Оглавление

4. Метод исключения радикалов в иррациональном уравнении, умножением на сопряженный множитель

Пример 1. **Решить уравнение** $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4.$

Решение

Область допустимых значений $\begin{cases} 4x+2\ge 0, \\ 4x-2\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, \\ x\ge \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$ или $x\in\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

Умножим обе части уравнения на выражение сопряженное левой части уравнения, т. е. на $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}$, получаем:

$$\left(\sqrt{4x+2}\right)^2-\left(\sqrt{4x-2}\right)^2=4\left(\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}\right),\ 4=4\left(\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}\right),$$
$$\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=1.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4, \\ \sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=1, \end{cases}\quad 2\sqrt{4x+2}=5.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, придем к линейному уравнению $16x+8=25,\ x=\dfrac{17}{16}$.

Это значение входит в область допустимых значений и является корнем уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{17}{16}$.

Пример 2. **Решите уравнение** $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+1$.

Решение

Оба квадратных трехчлена имеют отрицательные дискриминанты, значит будут положительны при всех действительных значениях x, тогда ОДЗ $x\in R$.

Преобразуем уравнение. Перенесем из правой части квадратный корень в левую часть, получим $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=1$.

Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части, т. е. на $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

Придем к уравнению

$x^2+x+1-x^2+x-1=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1},\ \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2x$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=1, \\ \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2x. \end{cases}$$

Сложим уравнения систему $2\sqrt{x^2+x+1}=2x+1$. Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x+1\ge 0, \\ 4(x^2+x+1)=4x^2+4x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, \\ 4=1. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. **Решите уравнение** $\sqrt{Ax^2+Bx+C}+\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}=p.$

Решение

Сразу надо заметить, что мы не ставим целью исследование решения уравнения относительно параметров, а излагаем лишь общую технологию решения такого типа уравнений.

Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} Ax^2+Bx+C\ge 0, \\ Ax^2+Bx+C_1\ge 0. \end{cases}$$

Умножим обе части неравенства на выражение, сопряженное левой части уравнения $\sqrt{Ax^2+Bx+C}-\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}$.

Уравнение примет вид

$$Ax^2+Bx+C-Ax^2-Bx-C_1=p\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C}-\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}\right),$$

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}-\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}=\frac{C-C_1}{p}, \quad p\ne 0.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{Ax^2+Bx+C}+\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}=p, \\ \sqrt{Ax^2+Bx+C}-\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}=\dfrac{C-C_1}{p}. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы

$2\sqrt{Ax^2+Bx+C}=p+\dfrac{C-C_1}{p}$, $\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\dfrac{p^2+C-C_1}{2p}$.

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{p^2+C-C_1}{2p} \ge 0, \\ Ax^2+Bx+C=\left(\dfrac{p^2+C-C_1}{2p}\right)^2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы

$$Ax^2+Bx+\frac{4p^2C-\left(p^2+C-C_1\right)^2}{4p^2}=0,\quad D=B^2-4A\,\frac{4p^2C-(p^2+C-C_1)^2}{4p^2}=$$

$$=\frac{4p^2B^2-4A\left(4p^2C-\left(p^2+C-C_1\right)^2\right)}{4p^2}=\frac{p^2B^2-A\left(4p^2C-\left(p^2+C-C_1\right)^2\right)}{p^2}.$$

Ответ: $x_{1,\,2}=\dfrac{B^2\pm\sqrt{p^2B^2-A\left(4p^2C-\left(p^2+C-C_1\right)^2\right)}}{2Ap}.$

Пример 4. **Решите уравнение** $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}.$

Решение

ОДЗ $x\in R,$ т. е. множество всех действительных чисел.

Преобразуем уравнение $\sqrt[3]{(2-x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=0.$

В левой части уравнения получили неполной квадрат разности двух выражений. Умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}$. В левой части получим сумму кубов этих выражений $2-x+7+x=0,\quad 9=0,$ - корней нет.

Ответ: нет решений.

Задание 7

1. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$ **2.** $\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2.$ **3.** $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4.$

4. $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=b.$ **5**. $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}.$

6. $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}+\dfrac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\sqrt{a}.$ 7. $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{5-2x}.$

8. $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}=\dfrac{x}{3}$

5. Выделение полного квадрата (квадрата двучлена)

Приведение к уравнениям, содержащих абсолютную величину.

Пример 1. **Решите уравнение** $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}.$

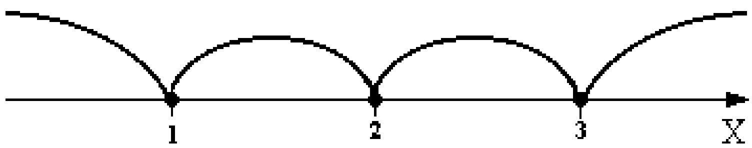
Решение

Область допустимых значений: $x\in R$.
Замечаем, что под знаками корней находятся полные квадраты. Преобразуем их:

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2}.$$

Приходим к уравнению, содержащему модули:

$$|x-2|-|x-3|=|x-1|.$$



При $x\le 1$, получаем уравнение $-(x-2)+(x-3)=-(x-1)$, $x=2$. Это значение x не входит в промежуток $x\le 1$.

При $1<x\le 2$, получаем уравнение $-(x-2)+(x-3)=x-1$, $x=0$. Это значение также не входит в промежуток $1<x\le 2$ и не может быть корнем уравнения.

При $2<x\le 3$, получаем уравнение $x-2+(x-3)=x-1$, $x=4$ - не является корнем уравнения.

При $x>3$, получаем $x-2-x+3)=x-1$, $x=2$ - не является корнем.

Ответ: корней нет.

