МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С3)

Методы решения неравенств
с одной переменной

Корянов А. Г., *г. Брянск*, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., *г. Москва*, aaprokof@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

1. Алгебраические методы решения 2

1.1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем……………………………… 2
- неравенства, содержащие иррациональные выражения.................... 3
- неравенства, содержащие показательные выражения.......................... 7
- неравенства, содержащие логарифмические выражения…………..... 8
- неравенства, содержащие выражения с модулями……..…………. 10
- расщепление неравенств……....... 12

1.2. Метод замены……………………. 13
- введение одной новой переменной……………………………….. 13
- введение двух новых переменных... 14
- тригонометрическая подстановка.. 15

1.3. Разбиение области определения неравенства на подмножества……… 16

2. Функционально-графические методы решения…………………….. 17

2.1. Использование области определения функции……………………….. 18

2.2. Использование непрерывности функции…………………………….... 18
- метод интервалов………………… 18
- первое обобщение метода интервалов…………………………….... 20
- второе обобщение метода интервалов…………………………….... 20
- рационализация неравенств…….. 22
- метод интервалов на координатной окружности…………………………… 26

2.3. Использование ограниченности функций……………………………… 27
- метод оценки…………………….. 27
- неотрицательность функции…..... 27
- применение свойств модуля…..... 28
- ограниченность синуса и косинуса.. 28
- применение классических неравенств………………………….. 29

2.4. Использование монотонности функций……………………………… 30
- монотонность функции на множестве **R**……………………… 30
- монотонность функции на промежутке……………………….. 31
- функции разной монотонности….. 33

2.5. Графический метод………………. 34

3. Геометрические методы решения 35

3.1. Расстояние на координатной прямой………………………………… 35

3.2. Расстояние на координатной плоскости……………………………… 36

3.3. Векторная интерпретация неравенства…………………………… 37

Упражнения………………………… 38

Ответы……………………………….. 45

Список и источники литературы… 47

В зависимости от трактовки или интерпретации неравенства различают алгебраический, функциональный или геометрический подходы в решении неравенств.

Первые два подхода различаются в понятии неравенства, которое рассматривается либо как сравнение двух выражений, либо как сравнение двух функций.

При алгебраическом подходе выполняют равносильные общие или частичные преобразования неравенств (над обеими частями неравенства или отдельных выражений, входящих в неравенство).

При функциональном подходе используют свойства функций (монотонность, ограниченность и т.д.), входящих в данное неравенство.

В некоторых случаях алгебраический и функциональный подходы взаимно заменяемы. Это можно проследить, начиная с определения неравенства. Далее в преобразованиях неравенства мы используем утверждения, придерживаясь алгебраической или функциональной линии. Например, утверждение «Если обе части неравенства $g(x) > h(x)$ возвести в одну и ту же нечетную степень, то получим неравенство $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$, равносильное данному» можно заменить другим утверждением «По свойству строго возрастающей функции $y = t^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, на $\mathbf{R}$ неравенства $g(x) > h(x)$ и $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$ равносильны».

Основой геометрического подхода является интерпретация неравенств и их решений на координатной прямой, координатной плоскости или в пространстве, что позволяет перейти к равносильным неравенствам, опираясь на геометрические утверждения.

1. Алгебраические методы решения

Если исходить из определения неравенства, в котором в обеих частях записаны выражения с переменной, то при решении неравенств используют преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), позволяющие привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований множество решений исходного неравенства либо не меняется, либо расширяется (можно получить посторонние решения), либо сужается (можно потерять решения). Поэтому важно знать, какие преобразования неравенства являются равносильными и при каких условиях.

1.1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма.

Поэтому ниже приведены схемы решения некоторых стандартных неравенств определенного вида. При этом отметим, что на практике некоторые цепочки преобразований делают короче, пропуская некоторые очевидные преобразования. Например, вместо длинной цепочки преобразований

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in \mathbf{N},\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} > \left(\sqrt[2n]{g(x)}\right)^{2n}, \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases}$$

используют краткую схему решения

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in \mathbf{N},\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

В общем случае, если решение неравенства не укладывается в стандартную схему, ход решения разбивают на несколько логически возможных случаев.

