\left(a+3\sqrt{ab}-\sqrt{ab}-3b\right)}=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{ab\cdot\left(a+2\sqrt{ab}-3b\right)}=\frac{1}{ab}.$$

**Ответ**: $\frac{1}{ab}$, при $a>0,\quad b>0,\quad a\neq b$.

**Задание**

***10. Упростить:*** $$\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

***11. Упростить:*** $$\frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

***12. Упростить:*** $$\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{ab}}{b^{3/4}-a^{1/4}b^{1/2}+a^{1/2}b^{1/4}-a^{3/4}}\right)^{-1}+\sqrt{2^{\log_4 b}}.$$

**13. Упростить выражение:**

$$\left(a+b^{3/2}:\sqrt{a}\right)^{3/2}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-3/2}.$$

**14. Упростить:** $\left(a^2\sqrt{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$