Оглавление

Иррациональные уравнения и неравенства-4

Другие методы решения. Более сложные уравнения

11.1 Случаи, когда область допустимых значений определять не надо![*]

***Пример 1.* Решить уравнение** $\sqrt{x^2-3x+4}=1-3x$. (1)

Решение

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x+4=(1-3x)^2, \\ 1-3x\ge 0, \end{cases} \qquad (2)$$

[*] Приложение к журналу "Квант" № 3/95. Практикум абитуриента. Алгебра и тригонометрия. Москва 1995 г. Бюро "Квантум".

Решить которую уже нетрудно:

$$\begin{cases} x^2-3x+4=1-6x+9x^2, \\ x\le\dfrac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-3x-3=0, \\ x\le\dfrac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3-\sqrt{105}}{16}, \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{105}}{16}, \\ x\le\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Второй корень не входит в промежуток $x\le\dfrac{1}{3}$ и является посторонним.

Ответ: $x=\dfrac{3-\sqrt{105}}{16}.$

Общие выводы

Любое уравнение вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \tag{3}$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\ge 0, \end{cases} \tag{4}$$

В самом деле. Если x_0 является корнем уравнения (3), т. е. справедливо числовое равенство $\sqrt{f(x_0)}=g(x_0)$, то $f(x_0)=(g(x_0))^2$ и $g(x_0)\ge 0$; значит, x_0 является решением системы (4).

Обратно, если же x_0 является решением системы (4), т. е. справедливо числовое равенство $f(x_0)=(g(x_0))^2$ и $g(x_0)\ge 0$, то $\sqrt{f(x_0)}=\sqrt{(g(x))^2}=|g(x_0)|$; поскольку $g(x_0)\ge 0$, $|g(x_0)|=g(x_0)$; значит, x_0 является корнем уравнения (3).

Пример 2. **Решить уравнение** $\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{1-x}.$

Решение

В отличие от первого примера, где ОДЗ можно легко найти, здесь, при попытке нахождения области допустимых значений придется решать неравенство $x^3-x+1\ge 0,$ которое решить непросто.

Рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^3-x+1=1-x, \\ 1-x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x\le 1, \end{cases} \quad x=0,$$ которая решается легко.

Ответ: $x=0.$

Общие выводы

Любое уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно "на выбор" каждой из систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Выбирая "*более легкую*" из них, обычно удается обойтись без ОДЗ.

Пример 3. **Решить уравнение** $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1.$

Решение

Преобразуем уравнение: $\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-1},$ которое равносильно системе

$\begin{cases} x+4=(1+\sqrt{x-1})^2, \\ x+4\ge 0, \end{cases}$ или системе $\begin{cases} x+4=(1+\sqrt{x-1})^2, \\ 1+\sqrt{x-1}\ge 0. \end{cases}$

Решим первую систему $\begin{cases} x+4=1+2\sqrt{x-1}+x-1, \\ x\ge -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2, \\ x\ge -4, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4, \\ x-1\ge 0, \\ x\ge -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\ge 1, \\ x\ge -4, \end{cases}$ получаем $x=5.$

Ответ: $x=5.$

Можно было бы решить и вторую систему:

$\begin{cases} \sqrt{x-1}=2, \\ \sqrt{x-1}\ge -1, \end{cases}$ второе неравенство выполняется для всех x, при которых существует подкоренное выражение, значит, эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x-1=4, \\ x-1\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\ge 1, \end{cases} \quad x=5.$$

Пример 4. **Решить уравнение** $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7.$

Решение

Данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x+3}=7-\sqrt{3x-2},$ но, в отличие от предыдущего, где можно было использовать любую из двух систем, которые получаются в результате преобразований, здесь надо обязательно потребовать, чтобы $7-\sqrt{3x-2}\ge 0,$ так как это выражение содержит разность, которая может принимать и отрицательные значения.

Таким образом, получим систему:

$\begin{cases} x+3=\left(7-\sqrt{3x-2}\right)^2, \\ 7-\sqrt{3x-2}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=49-14\sqrt{3x-2}+3x-2, \\ \sqrt{3x-2}\le 7, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{3x-2} = x+22, \\ \sqrt{3x-2} \le 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49(3x-2) = x^2+88x+484, \\ 3x-2 \le 49, \\ x+22 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-59x+582=0, \\ x \le 17, \\ x \ge -22, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 5, \quad x_2 \approx 54, \\ -22 \le x \le 17, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \approx 5.$$

Ответ: $x \approx 5.$

11.2 Тригонометрические подстановки в иррациональных уравнениях*

Часто при решении алгебраических задач бывает удобно заменить переменную (или переменные, если их несколько) тригонометрической функцией и свести тем самым алгебраическую задачу к тригонометрической. Такие замены - тригонометрические подстановки - порой существенно упрощают решение. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, системы уравнений или алгебраического выражения, которое требуется упростить. Например, если из условия следует, что допустимые значения переменной x определяются неравенством $|x| \le 1$, то удобны замены $x = \sin\alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right]$, или $x = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0; \ \pi]$, причем какую из них выбрать, зависит от конкретной задачи.