Пример 1. (МИОО, 2009). Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Решение. Так как $x^2-6x+9=(x-3)^2$, то область допустимых значений переменной x определяется условиями:

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ 5-x\geq 0, \\ \sqrt{5-x}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x\leq 5, \\ x\neq 4. \end{cases}$$

Исходное неравенство при полученных ограничениях для переменной x равносильно неравенству

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\cdot\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\geq 0. \quad (*)$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geq 0$, то рассмотрим два случая.

1. $\sqrt{x^2-6x+9}-1=0 \Leftrightarrow |x-3|=1$, что возможно при $x=2$ или $x=4$. Значит, с учетом полученных ранее ограничений, $x=2$ – решение, так как в этом случае левая часть неравенства $(*)$ равна нулю.

2. $\sqrt{x^2-6x+9}-1\neq 0$. Тогда неравенство $(*)$ равносильно неравенству

$$x+\frac{3}{x}-4\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0.$$

На числовой прямой Ox (рис.1) дано графическое представление решения последнего неравенства.

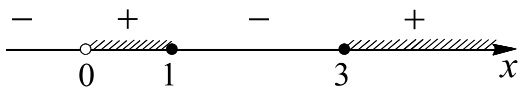

Рис. 1

Замечание. При решении неравенства $\frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0$ использован метод интервалов (см. раздел «Метод интервалов»).

С учетом полученных ранее ограничений записываем ответ.

***Ответ*:** $0<x\leq 1$, $x=2$, $3\leq x<4$, $4<x\leq 5$.

Пример 2. (МИЭТ, 2000). Решите неравенство

$$(x+2)^2\leq 2(x+1)\sqrt{2x+3}.$$

Решение. Выполняя равносильные преобразования данного неравенства, получим:

$$(x+2)^2\leq 2(x+1)\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4-2(x+1)\sqrt{2x+3}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{2x+3}+2x+3\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-2(x+1)\sqrt{2x+3}+\left(\sqrt{2x+3}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)-\sqrt{2x+3}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

***Ответ*:** $\sqrt{2}$.

неравенства, содержащие иррациональные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства.

- $\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$ (1)

- $\sqrt[2n]{f(x)}\geq\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$ (2)

- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0; \end{cases}$ (3)

- $\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0; \end{cases}$ (4)

- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$ (5)

- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$ (6)

- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \vee g(x)$; (7)

- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \vee g^{2n+1}(x)$, (8)

где символ $\vee$ в схемах (7) и (8) заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \ge, \le$.

Пример 3. Решите неравенство

$$\sqrt{x+18} < 2 - x.$$

Решение. Если $2 - x < 0$ или $2 - x = 0$, то исходное неравенство не выполняется, так как $\sqrt{x+18} \ge 0$.

Пусть $2 - x > 0$, тогда при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим на ее области определения и при условии $2 - x > 0$ равносильное неравенство.

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \ge 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \ge -18, \\ x < 2. \end{cases}$$

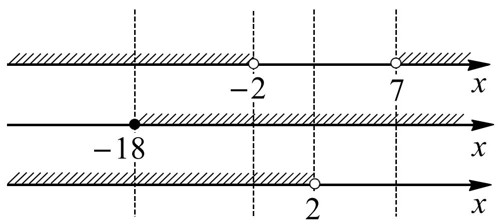

Рис. 2

На рис. 2 представлен способ графической интерпретации получения решения последней системы неравенств.

В итоге получаем $-18 \le x < -2$ – решение системы.

Ответ: $-18 \le x < -2$.

Для решения данного неравенства можно использовать схему (3). Тогда получим, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \ge 0, \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \ge -18, \\ x \le 2. \end{cases}$$

В отличие от рисунка 2 другой способ графического представления решения последней системы неравенств с использованием одной числовой прямой Ox представлен на рис. 3.