Пример 2. **Решите уравнение** $x^2+4x-8\sqrt{8x}+20=0.$

Решение

Область допустимых значений: $x\ge 0$ или $x\in[0;\ \infty)$.
Преобразуем уравнение так, чтобы получить сумму двух полных квадратов:

$$x^2+4x+(8x-8\sqrt{8x}+16)-8x+4=0,\ (x^2-4x+4)+(8x-8\sqrt{8x}+16)=0,$$
$$(x-2)^2+(\sqrt{8x}-4)^2=0.$$

Это равенство будет выполняться тогда, когда $x-2=\sqrt{8x}-4=0$, что получается только при одном значении x, $x=2$.

Ответ: x = 2.

Пример 3. **Решите уравнение** $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$

Решение

Прежде чем находить область допустимых значений неизвестной, преобразуем уравнение:

$$\sqrt{(x+1)-2\cdot 2\sqrt{x+1}+4}+\sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}=1.$$

Замечаем, что под корнями находятся полные квадраты двучленов

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=1.$$

Для области допустимых значений переменной достаточно потребовать, чтобы $x+1\ge 0,\quad x\ge -1.$

Уравнение примет вид $\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=1.$

Найдем значения x, при которых каждое из выражений под модулем обращается в нуль.

Первое выражение: $\sqrt{x+1}-2=0,\quad \sqrt{x+1}=2,\quad x+1=2,$ при $x=1.$

Второе выражение: $\sqrt{x+1}-1=0,$ при $x=0.$

Теперь рассмотрим полученное уравнение на промежутках (с учетом ОДЗ):

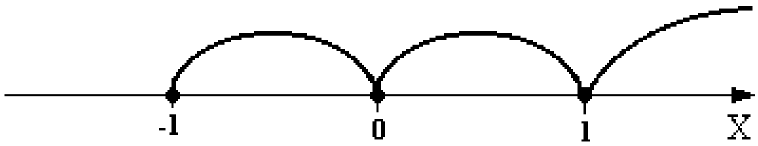


Рис. 6

Сразу проверим, является ли x = -1 корнем уравнения. При x = -1 получим:

$\left|\sqrt{-1+1}-2\right|+\left|\sqrt{-1+1}-1\right|=1,\quad 3=1,$ значит x = -1 не является решением уравнения.

Рассмотрим уравнение на каждом из трех промежутков. В результате получим три системы уравнений.

$$(1)\ \begin{cases}-1<x\le 0,\\ -\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x+1}+1=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 0,\\ \sqrt{x+1}=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 0,\\ x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\ x=0.$$

$$(2)\ \begin{cases}0<x\le 1,\\ -\sqrt{x+1}+2+\sqrt{x+1}-1=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\le 1,\\ 1=1,\end{cases}\Leftrightarrow\ 0<x\le 1.$$

$$(3)\ \begin{cases}x>1,\\ \sqrt{x+1}-2+\sqrt{x+1}-1=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ \sqrt{x+1}=2,\end{cases}\Leftrightarrow\ x=3.$$

Ответ: $0\le x\le 1,\quad x=3.$

Задание 8

1. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2},\quad x>0.$ **2**. $x^2-3x-6\sqrt{3x}+18=0.$

3. $x^{10}-x^5-2\sqrt{2x^5}+2=0.$ **4**. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

5. $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0.$

6. Разные уравнение

Пример 1. **Решите уравнение** $\sqrt{25+|\ 16x^2-25|}=4+4|x+1|.$

Решение

Область допустимых значений переменной - множество всех действительных чисел.
Выражения под знаками модулей обращаются в нуль, если

$16x^2-25=0,\quad x^2=\dfrac{25}{16},\quad x_1=-\dfrac{5}{4},\quad x_2=\dfrac{5}{4}$ и $x+1=0,\quad x=-1.$

Получаем четыре промежутка, на каждом из которых решим данное уравнение:

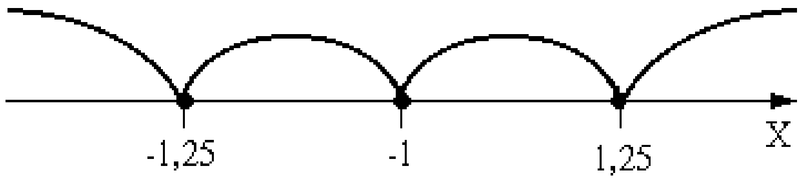


Рис. 7

При $-\infty<x\le -1{,}25$, уравнение примет вид $\sqrt{25+16x^2-25}=4-4x-4,$

$\sqrt{16x^2}=-4x,\quad |4x|=-4x,\quad -4x=-4x,$ значит $-\infty<x\le -1{,}25$.

При $-1{,}25<x\le -1$, уравнение примет вид $\sqrt{25-16x^2+25}=4-4x-4,$

$\sqrt{50-16x^2}=-4x,$ так как правая часть уравнения положительна на рассматриваемом промежутке, тогда возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$50-16x^2=16x^2,\quad 32x^2=50,\quad x^2=\frac{25}{16},\quad x_1=-\frac{5}{4},\quad x_2=\frac{5}{4}.$$

Оба корня не входят в данный промежуток и не являются решениями уравнения.

При $-1<x\le 1{,}25$ получим уравнение $\sqrt{25-16x^2+25}=4+4x+4,$

$\sqrt{50-16x^2}=8+4x$, при $-1<x\le 1{,}25$ правая часть уравнения положительна.

Возведем обе его части в квадрат:

$50-16x^2=64+64x+16x^2,\quad 32x^2+64x+14=0,\quad 16x^2+32x+7=0.$

$x_1=-\dfrac{7}{4},\quad x_2=-\dfrac{1}{4}.$ Первый корень не входит в промежуток $-1<x\le 1{,}25$ и не является корнем уравнения, второй корень входит в этот промежуток, значит он может являться корнем уравнения.

