Оглавление

Иррациональные уравнения

Определение. Уравнение $f(x,\ y,\ ...,\ z) = 0$ называется иррациональным, если $f(x,\ y,\ ...,\ z)$ есть алгебраическая иррациональная функция от переменных.

При решении иррациональных уравнений придется пользовать следующими теоремами:

Теорема 1. *Уравнение* $\sqrt[2k+1]{R(x)} = P(x)$ *равносильно на множество действительных чисел уравнению* $R(x) = P^{2k+1}(x)$.

Теорема 2. *Уравнение* $\sqrt[2k]{R(x)} = P(x)$ *равносильно на множестве действительных чисел смешанной системе* $\begin{cases} R(x) = P^{2k}(x), \\ P(x) \geq 0. \end{cases}$

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень

Решить уравнение

Пример 1. $\sqrt{2x+3}=x$.

Решение

Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: $x=3$.

Пример 2. $x=\sqrt{10-3x}$.

Решение

Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 = \left(\sqrt{10-3x}\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 + 3x - 10 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x_1 = -5, \quad x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: $x=2$.

Пример 3. $5-x+2\sqrt{8-x}=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $2\sqrt{8-x}=x-5$.

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x - 5 \ge 0, \\ 32 - 4x = x^2 - 10x + 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ x^2 - 6x - 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ x_1 = -1, \quad x_2 = 7, \end{cases} \Rightarrow x = 7.$$

Ответ: x = 7.

Пример 4. $5\sqrt{4x^2-3}+6x=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $5\sqrt{4x^2-3}=-6x$.
Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases}-6x\ge 0,\\ 100x^2-75-36x^2=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ 64x^2-75=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0,\\ x_1=-\dfrac{5\sqrt{3}}{8},\quad x_2=\dfrac{5\sqrt{3}}{8},\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$.

Пример 5. $2x+3+\sqrt{8x^2+20x+9}=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $\sqrt{8x^2+20x+9}=-(2x+3)$.
Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases}-(2x+3)\ge 0,\\ 8x^2+20x+9=4x^2+12x+9,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1{,}5,\\ 4x^2+8x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1{,}5,\\ x_1=0,\quad x_2=-2,\end{cases}\Rightarrow x=-2.$$

Ответ: $x=-2$.

Задание 1

1) $\sqrt{2(x+4)}=x$; **2)** $x=\sqrt{3-2x}$; **3)** $2-x-\sqrt{x+10}=0$;
4) $3x+\sqrt{10-x^2}=0$; **5)** $\sqrt{10-3x-9x^2}+3x=-1$; **6)** $\sqrt{0{,}5x^2+2x-1{,}5}=1{,}5+0{,}5x$.

Пример 6. $\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x-2}=1$.

Решение

Область допустимых значений: $\begin{cases}2x+2\ge 0,\\ 3x-2\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1,\\ x\ge \dfrac{2}{3},\end{cases}\Rightarrow x\ge\dfrac{2}{3}$.

Преобразуем уравнение: $\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{3x-2}$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{2x+2}\right)^2=\left(1+\sqrt{3x-2}\right)^2$, $2x+2=1+2\sqrt{3x-2}+3x-2$, $2\sqrt{3x-2}=3-x$.

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ 3 - x \ge 0, \\ \left(2\sqrt{3x-2}\right)^2 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x \le 3, \\ 12x - 8 = 9 - 6x + x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le 3, \\ x^2 - 18x + 17 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le 3, \\ x_1 = 17, \quad x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 7. $\sqrt{20-2x} - \sqrt{2x-15} = 1$

Решение

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 20 - 2x \ge 0, \\ 2x - 15 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge -20, \\ 2x \ge 15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 10, \\ x \ge 7{,}5, \end{cases} \Rightarrow 7{,}5 \le x \le 10.$$

Преобразуем уравнение: $\sqrt{20-2x} = 1 + \sqrt{2x-15}$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{20-2x}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{2x-15}\right)^2$, $20 - 2x = 1 + 2\sqrt{2x-15} + 2x - 15$,

$$2\sqrt{2x-15} = 34 - 4x, \quad \sqrt{2x-15} = 17 - 2x .$$

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} 7{,}5 \le x \le 10, \\ 17 - 2x \ge 0, \\ \left(\sqrt{2x-15}\right)^2 = (17-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 \le x \le 10, \\ x \le 8{,}5, \\ 2x - 15 = 289 - 68x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 \le x \le 8{,}5, \\ 2x^2 - 35x + 152 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 \le x \le 8{,}5, \\ x_1 = 8, \quad x_2 = 9{,}5, \end{cases} \Rightarrow x = 8$$

Ответ: x = 8.

Пример 8. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{4-x} = \sqrt{x+6}$.

Решение

Найдем область допустимых значений (см. рис. 1):

$$\begin{cases} 3x + 7 \ge 0, \\ 4 - x \ge 0, \\ x + 6 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2\dfrac{1}{3}, \\ x \le 4, \\ x \ge -6, \end{cases}$$

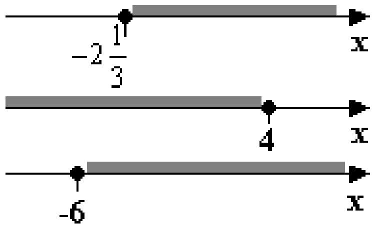

Рис. 1

Областью допустимых значений промежуток: $-2\frac{1}{3} \le x \le 4$ или $\left[-2\frac{1}{3};\ 4\right]$.

Преобразуем уравнение: $\sqrt{3x+7} = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.
Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:
$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(\sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}\right)^2$, $3x+7 = x+6+2\sqrt{(x+6)(4-x)}+4-x$,
$2\sqrt{-x^2-2x+24} = 3x-3$.

Это уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} -2\frac{1}{3} \le x \le 4, \\ 3x-3 \ge 0, \\ \left(2\sqrt{-x^2-2x+24}\right)^2 = (3x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\frac{1}{3} \le x \le 4, \\ x \ge 1, \\ -4x^2-8x+96 = 9x^2-18x+9, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ 13x^2-10x-87=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ x_1 = -2\frac{3}{13}, \quad x_2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 9. $2\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 5\sqrt{x-5}$.

Решение

Найдем область допустимых значений (см. рис. 2):

$$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ 4-x \ge 0, \\ x-5 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \le 4, \\ x \ge 5, \end{cases}$$

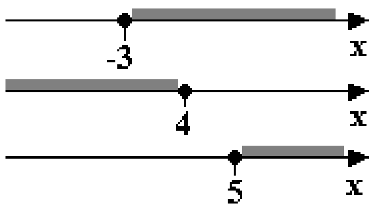

Рис. 2

Областью допустимых значений является пустое множество $\{\varnothing\}$, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Задание 2

1. $\sqrt{5-2x} - \sqrt{x+3} = 2$. **2.** $\sqrt{x-1} - \sqrt{14-x} = 1$. **3.** $3\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$.
4. $\sqrt{x+9} - 2\sqrt{8-x} = \sqrt{2x-10}$. **5.** $\sqrt{3x^2+5x+1} + \sqrt{3x^2+5x+8} = 7$.

6. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$. **7.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$ **.**

При решении иррациональных уравнений этим способом надо использовать **теорему 1** и **теорему 2,** которые приведены выше.

Следует также помнить, что при таком способе решения множество допустимых значений неизвестных может расшириться. Это часто приводит к появлению посторонних корней, которые не будут принадлежать множеству допустимых значений неизвестных.

Кроме того, если при возведении обеих частей уравнения в четную степень не наложить ограничение P(x) > 0 (**теорема 2**), то могут появиться посторонние корни, входящие в область допустимых значений данного уравнения. В этом случае необходимо делать проверку корней, принадлежащих множеству допустимых значений неизвестных подстановкой их в данное уравнение.

Вообще говоря, *проверка не бесполезна* при решении иррациональных уравнений.

Пример 10. Решить уравнение на множестве действительных чисел.

