Задачи
Арнольда

*Я очень благодарен большому числу своих
бывших и нынешних учеников,
написавших эту книгу.*

В.И. Арнольд

Задачи Арнольда

ФАЗИС
Москва 2000

УДК 51

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 98-01-14146

Издание поддержано фондом «КНИГА–НАУКА–КУЛЬТУРА»

Задачи Арнольда.
— М.: ФАЗИС, 2000. — X+454 с.

ISBN 5-7036-0060-X

В книге собраны задачи выдающегося математика современности академика В.И.Арнольда, которые он ставит своим ученикам уже более 40 лет. Ко многим задачам приведены комментарии, содержащие обзор результатов по данному направлению исследований. Широта охвата самых различных разделов математики делает издание уникальным и обозначающим передний край развития науки.

Книга адресована широкому кругу специалистов в области математики и смежных наук, а также аспирантам и студентам старших курсов.

Издательство ФАЗИС (ЛР № 064705 от 09.08.96)
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44. E-mail: phasis@aha.ru

ППП Типография «Наука» Академиздатцентра РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 1570

ISBN 5-7036-0060-X

Оглавление

Поставить правильный вопрос
труднее, чем решить его.

Георг Кантор

Предисловие редактора и издателя

В настоящем издании собраны задачи, которые на протяжении более сорока лет ставились Владимиром Игоревичем Арнольдом.

В основном, это весьма полное собрание задач, которыми он дважды в год начинает (после каникул) свой семинар по теории особенностей дифференцируемых отображений. (Этот знаменитый семинар работает на мехмате МГУ уже более 30 лет и по праву может считаться одним из мировых центров математических исследований.) Кроме того, это задачи, опубликованные Владимиром Игоревичем в своих многочисленных статьях и книгах. Очевидно, однако, что нам не удалось пока собрать вместе все задачи Арнольда, и мы будем благодарны читателям, которые сообщат нам о задачах, не вошедших в настоящее издание.

Книга состоит из двух частей. В первой приведены условия задач; краткие пояснения, набранные курсивом, принадлежат автору. Во второй части собраны комментарии, содержащие обзор полученных результатов по данной задаче и, иногда, историческую справку. Практически все комментарии подписаны их составителями (как правило, учениками Владимира Игоревича); неподписанные краткие комментарии принадлежат автору или редактору. В отдельных случаях комментаторы включили в свои комментарии описания своих неопубликованных и непроверенных результатов, иногда относящихся к классическим проблемам; читателю следует рассматривать эти утверждения как гипотезы. Библиография ко всем комментариям тщательно проверена редактором.

Ради исторической объективности мы оставляем в книге задачи-близнецы, — которые, хотя и относятся к разным годам, но практически повторяют друг друга. В этих случаях подробно комментируется только одна из таких задач (не обязательно самая ранняя), а остальные задачи-близнецы снабжаются ссылкой: «См. комментарий к задаче ⟨*номер*⟩». Подобные ссылки используются также и в других случаях, когда информация, приведенная в комментарии к одной задаче, относится и к другой.

Все математические обозначения в книге общепринятые. Однако обозначения сфер и шаров разных размерностей следует оговорить особо. Непараллелизуемые n-мерные сферы (т. е. при $n \notin \{0, 1, 3, 7\}$) всегда обозначаются через S^n. Сферы размерностей $n = 0, 1, 3, 7$, как правило, обозначаются через $\mathbb{S}^n$, но в ряде случаев (специально указанных редактору В. И. Арнольдом или, например, когда речь идет о букете сфер $S^2 \vee S^1$) — тоже через S^n. Замкнутый шар размерности $n \geqslant 3$ обозначается через B^n. Для двумерного шара (диска), как правило, используется обозначение D^2. Наконец, одномерный шар (отрезок) $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ мы обозначаем через $[a; b]$.

Мы надеемся, что читатель догадывается о той непростой работе, которую пришлось проделать при подготовке книги к изданию, и мы благодарим всех участников этого проекта, в первую очередь — авторов комментариев. Мы не вполне удовлетворены качеством нашей собственной работы, но стремление скорее выпустить книгу в свет победило. Многие задачи остались без комментариев; за исключением нескольких случаев это означает лишь то обстоятельство, что никто пока не взял на себя труд подготовить соответствующий комментарий.