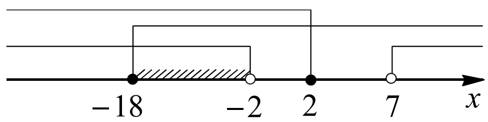

Рис. 3

Пример 4. (МИЭТ, 1999). Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+10x+9} \ge x^2 - 2x - 3.$$

Решение. Используя схему (6), получим, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2+10x+9 \ge (x^2-2x-3)^2, \\ x^2-2x-3 \ge 0. \end{cases}$$

и

$$\text{(II)} \begin{cases} x^2+10x+9 \ge 0, \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$$

Для системы (I) имеем:

$x^2 - 2x - 3 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$;

Первое неравенство системы (I) приводим к виду:

$$(x+1)(x+9) \ge (x+1)^2(x-3)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\big((x+1)(x-3)^2 - (x+9)\big) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)x(x^2-5x+2) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)x\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\le 0 .$$

Заметим, что $0<\frac{5-\sqrt{17}}{2}<\frac{1}{2}$, а $\frac{9}{2}<\frac{5+\sqrt{17}}{2}<5$.

На числовой прямой Ox (см. рис. 4) дано графическое представление решения первого неравенства системы (I).

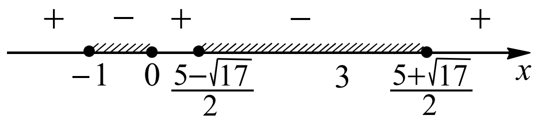

Рис. 4

Тогда решением системы (I) являются (см. рис. 5) все значения

$$x\in\{-1\}\cup\left[3;\,\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

Для системы (II) имеем:
$x^2+10x+9\ge 0$ при $x\in(-\infty;-9]\cup[-1;\infty)$;

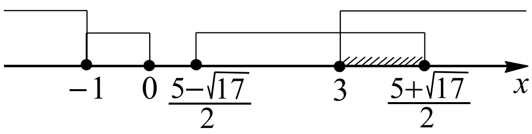

Рис. 5

$x^2-2x-3<0$ при $x\in(-1;3)$.

Следовательно, решением системы (II) будет $x\in(-1;3)$.

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $\left[-1;\,\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

При решении данного в примере 4 неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (6). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода.

Если $x^2-2x-3\ge 0$, то обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим на его области определения и при условии $x^2-2x-3\ge 0$ равносильное неравенство, то есть систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+10x+9\ge (x^2-2x-3)^2, \\ x^2+10x+9\ge 0, \\ x^2-2x-3\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10x+9\ge (x^2-2x-3)^2, \\ x^2-2x-3\ge 0. \end{cases}$$

Пусть $x^2-2x-3<0$. Так как $\sqrt{x^2+10x+9}\ge 0$, то исходное неравенство выполняется на области его определения, т.е. получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+10x+9\ge 0, \\ x^2-2x-3<0. \end{cases}$$

Пример 5. (МИОО, 2009). Решите неравенство

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7, \\ 7-x\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x>0, \\ 1<x\le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x\le 7. \end{cases}$$

На рис. 6 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

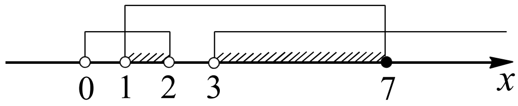

Рис. 6

Ответ: $1<x<2,\ 3<x\le 7$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2}=t,$ где $t\ge 0$. Тогда выразим $x=t^2+2$ и приведем данное неравенство к виду

$$\sqrt{2t^2+7}>t+2.$$

Так как $t+2>0$, то получаем равносильное неравенство $2t^2+7>t^2+4t+4$ или $t^2-4t+3>0$ при $t\ge 0$.

Отсюда получаем

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<1\\ t>3\end{array}\right.\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<1\\ t>3.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x-2}<1\\ \sqrt{x-2}>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x-2<1\\ x-2>9\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le x<3\\ x>11.\end{array}\right.$$

Ответ: $2\le x<3;\ x>11$.