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0.$$

Решение

Найдем область допустимых значений неизвестной:

$$\begin{cases} x+8\ge 0, \\ 5x+20\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -8, \\ x\ge -4, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -4 \text{ или } x\in[-4;\ \infty).$$

Преобразуем уравнение. Оставим $\sqrt{x+8}+2$ в левой части уравнения, а второй корень перенесем в правую часть уравнения, получим:

$$\sqrt{x+8}+2=\sqrt{5x+20}.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$x+8+4\sqrt{x+8}+4=5x+20,\ \ x+12+4\sqrt{x+8}=5x+20.$$

Уединим квадратный корень в левой части уравнения, а все остальные слагаемые перенесем в правую часть:

$$\sqrt{x+8}=x+2.$$

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x\ge -4, \\ x+2\ge 0, \\ \left(\sqrt{x+8}\right)^2=(x+2)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4, \\ x\ge -2, \\ x+8=x^2+4x+4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x^2+3x-4=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x_1=-4,\ \ x_2=1, \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1.$

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$

Решение

Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 4x-3\ge 0, \\ 5x+1\ge 0, \\ 15x+4\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4}, \\ x\ge -\frac{1}{5}, \\ x\ge -\frac{4}{15}, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{3}{4} \text{ или } x\in \left[\frac{3}{4};\ \infty\right).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$4x-3+2\sqrt{20x^2-11x-3}+5x+1=15x+4,\ \sqrt{20x^2-11x-3}=3(x+1).$

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x\ge \frac{3}{4}, \\ 3(x+1)\ge 0, \\ \left(\sqrt{20x^2-11x-3}\right)^2=\left(3(x+1)\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4}, \\ x\ge -1, \\ 20x^2-11x-3=9x^2+18x+9, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4}, \\ 11x^2-29x-12=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4}, \\ x_1=-\frac{4}{11},\quad x_2=3, \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $x=3.$

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2.$

Решение

При попытке найти область определения мы сталкиваемся с трудностями решения системы неравенств

$\begin{cases} x-2\ge 0, \\ x-\sqrt{x-2}\ge 0, \\ x+\sqrt{x-2}\ge 0, \end{cases}$ решая первое из них мы находим, что $x\ge 2,$ при этих значениях x третье неравенство $x+\sqrt{x-2}\ge 0$, $\sqrt{x-2}\ge -x$ очевидно выполняется, так как его правая часть при всех действительных $x\ge 2$ - отрицательна, а левая - неотрицательна; остается решить второе неравенство $x-\sqrt{x-2}\ge 0,$ которое будет равносильно системе:

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ x\ge \sqrt{x-2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x^2\ge x-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x^2+x-2\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le -2,\quad x\ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2.$$

Таким образом, ОДЗ $[2;\ \infty).$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$x-\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{x-2}=4,\ \sqrt{x^2-x+2}=2-x. \qquad (1)$$

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ 2-x\ge 0, \\ x^2-x+2=4-4x+x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 2, \\ 3x=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=\frac{2}{3}, \end{cases} \text{система не имеет решений. } \Leftrightarrow$$

Ответ: корней нет.

Пример 13. Решите уравнение $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$

Решение

Подкоренные выражения $x^2+2>0$ и $x^2+2x+3>0$ при всех x из множества действительных чисел, так как их дискриминанты отрицательны, поэтому область допустимых значений - множество всех действительных чисел, $x\in R$.

Преобразуем уравнение $2x+1+x\sqrt{x^2+2}=-(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}.$

Возведем обе части уравнения в квадрат. При таком возведении в квадрат мы заведомо допускаем, что в обеих частях уравнения могут быть отрицательные значения, а значит, возможно появление посторонних корней и тогда, проверка необходима.

Получаем:

$(2x+1)^2+2(2x+1)x\sqrt{x^2+2}+x^2(x^2+2)=(x^2+2x+1)(x^2+2x+3),$

$2x(2x+1)\sqrt{x^2+2}=4x^3+2x^2+4x+2,\ \ 2x(2x+1)\sqrt{x^2+2}=2x^2(2x+1)+2(2x+1),$

$2x(2x+1)\sqrt{x^2+2}-2(2x+1)(x^2+1)=0,\ \ (2x+1)(x\sqrt{x^2+2}-(x^2+1))=0.$

Отсюда получаем, либо $2x+1=0,$ либо $x\sqrt{x^2+2}-(x^2+1)=0.$

Из первого уравнения находим $x=-\frac{1}{2}.$ Второе уравнение преобразуем и возведем обе его части в квадрат:

$x\sqrt{x^2+2}=(x^2+1),\ \ x^2(x^2+2)=x^4+2x^2+1,\ \ x^4+2x^2=x^4+2x^2+1,\ \ 0=1,$ - не имеет корней.

Проверка

Проверим корень $x=-\frac{1}{2},\ \ -1+1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-1+3}=0,\ \ 0=0.$

$x=-\frac{1}{2}$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}.$

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5.$

Решение

Найти область допустимых значений здесь сложно, потому что, кроме решения квадратного неравенства $5x^2-21x-68\geq 0,$ нам придется решить еще и иррациональное неравенство $2x+\sqrt{5x^2-21x-68}\geq 0,$ что пока для нас затруднительно.

Поэтому ОДЗ находить не будем, а сделаем проверку, после получения значений x.

Возведем обе части уравнения в квадрат и преобразуем его:

$$23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}=25,\ \ \sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}=2.$$

Возведем еще раз в квадрат

$$2x+\sqrt{5x^2-21x-68}=4,\ \ \sqrt{5x^2-21x-68}=4-2x.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}4-2x\ge 0,\\ 5x^2-21x-68=16-16x+4x^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2,\\ x^2-5x-84=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2,\\ x_1=-7,\ \ x_2=12,\end{cases}$$

отсюда получаем только один корень $x=-7.$

Проверка

$$\sqrt{23+\sqrt{-14+\sqrt{245+147-68}}}=5,\ \ \sqrt{23+\sqrt{-14+18}}=5,\ \ 5=5.$$

Ответ: $x=-7.$

Пример 15. Решите уравнение $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=0.$

Решение

ОДЗ $x\ge 0.$

Преобразуем уравнение $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}.$ (1)

Возведем обе его части в куб

$$a+x+3\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)}+3\sqrt[3]{(a+x)(a-x)^2}+a-x=$$

$$=a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{(a-\sqrt{x})^2(a+\sqrt{x})}+3\sqrt[3]{(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x})^2}+a+\sqrt{x},$$

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})=3\sqrt[3]{a^2-x}\cdot(\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}),$$

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})=\sqrt[3]{a^2-x}\cdot(\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}),$$

Возведем еще раз в куб обе части уравнения

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)-\sqrt[3]{a^2-x}\cdot\left(\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\right)=0,$$

Из уравнения (1) вместо $\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}$ подставим $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}$, получим уравнение

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)-\sqrt[3]{a^2-x}\cdot\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=0,$$

$$\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)\left(\sqrt[3]{a^2-x^2}-\sqrt[3]{a^2-x}\right)=0.$$

Получим два уравнения $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=0$ или $\sqrt[3]{a^2-x^2}-\sqrt[3]{a^3-x}=0.$

Решаем первое уравнение $\sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{x-a},\ a+x=x-a,\ 2a=0.$

При $a=0$ уравнение имеет б/м решений из ОДЗ, т. е. $x\ge 0$, а при $a\ne 0$ уравнение корней не имеет.

Решаем второе уравнение

$\sqrt[3]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{a^3-x},\ a^2-x^2=a^2-x,\ x^2-x=0,\ x(x-1)=0,\ x_1=0,\ x_2=1.$

Ответ: 1. $x_1=0,\ x_2=1$ при любом значении $a\ne 0.$

2. При $a=0$ уравнение имеет б/м решений $x\ge 0.$

Пример 16. Найти все вещественные корни уравнения

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}.$$

Решение

О. д. з. $x \in R$.

Возведем обе части уравнения в куб

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}+3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}+x+1=2x^3,$$

$$3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1})-2x^3+2x=0.$$

Из заданного неравенства вместо суммы $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$ в уравнение подставим ее значение $x\sqrt[3]{2}$, получим

$$3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}-2x^3+2x=0,\ 3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}-2x(x^2-1)=0,$$

$$x\sqrt[3]{x^2-1}\cdot(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)^2})=0.$$

Отсюда находим $x\sqrt[3]{x^3-1}=0,\ x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1.$

Решим уравнение $3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=0,\ 2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=3\sqrt[3]{2},\ 8(x^2-1)^2=54,$

$$(x^2-1)^2=\frac{27}{4},\ x^2=1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2},\ x^2=1+\frac{3\sqrt{3}}{2},\ x_4=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}},\ x_5=-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}},$$

$$x_6=\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{2}},\ x_7=-\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

Проверка

$x_1=0,\ \sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{1}=0,\ \ 0=0.$ $x_1=0$ удовлетворяет уравнению.