Выполним проверку этого корня $x=-\dfrac{1}{4}$, $\sqrt{25+\left|\ 1-25\right|}=4+4\left|-\dfrac{1}{4}+1\right|,$

$\sqrt{49}=4+3,\quad 7=7,$ значит $x=-\dfrac{1}{4}$ является корнем уравнения.

При $1{,}25<x<\infty$ получим уравнение $\sqrt{25+16x^2-25}=4+4x+4,\quad |4x|=8+4x.$

$4x=8+4x,\quad 0\ne 8.$ На этом промежутке корней нет.

Ответ: $(-\infty;\ \ -1{,}25]\cup\{-0{,}25\}.$

Пример 2. **Решите уравнение** $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}=x.$

Решение

Положим $y=\sqrt{a-x}$, $z=\sqrt{a-y}$, тогда уравнение примет вид $\sqrt{a-z}=x$ и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} y^2=a-x, \\ z^2=a-y, \\ x^2=a-z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-z^2=y-x, \\ z^2-x^2=z-y, \\ x^2-y^2=x-z. \end{cases}$$

Перемножив эти равенства, получим

$$(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)=(y-x)(z-y)(x-z),$$

$$(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)(x-y)(x+y)-(y-x)(z-y)(x-z)=0,$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)\big((x+y)(y+z)(z+x)+1\big)=0,$$

и поскольку $x,\ y,\ z\geq 0,$ то $(x-y)(y-z)(z-x)=0.$

Заметим теперь, что $y=z\Rightarrow\sqrt{a-x}=\sqrt{a-y}\Rightarrow x=y,$

$z=x\Rightarrow\sqrt{a-y}=\sqrt{a-z}\Rightarrow y=z\Rightarrow x=y,$ и поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $x=y,$ т. е. $x=\sqrt{a-x}$, $x^2=a-x$, $x^2+x-a=0.$

Последнее уравнение имеет неотрицательные корни только при $a\geq 0,$ и такой корень только один: $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ при $a\geq 0,$ а при а < 0 корней не имеет.

Ответ: 1. При $a\geq 0$ уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

2. При $a<0$ уравнение корней не имеет.

Пример 3. **Решите уравнение** $(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$

Решение

Введем подстановку $y+c=\sqrt{x}-2$ и $y-c=\sqrt{x}-3$. Вычтем из первого равенства второе и найдем неопределенный коэффициент с: $2c=-2+3$, $c=\dfrac{1}{2}$.

Теперь выполним подстановку $y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{x}-2$, $y-\dfrac{1}{2}=\sqrt{x}-3$, получим уравнение $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^4=1,$

$$y^4+2y^3+\frac{1}{2}y^2+y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}+y^4-2y^3+\frac{1}{2}y^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=1,$$

$$2y^4+3y^2+\frac{1}{8}=1,\quad 2y^4+3y^2-\frac{7}{8}=0,\quad 16y^4+24y^2-7=0.$$

Положим $z=y^2$, тогда получим $16z^2+24z-7=0$, $z_1=-\dfrac{7}{4}$, $z_2=\dfrac{1}{4}$.

Первый корень не удовлетворяет уравнению, значит $y^2=\dfrac{1}{4}$, отсюда $y_1=-\dfrac{1}{2}$, $y_2=\dfrac{1}{2}$.

Получим два уравнения $\sqrt{x}-2{,}5=-0{,}5$ и $\sqrt{x}-2{,}5=0{,}5,\quad x_1=4,\quad x_2=9.$

Ответ: $x_1=4,\quad x_2=9.$

Пример 4. **Решить уравнение** $\sqrt{x-4a+16}-2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0$ **и установить, при каких действительных значениях a уравнение имеет решение.**

Решение

Перепишем данное уравнение так: $\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}.$
Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, получим:
$2x-4a+16+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=4x-8a+16,$ или $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$
Снова возведем обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$16x=4a^2,\quad x=\frac{a^2}{4}.$$

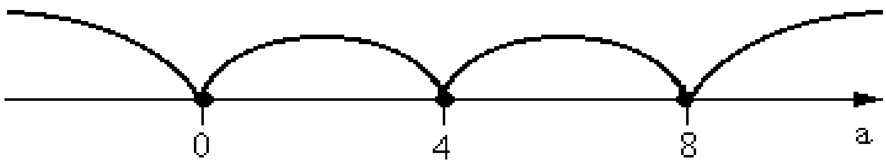
Остается установить, при каких значениях a уравнение имеет решение.

Подставляя в данное уравнение вместо x выражение $\frac{a^2}{4}$, получим:

$\sqrt{a^2-16a+64}-2\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2}=0;\quad \sqrt{(a-8)^2}-2\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}=0;$

$$|a-8|-2|a-4|+|a|=0.$$

Последнее равенство рассмотрим на каждом из четырех промежутков:



Если $a\le 0$, то равенство примет вид: $8-a-2(4-a)-a=0,\quad 0=0$ и выполняется тождество. Следовательно, при $a\le 0$ уравнение имеет решение.

Если $0<a<4$, то равенство примет вид: $8-a-2(4-a)+a=0,\quad a=0,$ которое не выполняется при $0<a<4$; следовательно, при а = 0 уравнение не имеет решений.

Если $4\le a<8$, то равенство не выполняется, так как $8-a-2(a-4)+a\ne 0.$

Если $8\le a<\infty$, то равенство выполняется, так как $a-8-2a+8+a=0,\quad 0=0.$

Итак, при $a\le 0$ и при $8\le a<\infty$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a^2}{4}.$

При $0<a<8$ уравнение не имеет решений.

Ответ: **1**. При $a\in(-\infty;\ 0]\cup[8;\ \infty)$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a^2}{4}.$

2. При $0<a<8$ уравнение не имеет решений.