В то же время мы считаем, что реализация настоящего проекта только начата, и мы будем признательны всем, кто своими замечаниями, предложениями, уточнениями, новыми комментариями или историческими справками окажет содействие подготовке нового издания этой книги.

М. Б. Севрюк
В. Б. Филиппов

Москва, 1999

Мир держится на детях,
которые учатся.

Роже Пейрефит

Предисловие автора

Москва давно славится своими математическими семинарами. Обычно в начале семестра я формулирую десяток-другой задач. Анализ последующего показывает, что среднее время полураспада задачи (после которого она обычно более или менее решена) — порядка *семи лет.*

Пуанкаре говорил, что *точно* сформулировать в виде вопроса, допускающего ответ типа «*да*» или «*нет*», можно только *малоинтересные* задачи. По-настоящему интересные вопросы так не решаются: они приводят к *постепенному* продвижению вперед, к *непрерывному* развитию.

Главное в задаче — по мнению Пуанкаре — это понять, что́ важно в ее условии, а *что́ можно менять* (подобно граничным значениям в эллиптической задаче).

И. Г. Петровский, один из моих учителей в математике, учил меня, что самое главное, что́ ученик должен узнать от учителя — это что некоторый *вопрос еще не решен.* Дальнейший выбор вопроса из нерешенных — дело самого ученика. Выбирать за него задачу — всё равно, что выбирать сыну невесту.

Я, особенно в шестидесятые годы, почти не записывал своих задач, поэтому большинство из них, вероятно, потеряно. Некоторые задачи вошли в тексты статей и книг. Некоторые задачи к семинару я узнавал в беседах с друзьями и коллегами. Надеюсь, что ниже в большинстве таких случаев авторы цитируются.

Есть два основных способа формулировать математические утверждения (задачи, гипотезы, теоремы, ...): русский и французский. *Русский способ* состоит в том, чтобы выбрать *наиболее простой и конкретный* случай (так, чтобы никто не мог упростить формулировку, сохраняя суть дела). *Французский способ* состоит в том, чтобы *обобщить утверждение настолько, чтобы никто не мог его обобщить дальше.*

Я полагаю, что это деление более или менее соответствует делению людей на правополушарных решателей поставленных задач и левополушарных авторов программ исследований.

Будучи студентом младшего курса, я задал однажды вопрос аспиранту Р. Л. Добрушину. «Один дурак может задать столько вопросов, что и сто умных не смогут ответить», — сказал Добрушин. Я думаю, лучше всё же публиковать вопросы. Между прочим, оказалось, что вопрос, который я тогда задал Добрушину — *можно ли увеличить периметр прямоугольника последовательностью складываний* — не решен и сегодня и считается «фольклорным» (хотя я, мне кажется, опубликовал его лет эдак 40 назад).

Я. Б. Зельдович считал, что постановка задачи — искусство куда более тонкое, чем решение. «*Сто́ит точно сформулировать вопрос*, — говорил он, — *как тотчас найдется подходящий математик для решения.* Ведь *математики, они как мухи,* — умеют ходить по потолку!»

Это привело его к известным битвам, где Понтрягин с Логуновым пытались придраться к математической строгости его теорий. Битвы закончились строчкой в книге Понтрягина: «Некоторые физики считают, что математический анализ можно правильно применять, не всё зная о его обосновании. Я с ними согласен.»

Зельдович был этой строчкой обижен: «Почему он не назвал меня по фамилии?» — сказал мне тогда Яков Борисович.

Я очень благодарен большому числу своих бывших и нынешних учеников, написавших эту книгу. Я постарался исправно их цитировать.

Обычно обучение математике в Москве начинается до школы. Вот пара примеров (дети 4–5 лет решают их за полчаса):

1) Из бочки вина перелили ложку в стакан чая, а потом из стакана — ту же ложку полученного коктейля в бочку. Где теперь больше объем посторонней жидкости?

2) От шахматной доски отрезали два противоположных уголка (a1, h8). Можно ли покрыть 62 оставшихся поля (без перекрытий) 31-й доминошкой, покрывающей 2 поля (соседних)?

Лейбниц думал, что кривая пересекается со своей окружностью кривизны в четырех бесконечно-близких точках и что $d(ab) = (da)(db)$.