$x_2=-1,\ \sqrt[3]{-1-1}+0=-\sqrt[3]{2},\ \ -\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{2}.$ $x_2=-1$ удовлетворяет уравнению.

$x_3=1,\ \sqrt[3]{1+1}=\sqrt[3]{2},\ \ \sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}.$ $x_3=1$ удовлетворяет уравнению.

Непосредственная проверка значений x_4 и x_5 вызывает трудности, поэтому поступим так. Положим

$a=\sqrt[3]{x_4-1},\ \ b=\sqrt[3]{x_4+1},\ \ c=\sqrt[3]{2}x_4$ и покажем, что $a+b=c.$ (1)

Так как x_4 удовлетворяет уравнению $2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}=2x^3$, то мы имеем

$$a^3+3abc+b^3=c^3, \tag{2}$$

и нам надлежит показать, что из этого равенства следует равенство (1). Заметим, что если во (2) вместо с подставить a + b, то получится тождество.

Следовательно, по теореме Безу, рассматриваемый относительно с многочлен $c^3-3abc-a^3-b^3$ делится на двучлен с - (a + b). Проведя деление, получим

$$c^3-3abc-a^3-b^3=\left(c-(a+b)\right)\left(c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2\right). \tag{3}$$

В силу (2) левая часть (3) есть нуль; легко видеть, что a > 0, b > 0, c > 0, и значит выражение $c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2$ положительно, а значит $c-(a+b)=0$. Таким образом, равенство (1) доказано. Аналогично устанавливается, что x_5 - также корень уравнения.

Ответ: $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}},\ x_5=-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}},x_6=\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{2}},\ x_7=-\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$

Пример 17. Решите уравнение $\dfrac{x^3+(a^2-x^2)\cdot\sqrt{a^2-x^2}}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=a^2.$

Решение

ОДЗ $\begin{cases} a^2 - x^2 \geq 0, \\ x + \sqrt{a^2 - x^2} \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 \leq 0, \\ \sqrt{a^2 - x^2} \neq -x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq a, \\ x \neq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}|a|. \end{cases}$

Преобразуем уравнение $x^3 + (a^2 - x^2)\cdot\sqrt{a^2 - x^2} = a^2\cdot(x + \sqrt{a^2 - x^2})$,

$x^3 + a^2\sqrt{a^2 - x^2} - x^2\sqrt{a^2 - x^2} - a^2x - a^2\sqrt{a^2 - x^2} = 0,\ x^3 - a^2x - x^2\sqrt{a^2 - x^2} = 0,$

$-x(a^2 - x^2) - x^2\sqrt{a^2 - x^2} = 0,\ x\cdot\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\left(\sqrt{a^2 - x^2} + x\right) = 0,\ \sqrt{a^2 - x^2} + x \neq 0,$

значит $x = 0$ или $\sqrt{a^2 - x^2} = 0,\ \ x = |a|.$

Ответ: $x_1 = 0,\ \ x_2 = -a,\ \ x_3 = a.$

Пример 18. Решите уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x + \sqrt{x}}}.$

Решение

Область допустимых значений определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x + \sqrt{x} > 0, \\ x - \sqrt{x} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x > -\sqrt{x}, \\ x \geq \sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x(x-1) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow\ x > 1.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x + \sqrt{x}}$, зная, что $\sqrt{x + \sqrt{x}} \neq 0,$ получим

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ 2x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x^2 - x} = 0,\ \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x-1}) = 0,$$

$\sqrt{x} \neq 0,\ 2\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x-1} = 0,\ \ 2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x-1}.$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$(2\sqrt{x} - 1)^2 = 4(x-1),\ 4x - 4\sqrt{x} + 1 = 4x - 4,\ \sqrt{x} = \dfrac{5}{4},\ x = \dfrac{25}{16} = 1\dfrac{9}{16}.$

Проверка

$$\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}}},\ \ \frac{\sqrt{45} - \sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{45}},\ \ \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{25}{16}.$

Пример 19. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x^2 + 8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \dfrac{7}{\sqrt{x+1}}.$

Решение

Область допустимых значений определяется из системы неравенств (рис. 3):

$$\begin{cases} x^2 + 8x \ge 0, \\ x + 7 \ge 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+8) \ge 0, \\ x \ge -7, \\ x > -1, \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

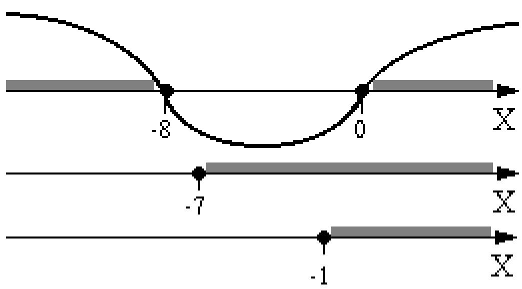

Рис. 3

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x+1}$, ($\sqrt{x+1} \ne 0$) получим неравенство:

$$\sqrt{x^2 + 8x} + \sqrt{x^2 + 8x + 7} = 7.$$

Положим $x^2 + 8x = z$, $z \ge 0$, тогда уравнение станет таким $\sqrt{z} + \sqrt{z+7} = 7$.

Возведем обе его части в квадрат $z + 2\sqrt{z^2 + 7z} + z + 7 = 49$, $\sqrt{z^2 + 7z} = 21 - z$,

$$\begin{cases} 21 - z \ge 0, \\ z^2 + 7z = 441 - 42z + z^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \le 21, \\ 49z = 441, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \le 21, \\ z = 9, \end{cases} \Leftrightarrow z = 9.$$

$$x^2 + 8x = 9,\ x^2 + 8x - 9 = 0,\ x_1 = -9,\ x_2 = 1.$$

$x_1 = -9$ не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: $x = 1$.

Пример 20. Решить уравнение $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b$, $(a > b)$.

Решение

Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x - a \ge 0, \\ x - b \ge 0, \\ \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} \ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge a, \\ x \ge b, \\ \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} \ne 0. \end{cases}$$

Так как, по условию $a > b$, то из первых двух неравенств получаем $x > a$.

Последнее неравенство будет выполняться при всех значениях $x > a$, так как каждый из квадратных корней принимают неотрицательные значения (заведомо предполагаем рассмотрение арифметического значения корня), причем они не могут принимать нулевые значения при одном и том же значении x, так как $a > b$.

Таким образом, ОДЗ $x > a$.

Преобразуем уравнение. Внесем под знаки квадратных корней x - a и x - b в числителе дроби, получим в числителе сумму кубов двух выражений, разложим ее на множители

$$\frac{\sqrt{(x-a)^3}+\sqrt{(x-b)^3}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b,$$
$$\frac{\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)\left(\sqrt{(x-a)^2}-\sqrt{(x-a)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}\right)}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b,$$
$$\sqrt{(x-a)^2}-\sqrt{(x-a)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}=a-b,$$
$$|x-a|-\sqrt{(x-a)(x-b)}+|x-b|=a-b.$$

Из области допустимых значений следует, что $x-a\ge 0,\ \ x-b\ge 0,$ тогда
$x-a-\sqrt{(x-a)(x-b)}+x-b=a-b,\ 2(x-a)=\sqrt{(x-a)(x-b)}.$
Возведем обе части уравнения в квадрат, получим
$4x^2-8xa+4a^2=x^2-ax-bx+ab,\ 3x^2-7ax+bx+4a^2-ab=0,$
$$3x^2-(7a-b)x+4a^2-ab=0,$$
$D=(7a-b)^2-12(4a^2-ab)=49a^2-14ab+b^2-48a^2+12ab=(a-b)^2,$

$x_{1,\,2}=\dfrac{7a-b\pm\sqrt{(a-b)^2}}{6}=\dfrac{7a-b\pm|a-b|}{6},\ x_1=a,\ x_2=\dfrac{4a-b}{3}.$

Ответ: $x_1=a,\ x_2=\dfrac{4a-b}{3}.$

Пример 21. Решите уравнение $\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$.
При каких вещественных значениях **a** уравнение будет иметь решение?

