

Домашнее задание 12 по планиметрии (ЕГЭ-2010)

26.1. ЕГЭ—12, Планиметрия

26.1.1. Планиметрия Углы в окружностях.

p12-1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 6\sqrt{6}$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC .

♦ 12.

p12-2. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L , причем CL - диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC , если $\sin \angle BAC = 1/4$.

♦ $\sqrt{15}$.

p12-3. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника CKB , если $AC = b$, $\angle ABC = \beta$.

♦ $0,5b^2 \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta$.

p12-4. В треугольнике ABC точка O - центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle LOA = 45^\circ$, $LK = 8$, $AK = 7$.

♦ $56\sqrt{2}$.

p12-5. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C . Из точки C провели секущую под углом 7° , пересекающую окружность в точках D и E , считая от точки C . Известно, что $DC = 3$, $\angle DAC = 30^\circ$. Найдите диаметр окружности.

♦ $4\sqrt{3} \sin 7^\circ$.

p12-6. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как $2 : 1$, а $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

♦ $7\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$, $2\sqrt{21}$.

p12-7. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка BD .

♦ $4\sqrt{3}$.

p12-8. В треугольнике ABC $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = c$, $AC = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N . Найдите длину отрезка AN .

♦ $(\sqrt{3} - 1)(c + b/\sqrt{2})$.

p12-9. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC , если $BD = 2$, $AB = 1$. $\angle ABD : \angle DBC = 4 : 3$.

♦ $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$.

p12-10. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найдите длину стороны AC .

♦ 10.

p12-11. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD . Из точки D радиусом, равным AD , описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC , если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$.

♦ nc/m .

p12-12. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из вершины A , пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D . Найдите длину отрезка BC , если $AC = DC = 1$.

♦ $\sqrt{2}$.

p12-13. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найдите длину отрезка KC , если $AK = 6$, $BC = 4$.

♦ 2.

p12-14. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку B параллельна AC . Известно, что $EA : DA = 3 : 4$, $S_{\triangle DCB} = 16$. Найдите площадь треугольника BCE .

♦ 9.

p12-15. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E - точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найдите сторону AC .

♦ $\sqrt{3}$.

p12-16. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем её основание AD является диаметром, а $\angle BAD = \pi/3$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P , такой, что $AP : PD = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE .

◆ $3\sqrt{3}$.

p12-17. Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC , пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D . Известно, что радиус окружности равен 2, $AC = \sqrt{12}$ и $\angle CDA + \angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите секущую AD .

◆ $3/\sin 15^\circ, 3/\cos 15^\circ$.

p12-18. В окружности проведены диаметр MN и параллельная ему хорда AB . Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q . Известно, что $MP = p$, $Q = q$. Найдите диаметр MN .

◆ \sqrt{pq} .

p12-19. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN , соединяющая стороны AB и BC . Окружность, проведенная через точки M , N и C , касается стороны AB , а её радиус равен $\sqrt{2}$. Найдите синус угла ACB , если $AC = 2$.

◆ $1/2$.

p12-20. Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B . На большей из дуг AB взята точка D , для которой $CD = 2$ и $\sin \angle ACD \cdot \sin \angle BCD = 1/3$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB .

◆ $2\sqrt{3}/3$.

p12-21. Окружность с центром в точке O , лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , касается его катетов AB и BC . Найдите длину AC , если известно, что $AM = 20$, $AN : MN = 6 : 1$, где M — точка касания AB с окружностью, N — точка пересечения окружности с AC , расположенная между точками A и O .

◆ $2,25 + 9\sqrt{5}$.

p12-22. В треугольнике ABC $AB = 3$, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, $LM = 1$. Найдите высоту треугольника KNC , опущенную из вершины C и его площадь.

◆ $1/2; 3/4$.

p12-23. На окружности, радиус которой равен 7, расположены точки A, B, C, D в указанном порядке. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E , причем $\angle AED = 60^\circ$. Угол ABD в три раза больше угла BAC . Найдите AD .

◆ 14.

p12-24. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB . Найдите косинус угла ACB .

◆ $2/\sqrt{7}$.

p12-25. Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O , которая пересекает сторону AB в точке F , а сторону AD — в точке E . Известно, что угол BAD прямой, хорда EF равна хорде FB и хорды BC, CD, ED равны между собой. Найдите угол ABO .

◆ $3\pi/7$.

p12-26. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно, прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15° . Найдите углы треугольника ABC .

◆ $60^\circ, 75^\circ, 45^\circ$.

p12-27. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.

◆ $\sqrt{m^2 + n^2}$.

p12-28. Вокруг четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями описана окружность радиуса 2. Найдите сторону CD , если $AB = 3$.

◆ $\sqrt{7}$.

p12-29. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Радиус AO перпендикулярен радиусу OB , а радиус OC перпендикулярен радиусу OD . Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD , равна 9, $AD = 2BC$. Найдите площадь треугольника AOB .

◆ $45/2$.

p12-30. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A . Найдите площадь треугольника ABC , если $BK = 1$, $CK = 4$, $\operatorname{tg} \angle CAB = 1/\sqrt{15}$.

◆ $0,25(5 + \sqrt{15})$.