Задание 9

Решите уравнение

1. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$; **2**. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$; **3**. $\sqrt{3x-a}=a-2x.$

6. Использование неравенства Коши и других при решении иррациональных уравнений

Пример 1. **Решите уравнение** $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$

Решение

В силу неравенства Коши $\left(\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2},\ \textit{где}\ \ a\ge 0,\ \ b\ge 0\right)$ - среднее геометрическое неотрицательных чисел не меньше их среднего арифметического, имеем:

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{(x^2+x-1)\cdot 1}\le\frac{(x^2+x-1)+1}{2}=\frac{x^2+x}{2},$$

$$\sqrt{x-x^2+1}=\sqrt{(x-x^2+1)\cdot 1}\le\frac{(x-x^2+1)+1}{2}=\frac{x-x^2+2}{2},$$ следовательно, левая часть неравенства не превосходит x + 1. В самом деле, сложим обе части неравенств, получим:

$$\sqrt{x^2+x-1}\le\frac{x^2+x}{2},\quad \sqrt{x-x^2+1}\le\frac{x-x^2+2}{2},\qquad \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le\frac{x^2+x}{2}+\frac{x-x^2+2}{2},$$

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le\frac{x^2+x+x-x^2+2}{2},\quad \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le x+1.$$

Таким образом, из данного уравнения следует, что правая часть, будучи равна левой, также будет меньше или равна x + 1, т. е. $x^2-x+2\le x+1,$ $(x-1)^2\le 0,$ значит x = 1. Это значение и является единственным решением данного уравнения.

Ответ: x = 1.

Пример 2. **Решить уравнение** $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3.$

Решение

Сделаем несколько оценок с помощью неравенства Коши:

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}\le\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2},\quad \sqrt[4]{1-x}=\sqrt{\sqrt{1-x}\cdot 1}\le\frac{\sqrt{1-x}+1}{2},$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt{\sqrt{1+x}\cdot 1}\le\frac{\sqrt{1+x}+1}{2},$$

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}\le 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 1+\frac{1+(1+x)}{2}+\frac{1+(1-x)}{2}=3.$$

Так как равенство во всех случаях имеет место только при x = 1, то это число и является единственным корнем уравнения.

Ответ: x = 1.

Пример 3. **Решите уравнение** $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}.$

Решение

Область допустимых значений: $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3, \quad [-1; \quad 3].$

Воспользуемся неравенством $a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$.

Геометрическая интерпретация этого неравенства: скалярное произведение двух векторов не превосходит произведение их длин. Оно является частным случаем (n = 2) общего неравенства Коши-Буняковского: для любых 2n действительных чисел $a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n; \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n$ имеет место неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

при этом знак равенства достигается лишь в случае, когда $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

С геометрической точки зрения, равенство имеет место в случае коллинеарности векторов.

Имеем $x\sqrt{1+x} + 1 \cdot \sqrt{3-x} \leq \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(1+x)+(3-x)} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Значит, векторы (x, 1) и $(\sqrt{1+x}, \quad \sqrt{3-x})$ коллинеарны, т. е. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$,

$x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1}, \quad x^3 - 3x + x + 1 = 0, \quad (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2},$

$x_3 = 1 - \sqrt{2}$. Последний корень является посторонним.

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}.$

Задание 10

Найти действительные решения уравнения: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1} + 4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10.$

Указание. Переписать уравнение в виде $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} + 4\sqrt[3]{(y-1)^2} = 10.$

После этого применить неравенство: если $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, причем равенство выполняется лишь при $a = 1$.

8. Уравнения вида f(f(x)) = x

Теорема. Если y = f(x) - монотонно возрастающая функция, то уравнения $f(x) = x \quad и \quad f(f(x) = x$ равносильны.

Замечание. Теорема имеет обобщение. Если y = f(x) монотонно возрастает, то при любом k уравнения $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots)}_{k} = x$ и $f(x) = x$ равносильны.

Применение этой теоремы к решению иррациональных уравнений.

Пример 1. **Решите уравнение** $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1.$

Решение

Перепишем уравнение к виду: $1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x.$

Рассмотрим функцию $f(x)=1+\sqrt{x}$. Эта функция монотонно возрастает. Имеем уравнение $f(f(x)=x$. В соответствии с теоремой заменяем его равносильным уравнением $f(x)=x$ или $1+\sqrt{x}=x$. Преобразуем уравнение, а затем решим его, как квадратное относительно $\sqrt{x}$, получим:

$$x-\sqrt{x}-1=0,\quad \sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Пример 2. **Решите уравнение** $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$

Решение

Преобразуем уравнение:

$$\frac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1},\quad \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x-1,\quad 1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x,\quad \frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x.$$

Полученное уравнение имеет вид: $f(f(x)=x$, где $f(x)=\dfrac{1+x^3}{2}.$

Согласно теореме имеем равносильное уравнение:

$$\frac{x^3+1}{2}=x,\quad x^3-2x+1=0,\quad (x-1)(x^2+x-1)=0,\quad x_1=1,\quad x_{2,\,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x_1=1,\quad x_{2,\,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Задание 11

Решите уравнение $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$. ***Указание***. Рассмотреть данное уравнение относительно **а**.

9. Графическое решение иррациональных уравнений

Пример 1. **Решить графически уравнение** $\sqrt{x}=2x^2-1.$

Решение

Для графического решения уравнения, достаточно построить графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=2x^2-1$, и найти абсциссы их точек пересечения, которые и будут являться решениями уравнения.

Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является одна ветвь параболы с вершиной в точке (0; 0), ветви которой направлены вдоль оси OX. Поскольку $x \geq 0$, то графиком будет являться ветвь, расположенная выше оси OX в 1-й четверти.

Графиком функции $y = 2x^2 - 1$ является парабола с вершиной в точке (0; -1), ветви которой направлены вверх, пересекающая ось OX в точках: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Для более точного построения графиков можно взять несколько дополнительных точек.