Решение

Перенесем $\sqrt{x}$ в левую часть уравнения и возведем обе части его в квадрат, получим

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4},\ x-4a+16+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}+x=4x-8a+16,$$

$2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=2x-4a,\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$
Возведем полученное уравнение в квадрат
$x(x-4a+16)=x^2-4ax+4a^2,\ x^2-4ax+16x=x^2-4ax+4a^2,\ x=\dfrac{a^2}{4}.$

Подставим полученное значение x в первоначальное уравнение

$\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-4a+16}=2\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-2a+4}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}},\ \sqrt{a^2-16a+64}-2\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2}=0,$
$\sqrt{(a-8)^2}-2\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}=0,\ |a-8|-2|a-4|+|a|=0.$
Решим последнее уравнение (см. рис. 4): $|a-8|-2|a-4|+|a|=0.$

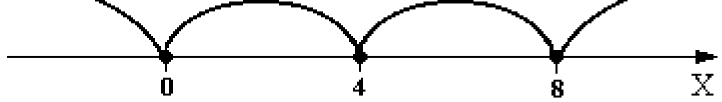

Рис. 4

1. При $a \le 0$ получим уравнение $-a+8+2a-8-a=0,\ 0=0,$ получаем $a \le 0$.

2. При $0<a\le 4$ получим уравнение $-a+8+2a-8+a=0,\ \ a=0$ - не входит в промежуток $0<a\le 4$.

3. При $4<a\le 8$ получим уравнение $-a+8-2a+8+a=0,\ \ a=8$ - входит в промежуток $4<a\le 8$.

4. При $a>8$ получим уравнение $a-8-2a+8+a=0,\ 0=0$ получаем $a>8$.

Ответ: при $a \le 0$ и $a \ge 8$ или $a \in \{(-\infty;\ \ 0]\cup[8;\ \ \infty)\}$ уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a^2}{4}$.

Задание 3

1. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+7}=2.$ **2**. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}.$

3. $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}.$ **4**. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$

5. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$ **6**. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

7. $x=a+\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2-a^2-b^2}}.$ **8**. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}.$

9. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}.$ **10**. $\sqrt{x(1+\sqrt{x})}-\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sqrt{x}}.$

11. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$ **12**. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=4.$

13. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$ **14**. $\sqrt[3]{x+34}+\sqrt[3]{x-3}=1.$

2. Замена иррационального уравнения смешанной алгебраической системой, введением новых переменных

Пример 1. Решите уравнение $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$.

Решение

Положим $\sqrt[4]{x}=z,$ причем $z\ge 0.$ Получим смешанную систему:

$$\begin{cases} z\ge 0, \\ 5z+2=3z^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\ge 0, \\ 3z^2-5z-2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\ge 0, \\ z_1=2, \quad z_2=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

В результате получаем $z=2,$ тогда $\sqrt[4]{x}=2.$. Возведем обе части уравнения в четвертую степень, получаем $x=2^4,$ $x=16.$ Это значение входит в область допустимых значений и является корнем уравнения.

Ответ: 16.

Пример 2. Решите уравнение $2x\cdot\sqrt[3]{x}-3x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20$.

Решение

Область допустимых значений переменной: $x\ne 0$ *или* $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.
Преобразуем уравнение. Внесем переменную x под корень:

$$2\sqrt[3]{x^3\cdot x}-3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{x}}-20=0,\ 2\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}-20=0.$$

Пусть $\sqrt[3]{x^2}=y,\ y>0\Rightarrow\sqrt[3]{x^4}=y^2$, получим смешанную систему:

$$\begin{cases} y>0, \\ 2y^2-3y-20=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0, \\ y_1-2{,}5;\ y_2=4, \end{cases} \Rightarrow y=4.$$

Выполним обратную подстановку: $\sqrt[3]{x^2}=4,\ \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=4^3,\ x^2=64,\ x_{1,2}=\pm 8$.

Ответ: $-8;\ 8$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt[3]{9-6x+x^2}-3\sqrt[3]{3-x}-2=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $\sqrt[3]{(3-x)^2}-3\sqrt[3]{3-x}-2=0$. *Пусть* $\sqrt[3]{3-x}=y$, получим уравнение $y^2-3y-2=0$.

D = 9 + 8 = 17; $y_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $y_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

$\sqrt[3]{3-x}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$; $3-x=\dfrac{\left(3-\sqrt{17}\right)^3}{8}$; $x_1=3-\dfrac{\left(3-\sqrt{17}\right)^3}{8}$, $x_2=3-\dfrac{\left(3+\sqrt{17}\right)^3}{8}$.

Ответ: $3-\dfrac{\left(3-\sqrt{17}\right)^3}{8}$; $3-\dfrac{\left(3+\sqrt{17}\right)^3}{8}$.

***Пример 4.* Решите уравнение** $x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=8$.

Решение

Пусть $\sqrt{x^2-x-2}=y,\ y\ge 0,$ *тогда* $\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2=y^2,\ x^2-x-2=y^2,\ x^2-x=y^2+2$,

Получим смешанную систему:

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y^2+2+y-8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2+y-6=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y_1=-3,\ y_2=2, \end{cases} \Rightarrow y=2.$$

Делаем обратную подстановку, получим:

$$x^2-x-2=4,\ x^2-x-6=0,\ x_1=-2,\ x_2=3.$$

Ответ: -2; 3.

***Пример 5.* Решите уравнение** $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$.

Решение

Пусть $\sqrt{x^2-5x+20}=y,\ y\ge 0,$ *тогда* $\left(\sqrt{x^2-5x+20}\right)^2=y^2,\ x^2-5x+20=y^2$, $x^2-5x=y^2-20$, получим систему:

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y^2-20+16-3y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2-3y-4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y_1-1,\ y=4, \end{cases} \Rightarrow y=4.$$

$x^2-5x+20=16,\ x^2-5x+4=0,\ x_1=1,\ x_2=4$.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=4$.

Пример 6. **Решите уравнение** $\sqrt{3x^2-6x+7}=7+2x-x^2$**.**

Решение

Пусть $\sqrt{3x^2-6x+7}=y,\ y\ge 0,$ *тогда* $\left(\sqrt{3x^2-6x+7}\right)^2=y^2,\ 3x^2-6x+7=y^2$.
Преобразуем последнее равенство: $3x^2-6x=y^2-7,\ 3(x^2-2x)=y^2-7$,
$x^2-2x=\dfrac{y^2-7}{3},\ 2x-x^2=\dfrac{7-y^2}{3}$. Получим систему:

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y=7+\dfrac{7-y^2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2+3y-28=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y_1=-7,\ y_2=4, \end{cases} \Rightarrow y=4.$$

$3x^2-6x+7=16,\ 3x^2-6x-9=0,\ x^2-2x-3=0,\ x_1=-1,\ x_2=3$.

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=3$.

Пример 7. **Решите уравнение** $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x-3)}=0$**.**

Решение

Преобразуем уравнение:
$x^2-5x+2x-10+3\sqrt{x^2-3x}=0,\ x^2-3x-10+3\sqrt{x^2-3x}=0$.
Пусть $\sqrt{x^2-3x}=y,\ y\ge 0,\ \left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=y^2,\ x^2-3x=y^2$. Получим систему:

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y^2-10+3y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2+3y-10=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y_1=-5,\ y_2=2, \end{cases} \Rightarrow y=2.$$

$x^2-3x=4,\ x^2-3x-4=0,\ x_1=-1,\ x_2=4$.

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=4$.

Пример 8. **Решите уравнение** $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$**.**

Решение

Выражения $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ и $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}$ являются взаимно обратными, если они не равны нулю, т. е. $x \neq 1$ *и* $x \neq -\frac{1}{2}$, т. е. область допустимых значений:

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 1\right) \cup (1;\ \infty)$$

В самом деле: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = \sqrt{\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(2x-1)}} = 1$.

Пусть $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = y,\ y > 0,\ \textit{тогда}\ \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = \frac{1}{y}$, получим смешанную систему:

$$\begin{cases} y > 0, \\ y - 2 \cdot \frac{1}{y} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ y^2 - 2 = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ y^2 - y - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ y_1 = -1,\ y_2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow y = 2.$$

$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2,\ \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)^2 = 2^2,\ \frac{2x+1}{x-1} = 4,\ 2x+1 = 4x-4,\ 2x = 5,\ x = 2{,}5$ - этот значение переменной входит в область допустимых значений и является корнем уравнения.

Ответ: x = 2,5.

***Пример 9.* Решить уравнение** $\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt[5]{\frac{x+4}{2-x}} = 2$.

Решение

Область допустимых значений: $x \neq -4$ *и* $x \neq 2$, т. е. $x \in (-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 2) \cup (2;\ \infty)$.