Гильберт настаивал на том, что по-настоящему интересная математическая работа редко бывает правильной. Например, в своем очерке теории относительности он утверждает, что «*одновременность* существует сама по себе». Его описание геометрии чисел в статье о Минковском и вовсе не выдерживает никакой критики.

А. Вейль пишет, что его знаменитую диссертацию прочли лишь двое оппонентов, да и те мало что поняли вследствие недостатка своей квалификации (она была ошибочной). И это — одна из важнейших работ (1926–1928) нашего века по теории чисел.

Ошибки самого Пуанкаре слишком знамениты, чтобы о них здесь писать: он путал гомологии с гомотопиями и прозевал носящее его имя трехмерное многообразие додекаэдрического линзового типа. Многие «решенные» им вопросы теории дифференциальных уравнений, динамических систем и небесной механики всё еще открыты.

«Если я и вижу в природе какую-либо пустоту, то только лишь в голове у Паскаля», — писал Декарт Гюйгенсу.

Математик N отказался исправить опечатки при переиздании своей книги, чтобы не лишать читателя удовольствия находить его ошибки.

Кажется, Наполеон говорил, что человека, не умеющего *думать*, нельзя ничему и научить.

Я надеюсь, что настоящая книга научит думать хоть кого-нибудь (хотя бы приведенными выше задачами 1 и 2).

В. И. Арнольд

Гарш (Франция), 1999

К чему воплощать замыслы в жизнь,
коль скоро сам по себе замысел
приносит столько радости?

Шарль Бодлер

Условия задач

1956

1956-1. «Задача о мятом рубле»: можно ли увеличить периметр прямоугольника последовательностью складываний?

1958

1958-1. Рассмотрим разбиение отрезка $[0;1]$ на три отрезка Δ_1, Δ_2, Δ_3 и переложим их в порядке Δ_3, Δ_2, Δ_1. Исследовать получившуюся динамическую систему $[0;1] \to [0;1]$: верно ли, что скорость перемешивания и другие подобные эргодические характеристики одинаковы при почти всех длинах $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ отрезков разбиения?

Аналогичный вопрос можно задать и для n отрезков и для любых перестановок (причем можно также допускать изменение ориентации части отрезков).

1958-2. Пусть в тетраэдре площади всех четырех граней равны. Доказать, что равны длины противоположных ребер (и все грани конгруэнтны!). *Идея очень проста: развернем, разрезав по трем ребрам из вершины.*

1958-3. Найти многомерную версию гипотезы Гильберта о числе предельных циклов. *Например, интересно число интегральных кривых, соединяющих два алгебраических или инвариантных многообразия и достаточно «монотонных».*

1959

1959-1. Пусть $z \mapsto z + a + b\sin z \mod 2\pi$ — биголоморфное отображение окружности $\operatorname{Im} z = 0$ на себя, аналитически не сопряженное повороту, но имеющее иррациональное число вращения. Верно ли, что в любой окрестности окружности есть периодическая орбита?

1963

1963-1. Имеется ли действительная неустойчивость в многомерных задачах теории возмущений, когда инвариантные торы не делят фазовое пространство?

1963-2. Доказать наличие невырожденных гиперболических точек (и расщепление сепаратрис) в любой окрестности эллиптической неподвижной точки 0 общего аналитического отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$, сохраняющего площади.

1963-3. Имеются ли в задаче трех (и n) тел при любых значениях масс и сравнимых друг с другом взаимных расстояниях ограниченные движения, заполняющие множество положительной меры? Существует ли критическое значение параметра возмущения μ, при котором инвариантный тор с данным диофантовым набором частот разрушается?

1963-4. Пусть T — сохраняющий ориентацию аналитический диффеоморфизм окружности на себя с диофантовым числом вращения ω. Всегда ли можно аналитической заменой переменной S превратить T в поворот T_0 на угол $2\pi\omega$: $STS^{-1} = T_0$?

1963-5. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами

$$\dot{q} = \omega, \quad \dot{x} = A(q)x; \qquad q \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / 2\pi\mathbb{Z}^k, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\omega \in \mathbb{R}^k$ — постоянный вектор с диофантовыми компонентами, а $A\colon \mathbb{T}^k \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ — аналитическая функция. Всегда ли такая система приводима при $k > 1$, $n > 1$?