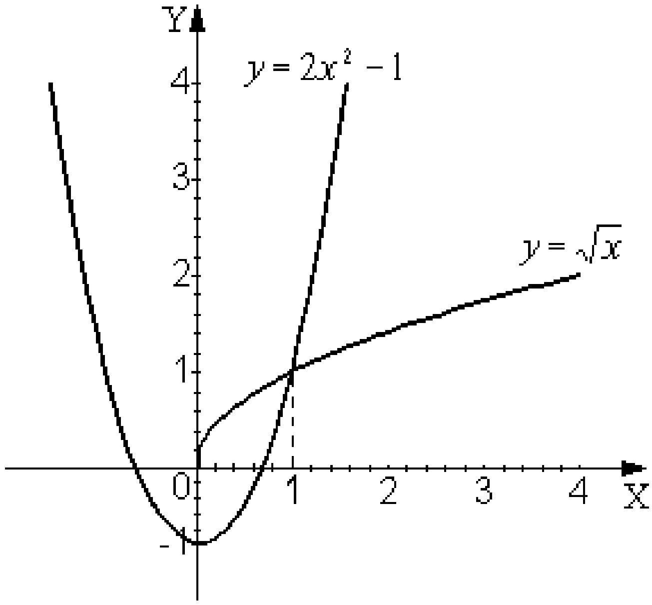


Рис. 8

Графики имеют одну точку пересечения, абсцисса которой равна 1.

Ответ: x = 1.

Пример 2. **Решить графически уравнение** $\sqrt{x+1} = x - 1$.

Решение

Построим графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = x - 1$, и найдем абсциссы их точек пересечения.

Графиком функции $y = \sqrt{x+1}$ является одна ветвь параболы, расположенной вдоль оси OX, в 1-й четверти, с вершиной в точке (-1; 0).

Графиком функции $y = x - 1$ является прямая, проходящая через точки (1; 0) и (0; -1).

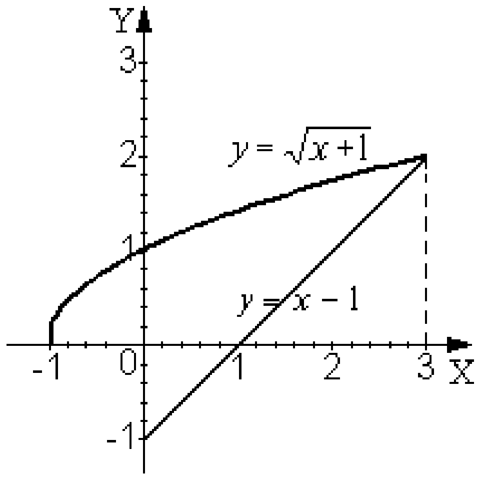


Рис. 9

Графики имеют одну точку пересечения с абсциссой 3.

Ответ: x = 3.

Пример 3. **Решить графически уравнение** $\sqrt{25-x} + \sqrt{9+x} = 2$.

Решение

Для графического решения, преобразуем уравнение к виду:

$$\sqrt{25-x} = 2 - \sqrt{9+x}, \quad \sqrt{25-x} = -\left(\sqrt{9+x} - 2\right).$$

Теперь ясно, что надо построить графики функций $y = \sqrt{25-x}$ и $y = -\left(\sqrt{9+x} - 2\right)$.

Графиком функции $y = \sqrt{25-x}$ является ветвь параболы, направленная

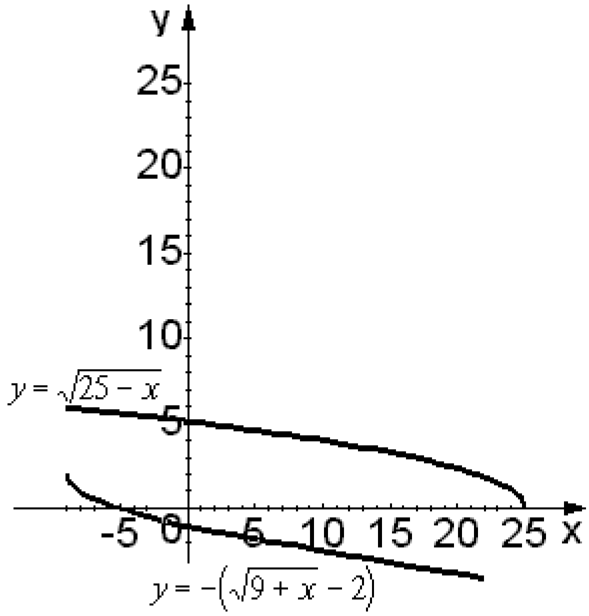


Рис. 10

влево вдоль оси OX, с вершиной в точке (25; 0).

Построение графика функции $y = -\left(\sqrt{9+x} - 2\right)$ можно выполнить в несколько этапов:

1) построить график функции $y = \sqrt{9+x}$, которым является ветвь параболы, направленная вдоль оси OX вправо, лежащая выше оси OX, с вершиной в точке $(-9;\ \ 0)$;

2) эту ветвь надо перенести параллельно самой себе вдоль оси OY на 2 единицы вниз, тогда получим график функции $y = \sqrt{9+x} - 2$;

3) полученную кривую, надо симметрично отразить в оси OX, тогда получится график функции $y = -\left(\sqrt{9+x} - 2\right)$.

Графики не имеют точек пересечения, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 4. **Решить графически уравнение** $\sqrt{x+2} = \dfrac{4}{x}$.

Решение

Графиком функции $y = \sqrt{x+2}$ является ветвь параболы, расположенной вдоль оси OX, направленной влево, с вершиной в точке (-2; 0), лежащей выше оси OX. Для более точного ее построения можно взять несколько дополнительных точек из промежутка $x \geq -2$.