Выражения $\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}}$ и $\sqrt[5]{\frac{x+4}{2-x}}$ являются взаимно-обратными, в самом деле:

$$\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x+4}{2-x}} = \sqrt[5]{\frac{(2-x)(x+4)}{(x+4)(2-x)}} = 1.$$

Пусть $\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}} = y,\ y \neq 0,\ \sqrt[5]{\frac{x+4}{2-x}} = \frac{1}{y}$, получим смешанную систему:

$$\begin{cases} y \neq 0, \\ y + \frac{1}{y} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ y^2 - 2y + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ (y-1)^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

$$\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}}=1,\ \left(\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+4}}\right)^5=1^5,\ \frac{2-x}{x+4}=1,\ 2-x=x+4,\ 2x=-2,\ x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

Задание 4

1. $3+\sqrt{x-3}=4\sqrt[4]{x-3}$. **2.** $\sqrt[3]{x^2-2x+1}-3\sqrt[3]{x-1}+2=0$. **3.** $x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2$.

4. $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$. **5.** $\sqrt{2x^2-5x+12}=5x-2x^2$.

6. $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}}+\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}=2$. **7.** $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}}=2$. **8**. $\dfrac{3}{6\sqrt{x}+\sqrt{4x-2}}=\sqrt{x}$.

9. $\dfrac{3}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}=\sqrt{6x-2}$.

3. Замена иррационального уравнения смешанной алгебраической системой, введением новых переменных (продолжение)

Пример 1. **Решить уравнение:** $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7.$

Решение

Положим $\sqrt{x+3}=u,\ u\ge 0;\ \sqrt{3x-2}=v,\ v\ge 0,$ тогда $x+3=u^2,\ 3x-2=v^2.$

$\begin{cases} x+3=u^2, \\ 3x-2=v^2, \end{cases}$ умножим обе части первого уравнения на -3 и сложим со вторым уравнением, получим $v^2-3u^2=-11.$

При такой подстановке заданное уравнение примет вид $u+v=7.$

Получим систему:

$$\begin{cases} v^2-3u^2=-11, \\ u+v=7, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-u)^2-3u^2=-11, \\ v=7-u, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49-14u-2u^2=-11, \\ v=7-u, \\ u\ge 0,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$2u^2+14u-60=0,\ u^2+7u-30=0,\ u_1=-10,\ u_2=3.$

$u_1=-10$ не является корнем, так как $u\ge 0,$ значит $u=3.$

$$\sqrt{x+3}=3,\ x+3=9,\ x=6.$$

Ответ: 6.

Пример 2. **Решить уравнение** $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}=1.$

Решение

Положим $\sqrt{3x-5}=u,\ \ u\ge 0,\ \ 3x-5=u^2;\ \ \sqrt{x-2}=v,\ \ v\ge 0,\ \ x-2=v^2.$

Подставим в уравнение, получим: u - v = 1.

Получим систему:

$$\begin{cases} u-v=1, \\ 3x-5=u^2,\quad u\ge 0, \\ x-2=v^2,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1+v,\quad u\ge 0, \\ 3(v^2+2)-5=(1+v)^2, \\ x=v^2+2,\quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(v-1)=0, \\ v\ge 0. \end{cases}$$

$v_1=0,\ \ v_2=1;\ \ x-2=0,\ \ x_1=2;\ \ x-2=1,\ \ x_2=3.$

Ответ: 2; 3.

Пример 3. **Решить уравнение:** $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x+4+3\sqrt{2x-1}}=\sqrt{32}.$

Решение

Положим $\sqrt{2x-1}=z,\ \ z\ge 0,$ отсюда $2x-1=z^2,\ \ 2x=z^2+1,\ \ x=\dfrac{1}{2}(z^2+1),$ получаем уравнение:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(z^2+1)+z}+\sqrt{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}+4+3z}=\sqrt{32},\quad \frac{\sqrt{z^2+2z+1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{z^2+6z+9}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2},$$

$\sqrt{(z+1)^2}+\sqrt{(z+3)^2}=8,\ \ |z+1|+|z+3|=8.$ Поскольку $z\ge 0$, получим:

$2z+4=8,\ \ 2z=4,\ \ z=2;\ 2x-1=4,\ 2x=5,\ \ x=2{,}5$.

Ответ: $x=2{,}5$.

Пример 4. **Решить уравнение:** $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$

Решение

Положим $\sqrt[3]{x}=u,\ \sqrt[3]{2x-3}=v,$ тогда $x=u^3,\ \ 2x-3=v^3$. Получим систему уравнений, из которой исключим x: $\begin{cases}u^3=x,\\ v^3=2x-3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2u^3=-2x,\\ v^3=2x-3,\end{cases}\Leftrightarrow v^3-2u^3=-3.$

Чтобы получить второе уравнение системы, замени в данном уравнении $\sqrt[3]{x}=u,\ \ \sqrt[3]{2x-3}=v$ и $x=u^3$, получим уравнение:

$u+v=\sqrt[3]{12(u^3-1)},\ \ (u+v)^3=12u^3-12,\ \ (u+v)^3-12u^3=-12.$

Из двух уравнений составим систему и решим ее:

$$\begin{cases}v^3-2u^3=-3,\\ (u+v)^3-12u^3=-12,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4v^3+8u^3=12,\\ (u+v)^3-12u^3=-12,\end{cases}\Leftrightarrow (u+v)^3-4u^3-4v^3=0.$$

Решим полученное уравнение: $(u+v)^3-4(u^3+v^3)=0,$

$(u+v)(u+v)^2-4(u+v)(u^2-uv+v^2)=0,\ \ (u+v)\big((u+v)^2-4(u^2-uv+v^2)\big)=0,$

$(u+v)\left(u^2+2uv+v^2-4u^2+4uv-4v^2\right)=0,\ \ (u+v)\left(-3u^2+6uv-3v^2\right)=0,$

$(u+v)\left(u^2-2uv+v^2\right)=0,\ \ (u+v)(u-v)^2=0.$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}u+v=0,\\ u-v=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-v,\\ u=v,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{2x-3},\\ \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x-3},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2x+3,\\ x=2x-3,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=1,\ \ x_2=3.$

Пример 5. **Решить уравнение:** $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}.$

Решение

Положим $\sqrt{9-5x}=u,\ \ u\ge 0,\ \ \sqrt{3-x}=v,\ \ v>0,$ тогда $9-5x=u^2,\ \ 3-x=v^2,$ отсюда можно исключить x и получить уравнение, содержащие переменные u и v.

Из системы уравнений исключим x:

$$\begin{cases}9-5x=u^2,\\ 3-x=v^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-5x=u^2,\\ -15+5x=-5v^2,\end{cases}\Leftrightarrow u^2-5v^2=-6.$$

Подставляя значения $\sqrt{9-5x}=u,\ \ u\ge 0,\ \ \sqrt{3-x}=v,\ \ v>0,$ в первоначальное уравнение, получим: $u=v+\dfrac{6}{v}.$

Приходим к системе уравнений: $\begin{cases}u^2-5v^2=-6,\\ u=v+\dfrac{6}{v}.\end{cases}$

Подставим значения u из второго уравнения в первое, получим:

$$\left(v+\frac{6}{v}\right)^2-5v^2+6=0,\quad v^2+12+\frac{36}{v^2}-5v^2+6=0,\quad -4v^2+18+\frac{36}{v^2}=0,$$

$2v^2-9-\dfrac{18}{v^2}=0,\ \ 2v^4-9v^2-18=0.$ Это биквадратное уравнение. Положим $v^2=z,\ \ z>0,$ тогда придем к квадратному уравнению: $2z^2-9z-18=0,$ которое имеет два корня: $z_1=-1{,}5,\ \ z_2=6.\ \ z_1=-1{,}5$ не удовлетворяет условию $z>0$ и является посторонним корнем. Находим: $v^2=6,\ \ 3-x=6,\ \ x=-3.$

Ответ: $x=-3.$

Пример 6. **Решить уравнение:** $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2.$

Решение

Положим $\sqrt[3]{12-x}=u,\ \ \sqrt[3]{14+x}=v,$ тогда $12-x=u^3,\ \ 14+x=v^3$.

Складывая левые и правые части этих равенств, получаем: $u^3+v^3=26$.