В случаях, когда переменная может принимать любые значения, используются замены $x = tg\alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right)$, и $x = ctg\alpha, \quad \alpha \in (0; \ \pi)$.

Пример 1. **Решите уравнение** $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Решение

ОДЗ $1 - x^2 \ge 0, \ x^2 - 1 \le 0, \ (x-1)(x+1) \le 0, \ -1 \le x \le 1, \ |x| \le 1.$

Значит можно выполнить замену

$$x = \sin\alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right], \text{ или}$$

$$x = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0; \ \pi].$$

Положим $x = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0; \ \pi]$, тогда получим уравнение

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, или $\sqrt{\sin^2\alpha} = 2\cos\alpha \cdot 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha$,

$|\sin\alpha| = 2\cos\alpha(1+\cos 2\alpha) - 3\cos\alpha, \ |\sin\alpha| = 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha,$

$|\sin\alpha| = \cos 3\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha, \quad |\sin\alpha| = \cos 3\alpha$, но в нашем случае $\sin\alpha \ge 0$, так что $\sin\alpha = \cos 3\alpha$, или $\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$

---

* "Тригонометрия помогает алгебре". П. Горнштейн. Приложение к журналу "Квант" № 3/95 Практикум абитуриента. Алгебра и тригонометрия. Бюро "Квантум", Москва, 1995 год.

Решая последнее уравнение, получим $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi + \pi n, \quad k, \quad n \in Z.$

Условию $0 \le \alpha \le \pi$ удовлетворяют три значения $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{8}\pi, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}\pi,$ поэтому

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$x_3 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}; \quad \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}.$

Пример 2. **Решите уравнение** $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}.$

Решение

Область допустимых значений: $x^2 - 1 > 0, \quad |x| > 1.$

Положим $x = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$ Уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}} = \frac{35}{12}, \quad \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{35}{12}, \quad \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{35}{12},$$

(1) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{35}{12}.$ Обозначим $\sin\alpha + \cos\alpha = u, \quad \sin\alpha\cos\alpha = v.$

Возведем обе части первого равенства в квадрат, получим:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = u^2, \quad \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = u^2, \quad 1 + 2v = u^2.$

Подставляя в уравнение (1) значения u и v, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u}{v} = \frac{35}{12}, \\ 1 + 2v = u^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u = 35v, \\ u^2 - 1 = 2v, \end{cases} \text{ получим } u = \frac{7}{5}, \quad v = \frac{12}{25}, \quad \begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}, \\ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{25}. \end{cases}$$

Значит, числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{7}{5}z + \frac{12}{25} = 0, \text{ т. е. либо } \begin{cases} \sin\alpha = \frac{3}{5}, \\ \cos\alpha = \frac{4}{5}, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5}, \\ \cos\alpha = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{4}.$

Пример 3. **Решите уравнение** $x^2\sqrt{1-x^2} = |x|^3 - |x| + \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Решение

Область допустимых значений: $1-x^2 \ge 0, \quad x^2 \le 1, \quad |x| \le 1$ *или* $-1 \le x \le 1$, и, кроме того, его левая часть - четная функция, в самом деле,

$$(-x)^2\sqrt{1-(-x)^2} = x^2\sqrt{1-x^2}\ .$$

Поэтому будем сначала искать его положительные корни. Тогда на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ существует число α, такое, что $x = \sin\alpha,$ и уравнение примет вид

$$\sin^2\alpha\cos\alpha = \sin^3\alpha - \sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда, после несложных преобразований,

$$\sqrt{2}\cdot\sin^2\alpha\cos\alpha - \sqrt{2}\cdot\sin^3\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 1,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1,$$

$$\sin 2\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1,$$

$$\sin 2\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1,$$

$$\sin 2\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) = 1,$$

$$\sin 2\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha\right) = 1,$$

приходим к уравнению $\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Так как оба множителя по модулю не превосходят 1 и положительны (угол 2α лежит во второй четверти), то эти множители оба равны 1, откуда легко получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{4},$ так что $x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Поэтому уравнение имеет два решения $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Ответ: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Пример 4. **Решите уравнение** $\sqrt{1-2x}\cdot\left(1-4x\sqrt{1+2x}\right) = 8x^2 - 1.$