Графиком функции $y = \dfrac{4}{x}$ является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных в 1-й и 3-й четвертях, но для решения уравнения достаточно построить одну ветвь, лежащую в 1-й четверти, ибо первый график лежит только выше оси OX. Ее можно построить "*по точкам*".

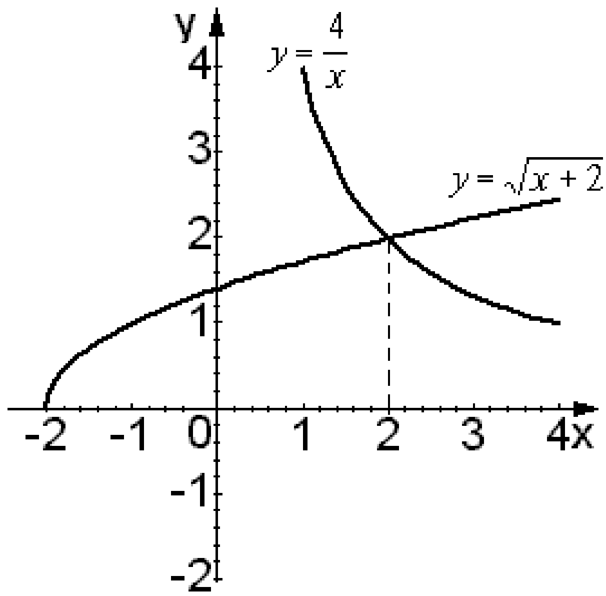


Рис. 11

Графики имеют одну точку пересечения с абсциссой 2.

Ответ: x = 2.

Пример 5. **Решить графически уравнение** $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x^2}$.

Решение

Построение графика функции $y=\sqrt{x+2}$ было рассмотрено в примере 4.

Что является графиком функции $y=\sqrt{8-x^2}$?

Во-первых, график расположен на промежутке $8-x^2\geq 0,\quad -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$.

Во-вторых, преобразуем функцию $y=\sqrt{8-x^2}$, возводя обе ее части в квадрат, получим: $y^2=8-x^2,\quad x^2+y^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$. Таким образом, стало ясно, что график этой функции - окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $2\sqrt{2}$.

Нам достаточно построить часть этой окружности на промежутке $-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$.

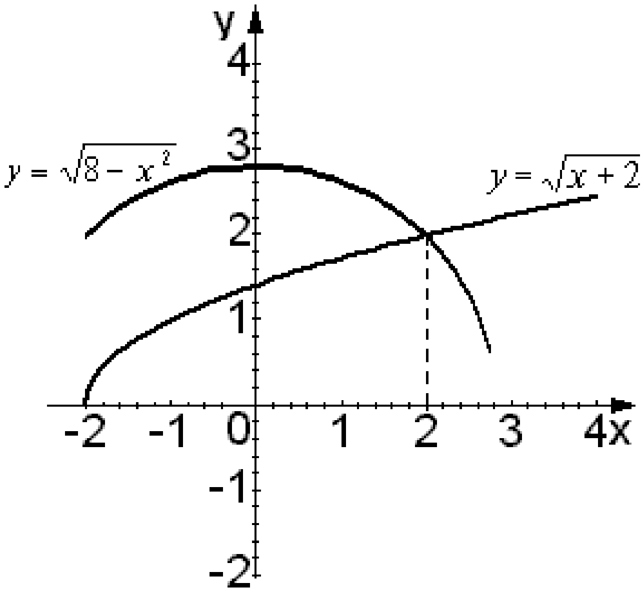


Рис. 12

Графики пересекаются в точке с абсциссой 2.

Ответ: x = 2.

Задание 12

Решить графически уравнения.

1. $\sqrt{x}=2x-6$. **2**. $\sqrt{\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{8}x+1\frac{1}{4}$. **3**. $\sqrt{3x-5}=x^2-7$.

4. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$. **5**. $\sqrt{x}=\frac{1}{x}+1\frac{3}{4}$.

10. Решение систем иррациональных уравнений

Решить системы уравнений на множестве действительных чисел

10.1 Метод введения нового неизвестного (замены неизвестных)

Пример 1. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Решение

Область допустимых значений неизвестных: $\begin{cases} x-7>0, \\ y+6>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7, \\ y>-6. \end{cases}$

Положим $\dfrac{1}{\sqrt{x-7}} = u, \quad u>0; \quad \dfrac{1}{\sqrt{y+6}} = v, \quad v>0$, тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7u-4v=\dfrac{5}{3}, \\ 5u+3v=\dfrac{13}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21u-12v=5, \\ 30u+18v=13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63u-36v=15, \\ 60u+36v=26, \end{cases} \Leftrightarrow 123u=41, \quad u=\frac{1}{3}, \quad v=\frac{1}{6}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-7}} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-7}=3, \\ \sqrt{y+6}=6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=9, \\ y+6=36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16, \\ y=30. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=16, \\ y=30. \end{cases}$

Пример 2. $\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Решение

Положим $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = z, \quad z>0$, тогда $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{1}{z}$, второе уравнение примет вид:

$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{2}, \quad 2z^2-5z+2=0, \quad z_1=\dfrac{1}{2}, \quad z_2=2.$

Таким образом, получим: $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{1}{2},\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{4},\quad y=4x$. Подставляя в первое уравнение, найдем значение x: $x+4x=10,\quad x=2,\quad y=8.$

Подставим второе значение z и найдем x и y:

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=2,\quad \frac{x}{y}=4,\quad x=4y;\quad 4y+y=10,\quad y=2,\quad x=8.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=8, \end{cases} \begin{cases} x_2=8, \\ y_2=2. \end{cases}$

Пример 3. $\begin{cases} x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$

Решение

Область допустимых значений: $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы:

$x-2\sqrt{xy}+y-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-2=0,\quad \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-2=0.$

Положим $\sqrt{x}-\sqrt{y}=z,$ тогда получим квадратное уравнение:

$z^2-z-2=0,$ которое имеет корни $z_1=-1,\quad z_2=2.$

В результате, данная система распадается на две системы:

(1) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$

Системы уравнений решим методом сложения.

