C1 Решите уравнение $\frac{\cos 2x+\cos x+1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

Решение.

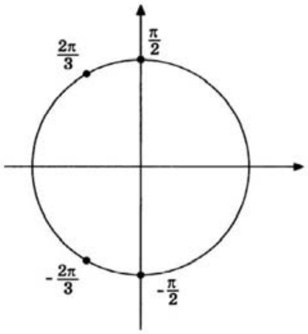
Запишем систему: $\begin{cases}\cos 2x+\cos x+1=0.\\ \sin x\neq -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Решим уравнение: $2\cos^2 x + \cos x = 0$, откуда $\cos x = 0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$. Получаем:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Числа $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ не удовлетворяют условию $\sin x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$



C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

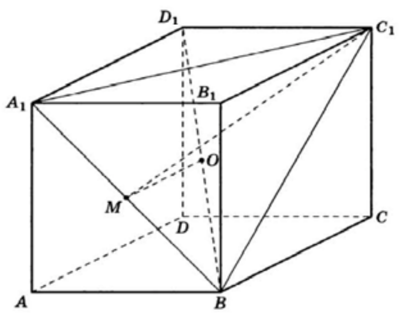
Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B.

$A_1D_1\perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1, поэтому $MO\perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $C_1M\perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.

Найдём стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1 находим $OM=\frac{1}{2}$; из треугольника BA_1C_1 находим $MC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. $OC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку O — середина диагонали AC_1.

Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:



$$\cos\angle OMC_1=\frac{OM^2+C_1M^2-OC_1^2}{2\cdot OM\cdot MC_1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{(x-1)^2-1}}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3))}{\log_{2^{(x-1)^2-1}}(x^2+4x+5)} \geq 0.$

Решение.

Чтобы был определён логарифм по основанию $2^{(x-1)^2-1}$, это выражение должно быть положительно и отлично от 1. Находим: $(x-1)^2-1 \neq 0$, откуда $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим неравенство:

$$\log_{x^2+4x+5}(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)) \geq 0.$$

Заметим, что $x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \geq 1$, причём равенство достигается только при $x=-2$. При $x=-2$ получаем:

$$\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)) \geq 1.$$

Выделим полный квадрат в основании логарифма:

$$x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2};$$

это выражение больше 1 при всех допустимых x. Таким образом,

$$x^2-2x+3 \geq 2x^2-2x+3.$$

Тогда $x^2+2x \leq 0$, откуда $-2 \leq x \leq 0$. Учитывая, что $x \neq 0$ и $x \neq -2$, получаем: $-2 < x < 0$.

Ответ: $(-2;\ 0)$.

C4 Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\dfrac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Решение.

Пусть вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на основании BC равнобедренного треугольника ABC (точка K — между B и L), а вершины M и N — на боковых сторонах AC и AB соответственно.

Обозначим $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\angle ACB=\beta$. Тогда

$$\cos\alpha=\frac{15}{17},\quad \sin\alpha=\frac{8}{17},\quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}}=4.$$

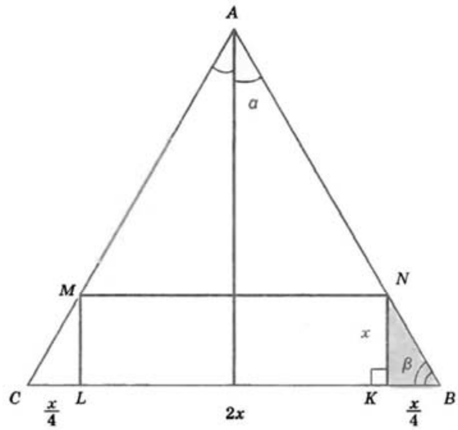


Рис. 1

Предположим, что сторона KL прямоугольника вдвое больше его стороны KN. Положим $KN = x$, $KL = 2x$. Из прямоугольного треугольника BKN находим, что $BK = KN\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{4}$. Тогда $LC = BK = \frac{x}{4}$, а так как $KL = MN = 2x$, то

$$BC = BK + KL + LC = \frac{x}{4} + 2x + \frac{x}{4} = \frac{5}{2}x = 40,$$

откуда $x = 16$. Тогда $KL = 2x = 32$. Следовательно,

$$S_{KLMN} = KL \cdot KN = 16 \cdot 32 = 512.$$

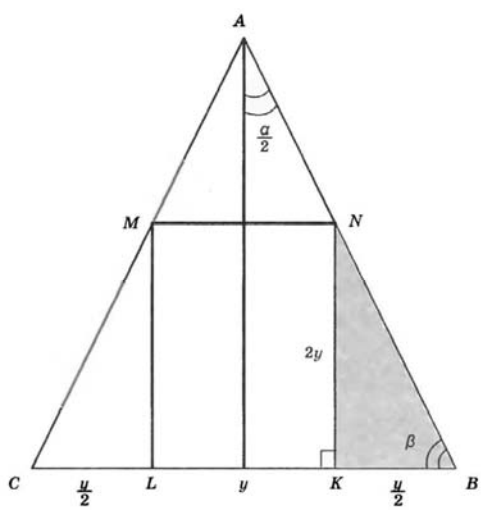


Рис. 2

Пусть теперь сторона KN прямоугольника вдвое больше его стороны KL. Положим $KL = y$, $KN = 2y$. Из прямоугольного треугольника BKN находим, что $BK = KN\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{2}$. Тогда $LC = BK = \frac{y}{2}$, а так как $KL = MN = y$, то

$$BC = BK + KL + LC = \frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 2y = 40,$$