Решение

Область допустимых значений данного уравнения определим из системы неравенств $\begin{cases}1-2x\ge 0,\\ 1+2x\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\le 1,\\ 2x\ge -1,\end{cases} \Leftrightarrow -1\le 2x\le 1 \quad \textit{или} \quad |2x|\le 1.$

Поэтому, существует такое число α, что $2x=\cos 2\alpha$, причем можно считать, что $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$. После подстановки в уравнение, оно примет вид

$$\sqrt{1-\cos 2\alpha}\left(1-4\cos 2\alpha\cdot\sqrt{1+\cos 2\alpha}\right)=2\cos^2 2\alpha-1,$$

$$\sqrt{2}|\sin\alpha|\cdot\left(1-2\cos 2\alpha\cdot\sqrt{2}|\cos\alpha|\right)=\cos 4\alpha,$$

или, поскольку угол α лежит в первой четверти,

$$\sqrt{2}\sin\alpha-4\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha=\cos 4\alpha,\quad \sqrt{2}\sin\alpha-\sin 4\alpha=\cos 4\alpha,$$

$$\sqrt{2}\sin\alpha=\sin 4\alpha+\cos 4\alpha,\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\alpha,\quad \sin\alpha=\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда $3\alpha+\dfrac{\pi}{4}=2\pi k$ или $5\alpha+\dfrac{\pi}{4}=(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$, и мы получаем две серии уравнений: $\alpha=(8k-1)\cdot\dfrac{\pi}{12}$, $\alpha=(8k+3)\cdot\dfrac{\pi}{20}$ $(k\in Z)$. Из этих решений в промежуток от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ лежит только $\alpha=\dfrac{3\pi}{20}$, откуда получаем единственный корень исходного уравнения $x=\dfrac{1}{2}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Задание 1

Решите уравнение

1. $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$. **2**. $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}}=2x^2-1$. **3**. $x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}=a$.

Пример 3. **Решите уравнение** $x^2+2x+15=2x\sqrt{2x+15}.$

Решение

Положим $\sqrt{2x+15}=u,\ \ u\ge 0,$ тогда $2x+15=u^2.$ Получим однородное уравнение $x^2+u^2=2xu.$ Его можно решить как однородное, а можно, усмотрев полный квадрат двучлена, получить $(x-u)^2=0,\ \ x=u.$ Так как $u\ge 0,$ тогда $x\ge 0.$ Из уравнения $x=\sqrt{2x+15}$ следует $x^2-2x-15=0,\ \ x_1=-3,\ \ x_2=5.$ Значение $x_1=-3$ не удовлетворяет условию $x\ge 0$ и не является корнем уравнения, а $x_2=5$ удовлетворяет уравнению (проверку можно выполнить устно).

Ответ: $x=5.$

Пример 4. **Решите уравнение** $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$

Решение

Область допустимых значений $x^2-1\ge 0;\ \ |x|\ge 1;\ \ x\le -1,\ \ x\ge 1.$

Если положить u = x + 1, v = x - 1, то получится уравнение, которое можно было бы назвать "однородным степени $\frac{1}{3}$", если было бы дано соответствующее определение. Чтобы не иметь дела с дробными степенями, положим

а) $u=\sqrt[6]{x+1},\ \ v=\sqrt[6]{x-1},$ если $x\ge 1;$ б) $u=\sqrt[6]{-x-1},\ \ v=\sqrt[6]{-x+1},$ если $x\le -1.$

В первом случае приходим к уравнению $2u^2-uv-v^2=0,$ откуда делением на v^2 находим, что $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=1$ (второй корень уравнения $2z^2-z-1=0$ следует отбросить), $\frac{x+1}{x-1}=1,\ \ x+1=x-1,$ так что на промежутке $x\ge 1$ исходное уравнение корней не имеет.

Во втором случае (при $x\le -1$) получаем уравнение $-2u^2-uv+v^2=0,$ откуда находим $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2},\ \ x=-\frac{65}{63}.$ Так как $-\frac{65}{63}\le -1,$ то это корень уравнения.