Решим первую систему: $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=7,\quad 4x=49,\quad x=\frac{49}{4},\quad y=\frac{81}{4}.$

Решим вторую систему: $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=10,\quad x=25,\quad y=9.$

Все корни входят в область допустимых значений и являются решениями системы уравнений.

Ответ: $\begin{cases} x_1=\frac{49}{4}, \\ y=\frac{81}{4}, \end{cases} \begin{cases} x_2=25, \\ y_2=9. \end{cases}$

Пример 4. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{cases}$

Решение

Область допустимых значений определяется совокупностью двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y\geq 0,\\ x-y>0,\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x+y\leq 0,\\ x-y<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}-\dfrac{12}{x-y}=0,\quad x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0,$ поскольку $x-y\neq 0.$

Положим $\sqrt{x^2-y^2}=z,\quad z\geq 0,$ получим квадратное уравнение:

$z^2-z-12=0,\quad z_1=-3,\quad z_2=4.$ Поскольку $z\geq 0$, то первый корень является посторонним, остается один корень $z=4.$

Систем уравнений примет вид: $\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=4,\\ xy=15,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=16,\\ xy=15.\end{cases}$

Умножим первое уравнение на 15, а второе на -16 и сложим левые и правые части этих уравнений, придем к однородному уравнению.

$$\begin{cases}15x^2-15y^2=240,\\ -16xy=-240,\end{cases}\Leftrightarrow 15x^2-16xy+15y^2=0.$$

Заметим, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$, в противном случае, второе уравнение $xy=15$ обращается в ложное равенство: $0=15.$

Разделим обе части уравнения на y^2, получим уравнение:

$15\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-16\cdot\dfrac{x}{y}-15=0.$ Положим $\dfrac{x}{y}=u,$ тогда получим квадратное уравнение:

$15u^2-16u-15=0,\quad u_1=-\dfrac{3}{5},\quad u_2=\dfrac{5}{3},$ тогда $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}.$

Получим две системы уравнений:

(1) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{5},\\ xy=15\end{cases}$ и (2) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3},\\ xy=15.\end{cases}$

Решим первую систему: $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}y,\\ -\dfrac{3}{5}y^2=15.\end{cases}$ Эта система решений не имеет.

Решим вторую систему: $\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}y,\\ \dfrac{5}{3}y^2=15,\end{cases}\Leftrightarrow y^2=9,\quad \begin{cases}y_1=-3,\\ x_1=-5,\end{cases}\quad\begin{cases}y_2=3,\\ x_2=5.\end{cases}$

Обе пары значений входят в область допустимых значений.

(Возможен и другой способ решения).

Ответ: $\begin{cases}x_1=-5,\\ y_1=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=5,\\ y_2=3.\end{cases}$

Пример 5. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ x^2+y^2+xy=84. \end{cases}$

Решение

Область допустимых значений определяется совокупностью двух систем неравенств:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ y\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Равенство нулю одновременно x и y невозможно, в противном случае получим несовместную систему уравнений: $\begin{cases} 0=14, \\ 0=84. \end{cases}$

Преобразуем каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ x^2+2xy+y^2-xy=84, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ (x+y)^2-xy=84. \end{cases}$$

Положим $x+y=u,\quad \sqrt{xy}=v,\quad v\ge 0,$ отсюда $xy=v^2$, получим систему:

$$\begin{cases} u+v=14, \\ u^2-v^2=84, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=14, \\ (u+v)(u-v)=84, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=14, \\ u-v=6, \end{cases} \Leftrightarrow u=10,\quad v=4.$$

Придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{xy}=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10, \\ xy=16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x, \\ x(10-x)=16, \end{cases} \Leftrightarrow x^2-10x+16=0,\quad x_1=2,\quad x_2=8,$$

$y_1=8,\quad y_2=2.$

Ответ: $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=8, \end{cases} \begin{cases} x_2=8, \\ y_2=2. \end{cases}$

Пример 6. $\begin{cases} \sqrt[3]{6x+5}-\sqrt[3]{4x-3y}=1, \\ 6x+3y=4. \end{cases}$

Решение

Обозначим $\sqrt[3]{6x+5}=u,\ \sqrt[3]{4x-3y}=v,$ тогда $6x+5=u^3,\quad 4x-3y=v^3.$

Из первого равенства находим: $6x=u^3-5.$ Выразим 3y из системы уравнений: $\begin{cases} 6x+5=u^3, \\ 4x-3y=v^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+10=2u^3, \\ -12x+9y=-3v^3, \end{cases} \Leftrightarrow 9y+10=2u^3-3v^3,\quad 3y=\frac{2}{3}u^3-v^3-\frac{10}{3}.$

Подставим в первоначальную систему уравнений значения, получим:

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^3-5+\frac{2}{3}u^3-v^3-\frac{10}{3}=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1+v, \\ 5u^3-3v^3=37, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1+v, \\ 5(1+v)^3-3v^3=37, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ 5 + 15v + 15v^2 + 5v^3 - 3v^3 = 37, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ 2v^3 + 15v^2 + 15v - 32 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ 2v^3 - 2v^2 + 17v^2 - 17v + 32v - 32 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ 2v^2(v-1) + 17v(v-1) + 32(v-1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ (v-1)(2v^2 + 17v + 32) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v, \\ v_1 = 1, \quad v_{2,\,3} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{33}}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} u_2 = \dfrac{-13 - \sqrt{33}}{4}, \\ v_2 = \dfrac{-17 - \sqrt{33}}{4}, \end{cases} \begin{cases} u_3 = \dfrac{-13 + \sqrt{33}}{4}, \\ v_3 = \dfrac{-17 + \sqrt{33}}{4}. \end{cases} \right.$$

$$\begin{cases} 6x + 5 = 8, \\ 4x - 3y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}, \\ y_1 = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 5 = \left(\dfrac{-13 \pm \sqrt{33}}{4} \right)^3, \\ 4x - 3y = \left(\dfrac{-17 \pm \sqrt{33}}{4} \right)^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2,\,3} = \dfrac{-317 \pm 45\sqrt{33}}{32}, \\ y_{2,\,3} = \dfrac{1015 \pm 135\sqrt{33}}{48}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}, \\ y_1 = \dfrac{1}{3}, \end{cases} \begin{cases} x_{2,\,3} = \dfrac{-317 \pm 45\sqrt{33}}{32}, \\ y_{2,\,3} = \dfrac{1015 \pm 135\sqrt{33}}{48}. \end{cases}$

10.2. Другие методы решения систем уравнений

Пример 7. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$

Решение

Область допустимых значений каждого из неизвестных - множество всех действительных чисел: $x \in R, \quad y \in R$.

Возведем обе части первого уравнения в куб, получим:

$x + 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y = 27, \quad x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 27.$

Подставим в полученное уравнение значения суммы $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$ из первого уравнения и значение произведения $xy = 8$ из второго уравнения, получим:

$x + y + 9\sqrt[3]{8} = 27, \quad x + y = 9.$ Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Пример 8. $\begin{cases} \left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=185, \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65. \end{cases}$

Решение

Умножим первое уравнение на 13, а второе на -37 и сложим обе части полученных уравнений:

$$\begin{cases} 13\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=2405, \\ -37\left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=-2405, \end{cases}$$

$13\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}-37\left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=0,$

$\sqrt{x^2+y^2}\left(-24x^2+50xy-24y^2\right)=0.$ Получим совокупность уравнений:

$\sqrt{x^2+y^2}=0$ и $-24x^2+50xy-24y^2=0.$ Первое уравнение будет иметь решения, если x = y = 0, но эти значения не удовлетворяют исходной системе уравнений.

Решим второе уравнение, как однородное относительно x и y, при этом допустим, что $y\neq 0$ и разделим обе части уравнения на y^2:

$24\left(\frac{x}{y}\right)^2-50\left(\frac{x}{y}\right)+24=0.$ Положим $\frac{x}{y}=z,$ получим квадратное уравнение:

$12z^2-25z+12=0,\quad z_1=\frac{3}{4},\quad z_2=\frac{4}{3}.$ Получим две системы уравнений:

(1) $\begin{cases} x=\frac{3}{4}y, \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} x=\frac{4}{3}y, \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65. \end{cases}$

Решая каждую из систем, находим: $\begin{cases} x_{1,\,2}=\pm 3, \\ y_{1,\,2}=\pm 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_{3,\,4}=\pm 4, \\ y_{3\,4}=\pm 3. \end{cases}$

При решении уравнения, мы допустили, что $y\neq 0$, проверим, может ли y = 0. Для этого выполним непосредственную подстановку в первоначальное уравнение и убедимся, что получаются ложные равенства, значит y = 0 не является решением системы.

Ответ: $\begin{cases} x_{1,\,2}=\pm 3, \\ y_{1,\,2}=\pm 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_{3,\,4}=\pm 4, \\ y_{3\,4}=\pm 3. \end{cases}$

10.3 Использование неравенств Коши и других при решении систем иррациональных уравнений

Пример 8. **Решить систему уравнений** $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy}, \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy. \end{cases}$

Решение

Согласно неравенству Коши $\left(\sqrt{ab}\leq\frac{a\cdot b}{2},\quad где\quad a\geq 0,\quad b\geq 0\right)$ будем иметь:

$\sqrt{y-1}=\sqrt{(y-1)\cdot 1}\le\frac{(y-1)+1}{2}=\frac{y}{2}$, $\sqrt{x-1}\le\frac{x}{2}$, тогда левая часть второго уравнения не превосходит xy $x\sqrt{y-1}\le\frac{xy}{2}$, $y\sqrt{x-1}\le\frac{xy}{2}$, $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}$, $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$ и равна правой части только при $y-1=1$ и $x-1=1$.

Легко проверить, что получившаяся отсюда пара чисел (2; 2) является решением и первого уравнения.

Ответ: $\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

10.4. Использование свойств уравнения вида f(f(x)) = x

Пример 1. **Решите систему уравнений** $\begin{cases} \sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}}=x, \\ \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}}=y. \end{cases}$

Решение

Рассмотрим в первом уравнении левую часть как функцию от x с параметром y, запишем ее в виде f(f(x), где $f(x)=\sqrt{x+y^2-7}$. Поскольку f(x) монотонно возрастает, то первое уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x+y^2-7}=x$.

Рассмотрим во втором уравнении левую часть как функцию от y с параметром x, тогда, аналогично первому уравнению, получим: $\sqrt{y+x^2+2}=y$.

В результате приходим к системе уравнений, которую уже решить нетрудно:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y^2-7}=x, \\ \sqrt{y+x^2+2}=y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

Задание 13

Решите системы уравнений.

1. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} x=6\sqrt{x+y}, \\ y=2\sqrt{x+y}. \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}}+\sqrt{\frac{5x}{x+y}}=\frac{34}{15}, \\ x+y=12. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=1+\frac{7}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=78. \end{cases}$ **5**. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ y^2+x\sqrt{xy}=280. \end{cases}$ **6**. $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}-\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{3}{2}, \\ x^2-y^2=32. \end{cases}$

Конец документа