Из данного уравнения, находим: $u+v=2$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}u^3+v^3=26,\\ u+v=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)(u^2-uv+v^2)=26,\\ u+v=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(u^2-uv+v^2)=26,\\ u+v=2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 13, \\ u + v = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - u(2-u) + (2-u)^2 = 13, \\ v = 2 - u. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$u^2 - 2u + u^2 + 4 - 4u + u^2 - 13 = 0, \quad u^2 - 2u - 3 = 0, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = -1; \quad v_1 = -1, \quad v_2 = 3.$$

$\sqrt[3]{12-x} = 3, \quad 12 - x = 27, \quad x_1 = -15; \quad \sqrt[3]{12-x} = -1, \quad 12 - x = -1, \quad x_2 = 13.$

Проверка

$x_1 = -15; \quad \sqrt[3]{12+15} + \sqrt[3]{14-15} = 2, \quad 3 - 1 = 2, \quad 2 = 2$, значит,
$x_1 = -15$ - удовлетворяет уравнению.
$x_2 = 13; \quad \sqrt[3]{12-13} + \sqrt[3]{14+13} = 2, \quad -1 + 3 = 2, \quad 2 = 2$, значит,
$x_2 = 13$ - удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x_1 = -15, \quad x_2 = 13$.

2-й способ

Возведем обе части уравнения в куб, получим:

$$12 - x + 3\sqrt[3]{(12-x)^2} \cdot \sqrt[3]{14+x} + 3\sqrt[3]{12-x} \cdot \sqrt[3]{(14+x)^2} + 14 + x = 8;$$

$$3\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}\left(\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x}\right) = -18.$$

По условию $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$, тогда получим $\sqrt[3]{168 - 2x - x^2} = -3$,
$168 - 2x - x^2 = -27, \quad x^2 + 2x - 195 = 0, \quad x_1 = -15, \quad x_2 = 13.$

Ответ: $x_1 = -15, \quad x_2 = 13$.

***Пример* 7. Решить уравнение:** $\sqrt{x+1} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} = 1.$

Решение

1-й способ

Найдем область допустимых значений переменной:

$$\begin{cases} x + 1 \ge 0, \\ \dfrac{x-1}{x} \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ \dfrac{x-1}{x} \ge 0. \end{cases}$$

Решим эту систему, используя метод интервалов (см. рис. 5):

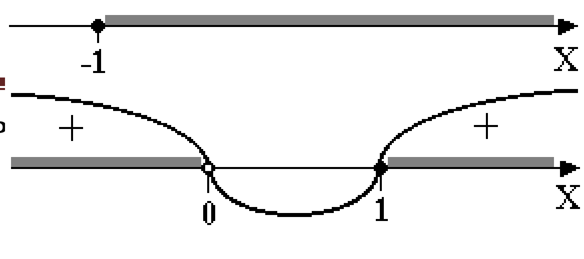

Рис. 5

В результате получаем $[-1;\ \ 0)\cup[1;\ \ \infty)$.

Рассматривая уравнение на этом множестве, преобразуем его:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1,\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x},\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, получим

$$x^2+x=x-1+2\sqrt{x^2-x}+x,\ \ (x^2-x)-2\sqrt{x^2-x}+1=0,\ \ \left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2=0,$$

$$\sqrt{x^2-x}-1=0,\ \ \sqrt{x^2-x}=1,\ \ x^2-x-1=0,\ \ x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ не входит в область допустимых значений и не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2-й способ

Положим $\sqrt{x+1}=u,\ \ u\ge 0,\ \ \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=v,\ \ v\ge 0$, тогда $x+1=u^2,\ \ \dfrac{x-1}{x}=v^2$.

Получим систему уравнений из которой исключим x.

$$\begin{cases}x+1=u^2,\\ \dfrac{x-1}{x}=v^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=u^2-1,\\ 1-\dfrac{1}{x}=v^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=u^2-1,\\ 1-v^2=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$ Положим $u\ne\pm 1,\ \ 1-v^2=\dfrac{1}{u^2-1}$.

Второе уравнение получим, заменяя в первоначальном уравнении, квадратные корни их значениями: $u-v=1$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}1-v^2=\dfrac{1}{u^2-1},\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-v^2)(u^2-1)=1,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-1-u^2v^2+v^2=1,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u^2-2uv+v^2\right)+2uv-u^2v^2-2=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-v)^2+2uv-u^2v^2-2=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+2uv-u^2v^2-2=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-u^2v^2+2uv-1=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2v^2-2uv+1=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(uv-1)^2=0,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=1,\\ u-v=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u(u-1)=1,\\ v=u-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-u-1=0,\\ v=u-1.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$u^2 - u - 1 = 0$, $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $u_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $u_1 < 0$ не удовлетворяет условию $u \geq 0$ и является посторонним корнем. Остается второй корень. Делаем обратную подстановку и находим значение x.

$$x + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad x = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - 1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 8. **Решить уравнение:** $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

Решение

Найдем область допустимых значений переменной. Каждый из трехчленов, находящихся под знаком квадратных корней имеют отрицательные дискриминанты, поэтому, при всех действительных значениях x они принимают положительные значения, т. е. областью допустимых значений является множество всех действительных чисел, $x \in R$.

Положим $x^2+x+1=z$, тогда $x^2+x+4=z+3$, $2x^2+2x+9=2z+7$.

Уравнение примет вид $\sqrt{z+3}+\sqrt{z}=\sqrt{2z+7}$.

Область допустимых значений переменной z:

$$\begin{cases} z+3\ge 0, \\ 2z+7\ge 0, \\ z\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\ge -3, \\ z\ge -3{,}5, \\ z\ge 0, \end{cases} \Rightarrow z\ge 0, \text{ или } [0;\ \infty).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$z+3+2\sqrt{z^2+3z}+z=2z+7$, $2\sqrt{z^2+3z}=4$, $\sqrt{z^2+3z}=2$.

Возведем еще раз в квадрат обе части уравнения, получим:

$z^2+3z-4=0$, $z_1=-4$, $z_2=1$. $z_1=-4$ не удовлетворяет условию $z>0$ и является посторонним корнем. Остается один корень, $z=1$.

Выполним обратную подстановку $x^2+x+1=1$, $x^2+x=0$, $x(x+1)=0$,

$x_1=-1$, $x_2=0$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=0$.

Пример 9. **Решить уравнение:** $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$

Решение

Положим $\sqrt{2-x}=y$, $y\ge 0$, получим:

$$y+\frac{4}{y+3}-2=0, \quad y^2+3y-2y-6+4=0,$$

$y^2+y-2=0$, $y_1=-2$, $y_2=1$. $y_1=-2$ - не удовлетворяет условию $y\ge 0$ и является посторонним корнем.

Получим уравнение: $\sqrt{2-x}=1$, которое равносильно системе:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ 2-x=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x=1, \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1$.

Пример 10. **Решить уравнение:** $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

Решение

Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} x>0, \\ x+\sqrt{x}>0, \\ x-\sqrt{x}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)>0, \\ \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1,\ \ [1;\ \ \infty).$$

Преобразуем уравнение: $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Положим $\sqrt{x+\sqrt{x}}=u,\ \ u>0,\ \ \sqrt{x-\sqrt{x}}=v,\ \ v\ge 0,$ тогда получим $x+\sqrt{x}=u^2,\ \ x-\sqrt{x}=v^2$, вычитая из первого уравнения второе, находим:

$$2\sqrt{x}=u^2-v^2,\ \ \sqrt{x}=\frac{u^2-v^2}{2}.$$

Подставим в первоначальное уравнение, значения u и v, а также $\sqrt{x}$, приходим к уравнению:

$u-v=\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2-v^2}{2u},\ \ 4u\cdot(u-v)-3(u^2-v^2)=0,\ \ (u-v)(4u-3u-3v)=0$.

Отсюда находим, что $u-v=0,\ \ u=v,\ \ \sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{x-\sqrt{x}},\ \ x+\sqrt{x}=x-\sqrt{x}$,

$2\sqrt{x}=0,\ \ x=0$, но это невозможно, так как область допустимых значений переменной x, $x\ge 1$.

$4u-3u-3v=0,\ \ u=3v,\ \ u^2=9v^2,\ \ x+\sqrt{x}=9x-9\sqrt{x},\ \ 8x-10\sqrt{x}=0,\ \ 4x-5\sqrt{x}=0,$

$\sqrt{x}\cdot\left(4\sqrt{x}-5\right)=0,\ \ 4\sqrt{x}=5,\ \ 16x=25,\ \ x=\frac{25}{16},\ \frac{25}{16}\in[1;\ \ \infty).$

Ответ: $x=\frac{25}{16}$.

Пример 11. **Решить уравнение:** $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

Решение

Преобразуем уравнение, при этом рассмотрим три случая.