Ответ: $x=-\frac{65}{63}.$

Задание 2

1. Решите уравнение $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ y^2+x\sqrt{xy}=280. \end{cases}$

3. Решите уравнение $\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

11.3. Разные уравнения

Пример 1. **Решите уравнение** $(x-1)\left(1-x(1+2\sqrt{x})\right)=x^3-(x-b)^2.$

Решение

ОДЗ $x\ge 0,\quad x\in[0;\ \ \infty).$

Преобразуем уравнение $x-x^2-2x^2\sqrt{x}-1+x+2x\sqrt{x}-x^3=-(x-b)^2,$

$$x^3+2x^2\sqrt{x}+x^2-2x-2x\sqrt{x}+1=(x-b)^2,$$

$x^2(x+2\sqrt{x}+1)-2x(1+\sqrt{x})+1=(x-b)^2,\ \ x^2(\sqrt{x}+1)^2-2x(\sqrt{x}+1)+1=(x-b)^2,$

$\left((x\sqrt{x}+1)-1\right)^2=(x-b)^2,\ \ x^3=(x-b)^2,$ откуда $x=(1-b)^{\frac{2}{3}}.$

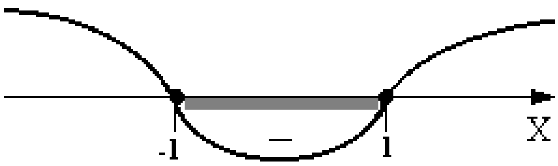
Ответ: $x=(1-b)^{\frac{2}{3}}.$

Пример 2. **Решите уравнение**

$$(1+\sqrt[n]{1+x})\sqrt[n]{1+x}+(1+\sqrt[n]{1-x})\sqrt[n]{1-x}=2(1+\sqrt[2n]{1-x^2})\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение

ОДЗ $1-x^2\ge 0,\quad x^2-1\le 0,\quad (x-1)(x+1)\le 0,\ \ -1\le x\le 1,\ \ x\in[-1;\ \ 1].$



Преобразуем уравнение

$\sqrt[n]{1+x}+\sqrt[n]{(1+x)^2}+\sqrt[n]{1-x}+\sqrt[n]{(1-x)^2}-2\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}-2\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt[2n]{1-x^2}=0,$

$\left(\sqrt[n]{1+x}-2\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[n]{1-x}\right)+\left(\sqrt[n]{(1+x)^2}-2\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[n]{(1-x)^2}\right)=0,$

$\left(\sqrt[n]{1+x}-2\sqrt[n]{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[n]{1-x}\right)+\left(\sqrt[n]{(1+x)^2}-2\sqrt[n]{1-x^2}+\sqrt[n]{(1-x)^2}\right)=0,$

$\left(\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}\right)^2+\left(\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}\right)^2=0.$ Равенство выполняется, если каждое из слагаемых при одних и тех же значениях переменных будут равны нулю.

Это произойдет только при одном значении x, $x=0.$

Ответ: $x=0.$

Пример 3. **Решите уравнение** $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x\sqrt{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{a\sqrt{x}}}=\sqrt[4]{b}.$

Решение

ОДЗ $x \ge 0, \quad a \ge 0.$

Положи $x = y^6, \quad a = p^6$, тогда уравнение примет вид

$\sqrt{y^3 + y^2 p} + \sqrt{p^3 + p^2 y} = \sqrt[4]{b}, \ y\sqrt{y+p} + p\sqrt{p+y} = \sqrt[4]{b}, \ (y+p)\sqrt{y+p} = \sqrt[4]{b},$

$(y+p)^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{1}{4}}, \ y + p = b^{\frac{1}{6}}, \ y = b^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{6}}, \ x^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{6}}, \ x = \left(b^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{6}}\right)^6.$

Ответ: $x = \left(b^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{6}}\right)^6.$

Пример 4. **Решите уравнение** $\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}} + \sqrt{1 - x + \sqrt[3]{x(1-x)^2}} = 1.$

Решение

Область допустимых значений найти здесь сложно и мы постараемся обойтись без ее определения, а проследить равносильность преобразований.

Положим $x = u^6, \quad 1 - x = v^6.$

Преобразуем уравнение

$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2(1-x)}} + \sqrt{1 - x + \sqrt[3]{x(1-x)^2}} = 1, \quad \sqrt{u^6 + \sqrt[3]{u^{12}v^6}} + \sqrt{v^6 + \sqrt[3]{u^6 v^{12}}} = 1,$

$\sqrt{u^6 + u^4 v^2} + \sqrt{v^6 + u^2 v^4} = 1. \qquad (1)$

С другой стороны $u^6 + v^6 = 1. \qquad (2)$

Возведем обе части первого уравнения в квадрат, получим

$u^6 + u^4 v^2 + 2\sqrt{(u^6 + u^4 v^2)(v^6 + u^2 v^4)} + v^6 + u^2 v^4 = 1,$

$u^2 v^2 (u^2 + v^2) + 2\sqrt{u^4 (u^2 + v^2)(u^2 + v^2) v^4} = 0, \ 3u^2 v^2 (u^2 + v^2) = 0.$

Отсюда $u = 0$ или $v = 0$, или $u^2 + v^2 = 0.$ $u = 0, \quad x = 0; \ v = 0, \quad x = 1;$

$u^2 = -v^2, \ \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{1-x}, \ x = -1 + x, \ 0 = -1,$ решений нет.