откуда $y = 20$. Тогда $KN = 2y = 40$. Следовательно,

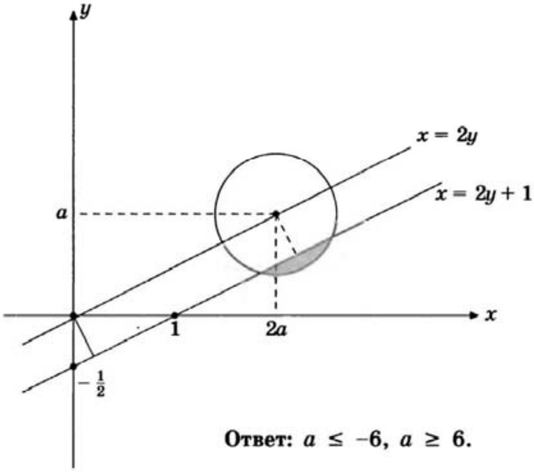
$$S_{KLMN} = KL \cdot KN = 20 \cdot 40 = 800.$$

Ответ: 512 или 800.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x-2y \ge 1 \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

Первое неравенство задаёт на координатной плоскости круг радиуса $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$ с центром в точке $(2a;\ a)$. Второе неравенство задаёт полуплоскость с границей $x = 2y + 1$. Система имеет решения, если круг и полуплоскость имеют общие точки; для этого расстояние от центра круга до прямой $x = 2y + 1$ должно быть не больше радиуса круга. Это расстояние между параллельными прямыми: $x = 2y$ и $x = 2y + 1$. Рассмотрим треугольник с вершинами $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ -1/2)$. Его катеты равны 1 и 1/2; следовательно, высота, опущенная на гипотенузу, равна $\dfrac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Значит, система имеет решение при $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$. Решая это неравенство, получаем: $|a| \ge 6$, т.е. $a \le -6$ или $a > 6$.



Ответ: $a \le -6$, $a \ge 6$.

C6 Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

Решение.

Разложим N на простые множители: $N = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} \ldots p^{\alpha_p}$, где p — наибольший простой множитель, и $\alpha_i = 0, 1, 2\ldots$ Если запись числа N оканчивается n нулями, то или $\alpha_2 = n, \alpha_5 \geq n$, или, наоборот, $\alpha_2 \geq n$, $\alpha_5 = n$.

Оценим количество делителей k числа N:

$$k = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1)\ldots(\alpha_p + 1) \geq (n+1)^2,$$

при этом k делится на $n+1$.

1 случай. Если k чётное, то все делители разбиваются на $\frac{k}{2}$ пар вида $\left(d; \frac{N}{d}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно N. Поэтому произведение всех делителей равно $N^{\frac{k}{2}}$.

2 случай. Если k нечётное, то $k-1$ делителей разбиваются на пары указанного вида, и есть еще один делитель — $\sqrt{N}$. И в этом случае тоже произведение всех делителей: $N^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sqrt{N} = N^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого N произведение всех делителей оканчивается $\frac{nk}{2}$ нулями, следовательно, $nk = 2 \cdot 399 = 798$. При этом $798 = nk \geq n(n+1)^2$, откуда следует, что n — делитель числа 798, и $n \leq 8$.

Выпишем все такие n: 1, 2, 3, 6, 7. Из равенства $798 = nk$ также следует, что 798 делится на $n+1$. Поэтому возможно только n = 1, 2 и n = 6. Для каждого из этих n подберем подходящее N. Ограничимся простыми множителями 2 и 5. Значит, нужно подобрать только α_2 и α_5.

1. $\alpha_2 = n = 1$, $k = 798 : n = 798$; $\alpha_5 + 1 = \frac{k}{n+1} = 399$; $N = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_5} = 2^1 \cdot 5^{398}$.

2. $\alpha_2 = n = 2$, $k = 399$; $399 : 3 = 133$; $\alpha_5 = 132$; $N = 2^2 \cdot 5^{132}$.

3. $\alpha_2 = n = 6$, $k = 133$; $133 : 7 = 19$; $\alpha_5 = 18$; $N = 2^6 \cdot 5^{18}$.

Таким образом, для n = 1, 2, 6 найдены (и даже не все) N, оканчивающиеся n нулями, произведение делителей которых оканчивается 399 нулями.

Ответ: 1, 2, 6.