1-й случай, когда $x-3>0,\ \ x>3$, тогда получим уравнение:

$(x-3)^{\frac{x+1}{4}}=(x-3)^{\frac{x-2}{3}}$, $\frac{x+1}{4}=\frac{x-2}{3}$, $3x+3=4x-8$, $x=11$ - входит в промежуток $x>3$ и является корнем уравнения.

2-й случай, когда $x-3<0$, $x<3$, тогда получим уравнение:

$(3-x)^{\frac{x+1}{4}}=(3-x)^{\frac{x-2}{3}}$, $\frac{x+1}{4}=\frac{x-2}{3}$, $3x+3=4x-8$, $x=11$ - не входит в промежуток $x<3$ и не является корнем уравнения.

3-й случай, когда $x=3$, тогда получим:

$\sqrt[4]{|3-3|^{3+1}}=\sqrt[3]{|3-3|^{3-2}}$, $0=0$. $x=3$ - является корнем уравнения.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=11$.

Пример 12. **Решите уравнение:** $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$ **.**

Решение

Область допустимых значений: $x+4\geq 0$, $x\geq -4$, $x\in[-4;\ \infty)$.

Пусть $\sqrt[4]{x+4}=z$, $z\geq 0$, получим уравнение $z^2-3z+2=0$, $z_1=1$, $z_2=2$.

Получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x+4}=1,\\ \sqrt[4]{x+4}=2,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+4=1,\\ x+4=16,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-3,\\ x_2=12.\end{array}\right.$$

Оба корня входят в область допустимых значений.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=12$.

Пример 13. **Решить уравнение** $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$ **.**

Решение

1-й способ

Положим

$\sqrt{x-1}=u$, $u\geq 0$, $\sqrt{x+3}=v$, $v\geq 0$, $x-1=u^2$, $x+3=v^2$, $2x+2=u^2+v^2$,

$-2x=-(u^2+v^2)+2$, $4-2x=-(u^2+v^2)+6$, получим смешанную систему уравнений:

$$\begin{cases} u+v+2uv=-\left(u^2+v^2\right)+6, \\ u^2-v^2=-4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v+\left(u^2+2uv+v^2\right)-6=0, \\ v^2-u^2=4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v+(u+v)^2-6=0, \\ v^2-u^2=4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0. \end{cases}$$

Пусть $u+v=z$, $z\ge 0$, так как $u\ge 0$ и $v\ge 0$, получим квадратное уравнение $z^2+z-6=0, \; z_1=-3, \; z_2=2$. $z_1=-3$ - не удовлетворяют условию $z\ge 0$ и является посторонним корнем.

Итак, получим следующую смешанную систему:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ v^2-u^2=4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ (v-u)(v+u)=4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ (v-u)\cdot 2=4, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ v-u=2, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=2, \\ u=0, \\ u\ge 0, \quad v\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0, \\ \sqrt{x+3}=2, \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Проверка

При x = 1 получим равенство $\sqrt{1-1}+\sqrt{1+3}+2\sqrt{(1-1)(1+3)}=4-2\cdot 1$,

$0+2+0=2, \;\; 2=2$, значит, x = 1 является корнем уравнения.

Ответ: x = 1.

После нескольких примеров вы убедитесь, что универсальность этого метода очень велика. Большое количество иррациональных уравнений, требующих порой неоднократного возведения в квадрат (что может привести к нежелательным последствиям - появления посторонних корней), решаются этим методом значительно проще. Иррациональные уравнения, содержащие кубические радикалы и более высоких степеней поддаются этому методу.

Я обращаю на него внимания еще и потому, что решение систем уравнений у нас рассмотрено достаточно широко и объемно.

Во многих случаях, пользуясь этим методом, мы можем обойтись без неприятной и иногда трудоемкой процедуры нахождения области допустимых значений неизвестных.

Пример 14. **Решите уравнение** $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$

Решение

ОДЗ $x\in R$.

Положим $u = \sqrt[3]{x+45}$, $v = \sqrt[3]{x-16}$, тогда $u^3 = x+45$, $v^3 = x-16$.

Подставляя в уравнение u и v, получим u - v = 1, а вычитая из u^3 v^3, чтобы уничтожились х, получим уравнение $u^3 - v^3 = 61$.

В результате приходим к алгебраической системе уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = 61, \\ u - v = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2+uv+v^2) = 61, \\ u - v = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+v^2 = 61, \\ u - v = 1. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения u и подставим в первое уравнение, получим:

$$\begin{cases} (v+1)^2 + (v+1)v + v^2 = 61, \\ u = v+1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $v^2 + v - 20 = 0$, $v_1 = -5$; $v_2 = 4$.

Получаем два значения х: $\sqrt[3]{x-16} = -5$, $x_1 = -109$; $\sqrt[3]{x-16} = 4$, $x_2 = 80$.

Проверка

$x_1 = -109$, $\sqrt[3]{-109+45} - \sqrt[3]{-109-16} = 1$, $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{-125} = 1$, $-4+5=1$, $1=1$.

$x_2 = 80$, $\sqrt[3]{80+45} - \sqrt[3]{80-16} = 1$, $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64} = 1$, $5-4=1$, $1=1$.

Ответ: $x_1 = -109$, $x_2 = 80$.

Пример 15. **Решите уравнение** $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

Решение

Положим $u = \sqrt[3]{x-2}$, $v = \sqrt{x+1}$, $v \ge 0$, тогда $u^3 = x-2$, $v^2 = x+1$.

Данное уравнение примет вид: $u + v = 3$, а после вычитания из v^2 u^3, чтобы уничтожить х, получим уравнение $v^2 - u^3 = 3$, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} v^2 - u^3 = 3, \\ u + v = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-u)^2 - u^3 = 3, \\ v = 3-u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-u)^2 - u^3 = 3, \\ v = 3-u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0, \\ v = 3-u. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение

$u^2(u-1) + 6(u-1) = 0$, $(u-1)(u^2+6) = 0$, $u - 1 = 0$ или $u^2 + 6 = 0$.

Второе уравнение не имеет действительных корней в области действительных чисел, а из первого находим $u = 1$. Найдем значение v, причем только для того, чтобы убедится, что ее значение неотрицательно, в самом деле, v = 2 > 0.

Используя любое из этих значений u или v найдем х, $x = v^2 - 1$, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 16. **Решите уравнение** $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$.

Решение

Пусть $u=\sqrt{2x^2+3x+5},\ \ v=\sqrt{2x^2-3x+5},\ \ u\ge 0,\ \ \ v\ge 0$ тогда получим

$$u^2=2x^2+3x+5, \qquad (1)$$

$$v^2=2x^2-3x+5. \qquad (2)$$

Данное уравнение примет вид $u+v=3x$. Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), находим $u^2-v^2=6x$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} u^2-v^2=6x, \\ u+v=3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=2(u+v), \\ u+v=3x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $(u+v)(u-v-2)=0,$ отсюда либо $u+v=0,$ либо $u-v-2=0.$

Из того, что $u+v=0,$ следует, что $3x=0,\ \ x_1=0.$

Из того, что $u-v-2=0,\ \ u-v=2.$ Получим еще одну систему уравнений

$\begin{cases} u-v=2, \\ u+v=3x, \end{cases}$ сложив их получим $2u=3x+2.$

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2,\ \ 4(2x^2+3x+5)=9x^2+12x+4,$$

$$x^2-16=0,\ \ x_2=-4,\ \ x_3=4.$$

$x_2=-4$ не удовлетворяет уравнению, так как u + v = -12, что невозможно, так как $u\ge 0,\ \ v\ge 0,$ значит и $u+v\ge 0.$

Проверка

$x_1=0,\ \ \sqrt{2\cdot 0+3\cdot 0+5}+\sqrt{2\cdot 0-3\cdot 0+5}=3\cdot 0,\ \ 2\sqrt{5}=0,\ \ x_1=0$ - не является решением уравнения.

$x_3=4,\ \ \sqrt{49}+\sqrt{25}=12,\ \ 12=12,\ \ x=4$ - является решением уравнения.