Проверка

$x = 0, \ \sqrt{0 + \sqrt[3]{0}} + \sqrt{1 - 0 + \sqrt[3]{0}} = 1, \ 1 = 1, \ x = 0$ - корень уравнения.

$x = 1, \ \sqrt{1 + \sqrt[3]{0}} + \sqrt{1 - 1 + \sqrt[3]{0}} = 1, \ 1 = 1, \quad x = 1$ - корень уравнения.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1.$

Пример 5. **Решите уравнение** $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 a^2}} + \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 x^2}} = b.$

Решение

Положим $x = \frac{a}{\sqrt{y^3}}$, отсюда $y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{a^2}{y^3} + \sqrt[3]{\frac{a^4}{y^6}a^2}} + \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4\frac{a^2}{y^3}}} = b, \quad \sqrt{\frac{a^2}{y^3} + \frac{a^2}{y^2}} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{y}} = b,$$

$$\frac{a}{y}\sqrt{1+\frac{1}{y}} + a\sqrt{1+\frac{1}{y}} = b, \quad a\sqrt{1+\frac{1}{y}}\left(1+\frac{1}{y}\right) = b, \quad \left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{a}, \quad 1+\frac{1}{y} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1, \quad \frac{1}{y} = \frac{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}, \quad x = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $x = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Пример 6. **Решите уравнение** $\sqrt[n]{(x+a)^3} + 2\sqrt[n]{x^3} = 3\sqrt[n]{x^2(x+a)}$.

Решение

ОДЗ.
1. Если n - нечетное, тогда $x \in R$.
2. Если n - четное, тогда $\begin{cases} x \geq 0, \\ x + a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ x \geq -a, \end{cases}$ или $\begin{cases} a \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$

Положим $u = \sqrt[n]{x+a}$, $v = \sqrt[n]{x}$, отсюда $x = v^{\frac{1}{n}}$, $x + a = u^{\frac{1}{n}}$, $x = u^{\frac{1}{n}} - a$.
Уравнение примет вид $u^3 + 2v^3 = 3u^2v$, $u^3 + 2v^3 - 2u^2v - u^2v = 0$,
$(u^3 - u^2v) + (2v^3 - 2u^2v) = 0$, $u^2(u-v) + 2v(u^2 - v^2) = 0$, $(u-v)(u^2 + 2uv + 2v^2) = 0$.
Получим два уравнения $u - v = 0$, и $u^2 + 2uv + 2v^2 = 0$.

Решаем первое уравнение $u = v$, $\sqrt[n]{x+a} = \sqrt[n]{x}$, $x + a = x$, $0 = a$. Это уравнение имеет бесконечное множество решений, если a = 0 и не имеет решений, если $a \neq 0$.

Решаем второе уравнение, как однородное. Далее проверим, будет ли уравнение иметь решения при v = 0, тогда x = 0. Уравнение примет вид $\sqrt[n]{a^3} = 0$, которое также имеет решения при a = 0 и не имеет в противном случае, здесь мы имеем предыдущий случай решения.

Теперь положим, что $v \neq 0$ и разделим обе части второго уравнения на v^2.
Получим:
$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{v}\right) + 2 = 0$, которое не имеет действительных корней.

Ответ: **1**. При a = 0 уравнение имеет бесконечное множество решений x - любое действительное число.

2. При $a \neq 0$, уравнение корней не имеет.

Пример 8. **Решите уравнение** $\left(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a}\right)^3\left(\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x-a}\right)=2b.$

Решение

ОДЗ $\begin{cases} x+a \geq 0, \\ x-a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a, \\ x \geq a. \end{cases}$

Если а > 0, тогда $x \geq a$; если а < 0, тогда $x \geq -a$.

Положим $\sqrt[4]{x+a}=u$, $\sqrt[4]{x-a}=v$, отсюда получаем $x=u^4-a$, $x=v^4+a$.

