Задача C5-1

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x$$

выполняется для любого x.

Решение.

1. Неравенство преобразуется к виду

$$f(x)>3,$$

где

$$f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x=$$
$$=\begin{cases}5x+1+2a - \text{возрастает при } x\geqslant\max\{-1,-a\},\\ -x-1-2a - \text{убывает при } x\leqslant\min\{-1,-a\}.\end{cases}$$

2. Функция f совпадает с линейной на каждом интервале, на которые разбивают числовую прямую точки -1 и $-a$, поэтому свое наименьшее значение она принимает в одной из двух точек -1 или $-a$.

3. Все значения функции f больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}f(-1)>3,\\ f(-a)>3\end{cases}\iff\begin{cases}2|-1+a|+2\cdot(-1)>3,\\ |-a+1|+2\cdot(-a)>3\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}|a-1|>\frac{5}{2},\\ |a-1|>2a+3\end{cases}\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-1>\frac{5}{2},\\ a-1>2a+3,\end{cases}\\ \begin{cases}a-1<-\frac{5}{2},\\ a-1<-2a-3\end{cases}\end{array}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\frac{7}{2}<a<-4,\\ \begin{cases}a<-\frac{3}{2},\\ a<-\frac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.\iff a<-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $a<-\frac{3}{2}$.

Задача C5-2

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{a^2-x^2}=1$$

имеет ровно 8 решений.

Решение.

1. Преобразуем уравнение

$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\iff\begin{cases}a^2-x^2=(2\pi n)^2,\\ n\geqslant 0\end{cases}\iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2-(2\pi n)^2}, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

2. Каждому положительному значению подкоренного выражения соответствуют ровно два значения неизвестной, нулевому — одно, а отрицательному — ни одного. Поэтому для того чтобы решений было ровно 8, необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было положительным при $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ и отрицательным при $n = 4,\ 5,\ \ldots$

3. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a^2-(2\pi\cdot 3)^2 > 0, \\ a^2-(2\pi\cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 2\pi\cdot 3, \\ |a| > 2\pi\cdot 4. \end{cases}$$

Ответ: $-8\pi < a < -6\pi,\ 6\pi < a < 8\pi$.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Ответ обоснован и состоит из верных промежутков, но дополнительно содержит хотя бы один из их концов.
2	Решение опирается на верное рассуждение, в котором только не учтены возможные отрицательные значения неизвестной или имеются другие существенные изъяны. В результате, возможно, получен неверный ответ.
1	Ответ неверен или не получен, но найдено верное выражение для неизвестной или ее квадрата.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С5-3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x+a|| = 9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$9|x-1| + |3x - |x+a|| - 4x = 0.$$

Непрерывная функция $f(x) = 9|x-1| + |3x - |x+a|| - 4x$:

1) неограниченно возрастает при $x \geqslant 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geqslant 9 - 4 - 4 = 1 > 0$;

2) убывает при $x \leqslant 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geqslant -9 - 4 + 4 = -9 < 0$.

Следовательно, $x = 1$ — точка минимума функции f, а область ее значений есть множество $[f(1);\, +\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда

$$f(x) \leqslant 0.$$

Решим это неравенство:

$$|3-|1+a|| \leqslant 4;$$
$$-4 \leqslant |a+1|-3 \leqslant 4;$$
$$|a+1| \leqslant 7;$$
$$-7 \leqslant a+1 \leqslant 7;$$
$$-8 \leqslant a \leqslant 6.$$

Ответ: $-8 \leqslant a \leqslant 6$.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1);\, +\infty)$) или решение содержит ошибки.
2	Верно рассмотрены отдельные случаи расположения , в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).
1	Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С5-4

Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|.$$

График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

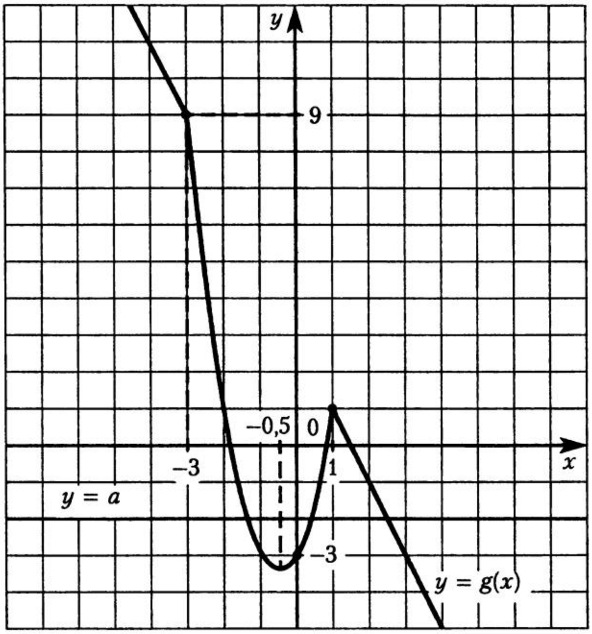
1) Если $x \leqslant -3$ или $x \geqslant 1$, то

$$|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3 \text{ и } g(x) = -2x + 3.$$

2) Если $-3 < x < 1$, то

$$|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3 \text{ и } g(x) = 2x^2 + 2x - 3.$$

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если



$$g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1),$$

где $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}5$; $g(1) = 1$. Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

C5

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\,|\,2|x| - a^2\,| = x - a$$

имеет ровно три различных решения.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = 2\,|\,2|x| - a^2\,| - x + a$$

имеет две различных точки перемены знака.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$$

лежит в интервале $(-3; 3)$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$x^2 - 2x \leqslant a - 1 \text{ и } x^2 - 4x \leqslant 1 - 4a$$

образуют на числовой оси отрезок длины единица.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$y + 2x \geqslant a \text{ и } y - x \geqslant 2a$$

являются решениями неравенства

$$2y - x > a + 3.$$

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geqslant 0, \\ ax > 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 + 4x + \left| x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right| - a$$

принимает

1) только неотрицательные значения;

2) как положительные, так и отрицательные значения.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется:

1) для всех $x > 0$;

2) для всех $x < 0$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|1-x|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

10. Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

1. $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -2$.

2. $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

3. $-5 < a < 1$.

4. $a = \frac{1}{4}$ и $a = 1$.

5. $a > \frac{9}{8}$.

6. $-2 \leqslant a \leqslant 0$.

7. 1) $a \leqslant -\frac{57}{32}$; 2) $a > -\frac{57}{32}$.

8. 1) $a > 1$; 2) $a \geqslant 0$.

9. $a = -\frac{1}{32}$; $a = -\frac{1}{4}$.

10. $p = -6$, $q = 7$.