Ответ: $x=4.$

Пример 17. **Решите уравнение** $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

Решение

Исключим радикалы введением новых неизвестных:

$$\sqrt{x}=u,\ \ u\ge 0;\ \sqrt{1-x}=v,\ \ v\ge 0;\ \sqrt{x-\sqrt{1-x}}=\sqrt{x-v}=w, w\ge 0.$$

$$u^2=x,\ \ v^2=1-x,\ \ w^2=x-v.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u+w=1, \\ v^2+u^2=1, \\ w^2=u^2-v. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $w=1-u$ и подставим в третье уравнение, получим:

$$(1-u)^2=u^2-v,\quad 1-2u+u^2=u^2-v,\quad v=2u-1.$$

Подставим во второе уравнение:

$$(2u-1)^2=1-u^2,\quad 4u^2-4u+1+u^2-1=0,$$

$$5u^2-4u=0,\quad u(5u-4)=0,\quad u_1=0,\quad u_2=\frac{4}{5}.$$

Находим значения других неизвестных $v_1=-1\le 0,$ что противоречит условию; $v_2=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}>0,\ \ w_2=1-u_2=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}>0.\ \ x=u^2=\frac{16}{25}.$

Проверка

$\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{16}{25}-\sqrt{1-\frac{16}{25}}}=\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{16}{25}-\frac{3}{5}}=\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1,\quad x=\frac{16}{25}$ является корнем уравнения.

Ответ: $x=\frac{16}{25}.$

Пример 18. **Решите уравнение** $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}=8\sqrt[3]{(x-1)^2}.$

Решение

ОДЗ - R, множество всех действительных чисел.

Положим $x+1=u^3,\ x-1=v^3,$ тогда получим

$u^2+2uv=8v^2,\ \ u^2+2uv+v^2=9v^2,\ \ \left(u^2+2uv+v^2\right)-9v^2=0,\ \ (u+v)^2-9v^2=0.$

Разложим левую часть уравнения на множители, как разность квадратов двух выражений:

$(u+v-3v)(u+v+3v)=0,\ \ (u-2v)(u+4v)=0.$

С другой стороны $u^3-v^3=2.$

Получим две системы уравнений:

$$(1)\ \begin{cases}u-2v=0,\\ u^3-v^3=2\end{cases}\ \text{или (2)}\ \begin{cases}u+4v=0,\\ u^3-v^3=2.\end{cases}$$

Решим первую систему уравнений

$$(1)\ \begin{cases}u-2v=0,\\ u^3-v^3=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2v,\\ u^3-v^3=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2v,\\ 8v^3-v^3=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2v,\\ v^3=\frac{2}{7},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=\frac{16}{7},\\ v^3=\frac{2}{7}.\end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases}x+1=\frac{16}{7},\\ x-1=\frac{2}{7},\end{cases}\quad x=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}.$$

Решим вторую систему

$$(2)\ \begin{cases} u+4v=0, \\ u^3-v^3=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-4v, \\ -64v^3-v^3=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=-64v^3, \\ v^3=-\dfrac{2}{65}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=\dfrac{128}{65}, \\ v^3=-\dfrac{2}{65}. \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x+1=\dfrac{128}{65}, \\ x-1=-\dfrac{2}{65}, \end{cases} \ x=\frac{63}{65}.$$

Ответ: $x_1=1\frac{2}{7},\ x_2=\frac{63}{65}.$

Задание 5

1. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2.$

2. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

3. $\sqrt{5+x+4\sqrt{x+1}}=2+\sqrt{x+1}.$

4. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5.$

5. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$

6. $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3.$

7. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}.$

8. $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7.$

Пример 19. **Решите уравнение** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$

Решение

Обычно примеры такого типа решают двукратным возведением в квадрат. При этом возникает необходимость отсеять приобретенные в результате возведения в квадрат посторонние корни, что при наличии в уравнении параметра оказывается довольно сложной задачей.

Решим это уравнение с помощью замены неизвестных, приведя его к системе уравнений.

Введем новые неизвестные

$\begin{cases} u=\sqrt{x+2}\geq 0, \\ v=\sqrt{x-a+2}\geq 0, \end{cases}$ учитывая, конечно, что $\begin{cases} x+2\geq 0, \\ x-a+2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq a-2. \end{cases}$

Неизвестные u и v связаны равенством $u^2-v^2=a,$ исходное уравнение принимает вид $u-v=1.$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-v^2=a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ (u-v)(u+v)=a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=(a+1)/2, \\ v=(a-1)/2. \end{cases}$$

Итак, $\begin{cases} \sqrt{x+2}=(a+1)/2\geq 0, \\ \sqrt{x-a+2}=(a-1)/2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{(a+1)^2}{4}-2, \\ x=\dfrac{(a+1)^2}{4}-2, \end{cases}$ откуда получаем

Ответ: $x=\dfrac{(a+1)^2}{4}-2$ при $a\geq 1,$ при $a<1$ решений нет.

Пример 20. **Решите уравнение** $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$

Решение

ОДЗ $x\geq 1$ или $x\in[1;\ \infty).$

Положим $u=\sqrt[3]{2-x},$ $v=\sqrt{x-1}\geq 0,$ тогда получим $\begin{cases} u^3+v^2=1, \\ u+v=1, \end{cases}$ следовательно, $u^3+u^2-2u=0,$ $u(u^2+u-2)=0,$ $u(u+2)(u-1)=0,$ $u_1=0,$ $u_2=-2,$ $u_3=1.$

Получаем три значения x: $x_1=2,$ $x_2=10,$ $x_3=1.$ Все значения входят в ОДЗ и являются решениями уравнения.

Ответ: $x_1=2,$ $x_2=10,$ $x_3=1.$

Пример 21. **Решите уравнение** $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4.$

Решение

ОДЗ $\begin{cases}97-x\geq 0,\\ x-15\geq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 97,\\ x\geq 15,\end{cases}\Leftrightarrow 15\leq x\leq 97$ или $[15;\ \ 97].$

Положим $u=\sqrt[4]{97-x}\geq 0,\quad v=\sqrt[4]{x-15}\geq 0,$ приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}u^4+v^4=82,\\ u+v=4,\end{cases}$$

(эта система уже известная нам - система симметрических уравнений, которую можно решить, используя основные симметрические многочлены, но мы вспомним еще раз методику их решения).

$$u^4+2v^2u^2+v^4-2v^2u^2=\left(u^2+v^2\right)^2-2(uv)^2=\left((u+v)^2-2uv\right)-2(uv)^2,$$

так как u + v = 4, получим $u^4+v^4=(16-2uv)^2-2(uv)^2=256-64uv+2(uv)^2.$

Получаем $2(uv)^2-64uv+256=82,\quad (uv)^2-32uv+87=0.$ Положим uv = t, получим квадратное уравнение $t^2-32t+87=0,\quad t_1=29,\quad t_2=3.$

В результате приходим к двум системам уравнений

$$(1)\ \begin{cases}u+v=4,\\ uv=29,\end{cases}\text{ и }(2)\ \begin{cases}u+v=4,\\ uv=3.\end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а решениями второй будут:

$$\begin{cases}u=1,\\ v=3,\end{cases}\text{ и }\begin{cases}u=3,\\ v=1.\end{cases}$$

Теперь находим x: $\sqrt[4]{x-15}=3,\quad x_1=96,\quad \sqrt[4]{x-15}=1,\quad x_2=16.$ Оба корня входят в ОДЗ и являются решениями уравнения.

Ответ: $x_1=96,\ x_2=16.$

Пример 22. **Решите уравнение** $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x.$

Решение

Положим $u=\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}\geq 0,\quad v=\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}\geq 0,$ тогда

$\begin{cases}u^2-v^2=x^2-x,\\ u+v=x,\end{cases}$ подстановка приводит первое уравнение системы к виду

$$x(u-v)=x(x-1).$$

Так как $x\neq 0,$ то u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u - v = x - 1, \\ u + v = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x - \dfrac{1}{2}, \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы (такое можно было бы проделать и с первым уравнением, результат получится тот же)

$$\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = \frac{1}{2}, \quad x - \frac{7}{x^2} = \frac{1}{4}, \quad 4x^3 - x^2 - 28 = 0.$$

x = 2 является корнем уравнения (вы можете его найти среди делителей свободного члена), разложим левую часть на множители:

$4x^3 - 8x^2 + 7x^2 - 14x + 14x - 28 = 0, \quad (x-2)(x^2 + 7x + 14) = 0,$ отсюда находим единственный корень x = 2. Выполним проверку, убеждаемся, что он удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: x = 2.

Задание 6

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1.$ **2**. $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p.$ **3**. $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1.$

4. $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} - \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 2x.$ **5**. $\sqrt{3-x} - \sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}} = 1.$

6. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{35}{12}.$ **7**. $\dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$

8*. $x = \sqrt{a-x}\sqrt{b-x} + \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\sqrt{a-x}.$

9*. $7\sqrt{4x^2 + 5x - 1} - 14\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 17x - 13.$

Конец документа