Уравнение станет таким $(u+v)^3(u-v)=2b.$

С другой стороны $u^4-v^4=2a.$ Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (u+v)^3(u-v)=2b, \\ u^4-v^4=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(u+v)^3(u-v)=4ab, \\ -2b(u^4-v^4)=-4ab, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a(u+v)^3(u-v)-2b(u^4-v^4)=0,$ $(u^2-v^2)\left(a(u+v)^2-b(u^2+v^2)\right)=0.$

Получим два уравнения

$u^2-v^2=0,$ (1)

$a(u+v)^2-b(u^2+v^2)=0,$ (2)

Решаем первое уравнение $u^2=v^2$, $u^4=v^4$, $x+a=x-a$, $2a=0.$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений при а = 0 и не имеет решений при $a \neq 0.$

Решаем второе уравнение $u^2(a-b)+2auv+v^2(a-b)=0,$ $v \neq 0,$ разделим обе части уравнения на v^2, получим квадратное уравнение

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2(a-b)+2a\left(\frac{u}{v}\right)+(a-b)=0,\ \frac{u}{v}=\frac{-a\pm\sqrt{2ab-b^2}}{a-b},\ \frac{u^4}{v^4}=\frac{(-a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4}{(a-b)^4},$$

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{(-a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4}{(a-b)^4},\ x=a\left(\frac{(a-b)^4+(-a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4}{(-a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4-(a-b)^4}\right),$$

$$x=\pm\frac{b^2-2ab-a^2}{2\sqrt{2ab-b^2}}.$$

Ответ: 1. $x=\pm\dfrac{b^2-2ab-a^2}{2\sqrt{2ab-b^2}}$, при $a \neq 0,\ \ b \neq 0.$

2. $x \in R$, если $a=0$ или $b=0.$

11.4. Графический способ решения

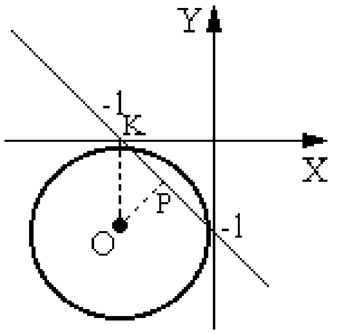
Пример 9. При каких значениях а найдутся вещественные х и у, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a}=x+y+1$?

Решение

Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x+y+1\ge 0, \\ \sqrt{2xy+a}=x+y+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1\ge 0, \\ 2xy+a=x^2+2xy+y^2+2x+2y+1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1\ge 0, \\ a=x^2+2x+1+y^2+2y+1-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1\ge 0, \\ (x+1)^2+(y+1)^2=a+1. \end{cases}$$



Длина отрезка РК равна $PK=OP=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому окружность, заданная уравнением, и полуплоскость, заданная неравенством, имеют общие точки, если радиус окружности, равный $\sqrt{a+1}$ будет больше или равен ОР, т. е. $\sqrt{a+1}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Отсюда найдем а, $a+1\ge\dfrac{1}{2}$, $a\ge-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $a\ge-\dfrac{1}{2}$.

Пример 10. Найдите все значения а, при которых уравнение

$$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$

имеет ровно одно решение.

Решение

Преобразуем уравнение: $a+\sqrt{-(x^2-6x+9)+1}=3+\sqrt{1-(x^2-2ax+a^2)}$,

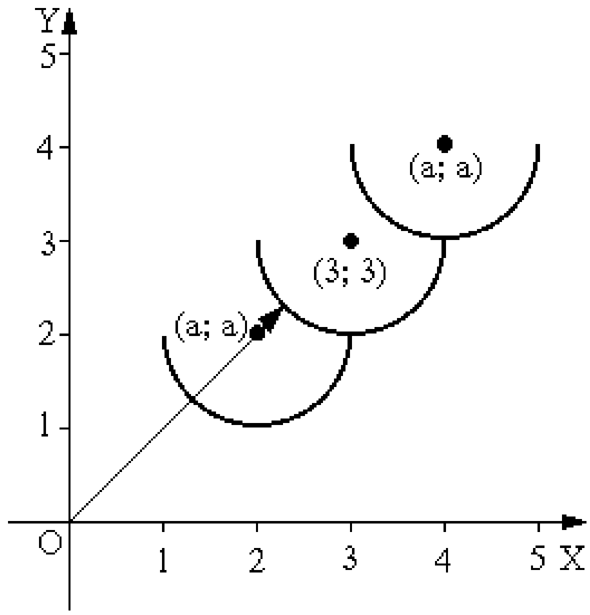
$a+\sqrt{1-(x-3)^2}=3+\sqrt{1-(x-a)^2}$, $3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$.

Графиком функции $y=3-\sqrt{1-(x-3)^2}$, т. е. левой части уравнения, есть нижняя единичная полуокружность с центром в точке (3; 3).

($3-y=\sqrt{1-(x-3)^2}$, $(3-y)^2=1-(x-3)^2$, $(x-3)^2+(y-3)^2=1$).