1963-6. Пусть Γ — (вообще говоря, некоммутативная) группа с конечным числом образующих $a_1, \ldots, a_s$. Динамической системой с «временем» Γ назовем *действие* группы Γ на пространстве с мерой Ω

сохраняющими меру преобразованиями A_γ ($\gamma \in \Gamma$). Для такой системы можно определить временны́е средние следующим образом. Рассмотрим совокупность Γ_n элементов Γ, получающихся n (но не меньше, чем n) умножениями из $a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_s, a_s^{-1}$, и пусть число таких элементов равно $N(n)$. Тогда «временно́е среднее» $f_n(x)$ функции $f(x)$, $x \in \Omega$, определим как

$$f_n(x) = \frac{1}{N(n)} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f(A_\gamma x).$$

Пусть теперь Ω — однородное пространство, на котором транзитивно действует компактная группа Ли G, и пусть преобразования A_γ ($\gamma \in \Gamma$) принадлежат G.

Справедливы ли эргодические теоремы Биркгофа и Неймана для таких динамических систем с некоммутативным временем?

Динамическим системам (Ω, G, Γ) с некоммутативным временем Γ посвящены и последующие три задачи.

1963-7. Для ряда групп Γ удается доказать, что последовательность точек $A_\gamma x$ равномерно распределена в своем замыкании, если только оно связно; иначе говоря, временны́е средние $f_n(x)$ непрерывной функции сходятся к пространственному среднему по замыканию $\overline{\Gamma(x)}$ траектории $A_\gamma x$ ($\gamma \in \Gamma$):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}\overline{\Gamma(x)}} \int\limits_{\overline{\Gamma(x)}} f(y)\, d\mu(y).$$

Примерами являются свободная группа Γ с двумя образующими a, b и группа Γ с образующими a, b, c и соотношением $abc = e$.

Распространяется ли этот результат на произвольные группы Γ с конечным числом образующих?

1963-8. Распространяется ли результат, указанный в предыдущей задаче, на некомпактный случай? (Например, пусть Ω — плоскость Эвклида или Лобачевского.)

1963-9. Каково обобщение результата, указанного в задаче *1963-7*, на случай, когда роль времени играет группа Ли, например, группа движений плоскости Лобачевского?

1963-10. В каких случаях группа монодромии системы $dx = [A(z)\,dz]x$ линейных дифференциальных уравнений на римановой поверхности M ограничена? Здесь $z \in M$, $x \in \mathbb{C}^n$, а $A(z)\,dz$ — матрица из дифференциалов, зависящая от z аналитически, исключая конечное число особых точек.

1963-11. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений $dx/dz = A(z)x$, где $z \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $x \in \mathbb{C}^n$, а A — матрица, зависящая от z аналитически, исключая 3 особые точки z_1, z_2, z_3 на сфере Римана $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Обозначим $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ через Z. Если группа монодромии системы $dx/dz = A(z)x$ ограничена, то эта система имеет однозначный первый интеграл $(B(z)x, \overline{x}) = \mathrm{const}$, где $B(z)$ — положительно определенная самосопряженная матрица, однозначная при $z \in Z$.

Верно ли, что поверхность, изображающая решения нашей системы в $(2n+1)$-мерном многообразии $M_c : (Bx, \overline{x}) = c$, равномерно распределена по отношению к следующей метрике: на Z вводится метрика постоянной отрицательной кривизны, а на $\mathbb{C}^n(z)$ метрику определяет скалярное произведение $(B(z)x, y)$?

1963-12. Систему $dx/dz = A(z)x$, о которой шла речь в предыдущей задаче, можно рассматривать как динамическую систему, в которой роль времени играет универсальная накрывающая Z, т. е. плоскость Лобачевского. Но с ней можно связать также обыкновенную динамическую систему с непрерывным временем. С этой целью рассмотрим в качестве точки нового фазового пространства точку $(z, x) \in M_c$ вместе с направлением ξ вектора, касательного к Z в z. Движение определим так: точка z движется равномерно по геодезической направления ξ, а x над z — в соответствии с уравнениями $dx/dz = A(z)x$. Метрика и инвариантная мера определены в предыдущей задаче.

Указанная конструкция позволяет «умножать» поток, заданный на многообразии, на группу автоморфизмов (являющуюся представлением фундаментальной группы многообразия). Задача состоит в изучении получающихся «произведений».