Графиком функции $y = a - \sqrt{1-(x-a)^2}$, т. е. правой части уравнения является такая же полуокружность, но с центром в точке (a; a).

$(a - y = \sqrt{1-(x-a)^2}$, $(a-y)^2 = 1-(x-a)^2$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1)$.



Двигая параметр a по числовой оси в сторону возрастания, получим, что указанные графики впервые пересекаются, причем имеют единственную общую точку, при a = 2. Эта ситуация сохраняется при дальнейшем увеличении a (кроме случая a = 3, когда полуокружности сливаются) до значения a = 4, а затем графики расходятся и не имеют общих точек.

Ответ: $[2;\ 3)\cup(3;\ 4]$.

Задание 3

1. При каких значениях параметра a уравнение
$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

11.5. Системы иррациональных уравнений

***Пример 1.* Решите систему уравнений**

$$\begin{cases} y - 2x + 6 = \dfrac{\sqrt{x-y-1} + 4\sqrt{x-y}}{y+2x-6}, \\ y^2 + \sqrt{x-y} = 5 + \sqrt{x-y-1} - (x-3)^2. \end{cases}$$

Решение

Область допустимых значений определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x-y-1\ge 0, \\ x-y\ge 0, \\ y+2x-6\ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ge 1, \\ x-y\ge 0, \\ y+2x-6\ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ge 1, \\ y+2x-6\ne 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на знаменатель дроби $y+2x-6$, учитывая, что $y+2x-6\ne 0$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \big(y-(2x-6)\big)\big(y+(2x-6)\big)=\sqrt{x-y-1}+4\sqrt{x-y}, \\ y^2+\sqrt{x-y}=5+\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-(2x-6)^2=\sqrt{x-y-1}+4\sqrt{x-y}, \\ y^2+\sqrt{x-y}=5+\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое, получим уравнение:

$$y^2+\sqrt{x-y}-y^2+4(x-3)^2=5+\sqrt{x-y-1}-\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2-4\sqrt{x-y},$$

$$5\sqrt{x-y}=5-5(x-3)^2, \quad \sqrt{x-y}=1-(x-3)^2.$$

Правая часть этого уравнения должна быть неотрицательна:

$1-(x-3)^2\ge 0,\ \ (x-3)^2\le 1,$ тогда левая часть уравнения должна быть больше или равна 1, т. е. $\sqrt{x-y}\ge 1,\ \ x-y\ge 1.$

Из неравенства $(x-3)^2\le 1$ находим: $\sqrt{(x-3)^2}\le 1,\ \ |x-3|\le 1,\ \ -1\le x-3\le 1,$

$2\le x\le 4.$ Также получим, что $y\le x-1.$ Оба неравенства выполняются при $x=3$ и $y=2.$ Эти значениях x и y входят в область допустимых значений.

Проверка

$$\begin{cases} 2-6+6=\dfrac{\sqrt{3-2-1}+4\sqrt{3-2}}{2+6-6}, \\ 4+\sqrt{3-2}=5+\sqrt{3-2-1}-(3-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\dfrac{4}{2}, \\ 5=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2, \\ 5=5. \end{cases}$$

Значения $x=3$ и $y=2$ удовлетворяют системе уравнений.

Ответ: $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

Задание 4

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{y}-4+x=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y-9}+2}{\sqrt{y}-x+4}, \\ 9+(y-5)^2=x+y. \end{cases}$

Упражнения

Решите уравнения

1. $x^3-3x\sqrt{x}+2=0.$ **2**. $x^2-3x-2\sqrt{2x}+6=0.$

3. $x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = 2{,}75 - \dfrac{28}{9}x$. **4**. $x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 = 4(\sqrt{x} - 1)$.

5. $x^2 + 2(x+1)\sqrt{x} + 3x = 8$. **6**. $x^3 + 4x(x-1)^{1{,}5} + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

7. $x^6 - x^3 - 2x^2 - 1 = 2(x - x^3 + 1)\sqrt{x}$. **8**. $x(x - 2\sqrt{x-1}) = 2\sqrt{x-1} - 3x$.

9. $(x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2x = 46$. **10**. $2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = (x - 1 + \sqrt{x+1})^2$.

11. $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 2$.

12. $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a^2 - x} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x}}{2}} + \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - x}}{2}}$.

13. $\left(1 - \sqrt{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}$. **14**. $(1+x)\sqrt{1+x} - (1-x)\sqrt{1-x} = x$.

15. $2(x-1) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1)$. **16**. $\dfrac{1}{4}x = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$.

17. $bx\sqrt{a+x} + ab\sqrt{a+x} = a\sqrt{x^3}$. **18**. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$.

19. $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}$. **20**. $\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = 2\sqrt[4]{a^2 - x^2}$.

21. $\sqrt[3]{(1+x)^2} - (\sqrt[3]{1+x} - 1)\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1+x}} = 1$.

22. $(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^2} + (1 + \sqrt[3]{a})\sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{ax}(1 + \sqrt[6]{ax}$.

23. $\left(\sqrt[7]{x-1} + \sqrt[7]{x+1}\right)^2 + 5\left(\sqrt[7]{(x-1)^2} - \sqrt[7]{(x+1)^2}\right) + 6\left(\sqrt[7]{x-1} - \sqrt[7]{x+1}\right)^2 = 0$.

24. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = 21\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{x}$. **25**. $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a} + \dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}$.

26. $x\sqrt[n]{x-a} - (x-a)^{-1}\sqrt[n]{(x+a)^{-1}} = a\sqrt[n]{x-a}$.

27. $\sqrt[n]{a^k x^{n-k}} + \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} = 2\sqrt{bx}$, где $n > 2k > 0$, $b > a > 0$.

28. $\left(1 + \sqrt[mn]{x^{2(n-m)}}\right)\sqrt[n]{x^2} + \left(1 + \sqrt[mn]{a^{2(n-m)}}\right)\sqrt[n]{a^2} = 2\sqrt[n]{ax}\left(1 + \sqrt[mn]{(ax)^{n-m}}\right)$.

29. $\sqrt[n]{x^n + \sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}} + \sqrt[n]{a + \sqrt[n+1]{a^{n^2} x^n}} = b$.

30. $$\left((x+a)^n + (x-a)^n\right)^{\frac{1}{3}} + \left((x+a)^n - (x-a)^n\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \left((x+a)^n + b^n\right)^{\frac{1}{3}} + \left((x+a)^n - b^n\right)^{\frac{1}{3}}.$$

31. $\sqrt[n]{\dfrac{a + \sqrt[n]{x}}{a}} + \sqrt[n]{\dfrac{a + \sqrt[n]{x}}{x}} = \sqrt[n^2]{\dfrac{x}{a^{n^2}}}$. **32**. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 4 + \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2}$.

33. $\dfrac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a} + \sqrt{x+2a}} = \dfrac{x}{2a}$. **34**. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}} + 1 = 0$.

35. $x\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1$.

36. $\dfrac{x(\sqrt{x} - 1)^3\sqrt{x} - 1}{x - (\sqrt{x} + 1)} - \dfrac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 1}{x - (\sqrt{x} - 1)} = 2$.

37. $\dfrac{a(x+a)+a\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}+a}=\sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}.$

38. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=2.$ **39.** $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}}=2.$

40. $\dfrac{\sqrt[m]{1+x^2}+\sqrt[m]{1-x^2}}{\sqrt[m]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}=\dfrac{p}{q}.$ **41.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=1.$

42. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$ **43.** $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}.$

44. $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\,\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}.$ **45.** $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}=x^2.$

Решить системы уравнений

46. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8.\end{cases}$ **47.** $\begin{cases}x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1,\\ 2x+y=2.\end{cases}$

48. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$ **49.** $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$ **50.** $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12.\end{cases}$

51. $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y),\\ x^2-y^2=41.\end{cases}$ **52.** $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6,\\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12,\\ x+y+z=14.\end{cases}$

53. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2,\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$ **54.** $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2,\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1.\end{cases}$

55. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3,\\ \sqrt{xyz}=1.\end{cases}$ **56.** $\begin{cases}\sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3,\\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1,\\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0.\end{cases}$ **57.** $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$

58. $\begin{cases}\sqrt[4]{x+3y-9}+\sqrt[4]{2y-x+11}=3,\\ \sqrt{2y-x+11}-\sqrt{3y+x-9}=3.\end{cases}$ **59.** $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6,\\ xy^2=6\sqrt{10}.\end{cases}$

60. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+a}-\sqrt{y+b}=1,\\ \sqrt{y+a}-\sqrt{x+b}=1\end{cases}$ (a и b - действительные числа, $a\neq b$).

61. $\begin{cases} x\sqrt{y^2-1} - y\sqrt{x^2+1} = -1\dfrac{9}{20}, \\ \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2-1} - xy = 1\dfrac{1}{20}. \end{cases}$ **62**. $\begin{cases} y\sqrt{1-x^2} - x^2 = 2a-1, \\ y^2 + y\sqrt{1-x^2} = 2a-a^3. \end{cases}$

Конец документа