Пример 7. (МИЭТ, 2002). Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{8+15x-2x^2}}.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями:

$$\begin{cases}8-x>0\\ 2x+1>0,\\ 8+15x-2x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8-x>0\\ 2x+1>0,\\ (2x+1)(8-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}5<x<8.$$

Запишем исходное неравенство в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}. \qquad (*)$$

Так как на области определения исходного неравенства $\sqrt{(8-x)(2x+1)}>0$, то, умножив обе части неравенства $(*)$ на $\sqrt{(8-x)(2x+1)}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{8-x}}-\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{2x+1}}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{2x+1}-\sqrt{8-x}>1\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{2x+1}>1+\sqrt{8-x}.$$

Левая и правая части последнего неравенства неотрицательны при $-0{,}5<x<8$, поэтому после возведения их в квадрат и приведения подобных членов получим неравенство

$$2\sqrt{8-x}<3x-8\Leftrightarrow\begin{cases}3x-8\ge 0,\\ 8-x\ge 0,\\ 4(8-x)<(3x-8)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{8}{3},\\ x\le 8,\\ (9x-8)(x-4)>0\end{cases}\Leftrightarrow 4<x\le 8.$$

На рис. 7 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

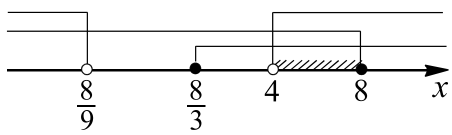

Рис. 7

С учетом условия $-0{,}5<x<8$ получаем ответ.

Ответ: $4<x<8$.

неравенства, содержащие показательные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства.

- $$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (9)$$

- $$(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \end{cases} \\ \quad \varphi(x) = 1. \end{array}\right. \quad (10)$$

В частности:

- Если число $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x). \quad (11)$$

- Если число $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x). \quad (12)$$

- $$(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad (13)$$

Пример 8. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1.$$

Решение. 1-*й способ*. Область допустимых значений переменной x определяется условием: $x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1. \end{array}\right.$

При допустимых значениях переменной преобразуем левую часть данного неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{\log_2\left(x^2-1\right)}\right)^{-1} =$$

$$= (x^2-1)^{-1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Получаем неравенство

$$\frac{1}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

2-*й способ*. Так как $1 > \dfrac{1}{2} > 0$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$, то, используя схему (12), получаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2\left(x^2-1\right) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 1, \\ x^2 - 1 > 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Замечание. При решении неравенства $\log_2\left(x^2-1\right) < 0$ использована стандартная схема решения логарифмических неравенств (см. раздел «неравенства, содержащие логарифмические выражения»).

Пример 9. Решите неравенство

$$(x^2 + x + 1)^x < 1.$$

Решение. Приведем неравенство к виду $(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0$ и воспользуемся схемой (9).

$$(x^2 + x + 1)^x < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1, \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2 + x + 1 < 1. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1) полученной совокупности:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 0, \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Решим систему (2) совокупности:

$$\begin{cases} x>0, \\ 0<x^2+x+1<1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x+1>0 \Leftrightarrow \\ x(x+1)<0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x(x+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x+1<0. \end{cases} \text{ Нет решений.}$$

Ответ: $x<-1$.

При решении данного неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (9). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода.

Выражение $(x^2+x+1)^x$ положительно, так как $x^2+x+1>0$ при всех значениях $x\in\mathbf{R}$. Прологарифмируем обе части данного неравенства

$$\lg(x^2+x+1)^x<\lg 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\lg(x^2+x+1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ \lg(x^2+x+1)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ \lg(x^2+x+1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x^2+x+1<1, \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ x^2+x+1>1. \end{cases} \end{array}\right.$$

неравенства, содержащие логарифмические выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства.

- $\log_{\varphi(x)} f(x)>\log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (14)$$

В частности:

- Если число $a>1$, то

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)>0. \quad (15)$$

- Если число $0<a<1$, то

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow g(x)>f(x)>0. \quad (16)$$

- $\log_{\varphi(x)} f(x)\ge\log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (17)$$

В частности:

- Если число $a>1$, то

$$\log_a f(x)\ge\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)\ge g(x)>0. \quad (18)$$

- Если число $0<a<1$, то

$$\log_a f(x)\ge\log_a g(x) \Leftrightarrow g(x)\ge f(x)>0. \quad (19)$$

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)>\log_{0,1}(x+3).$$

Решение. Так как основание 0,1 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяют условию $0<0{,}1<1$, то, используя схему (16), получаем, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x-2<x+3, \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})<0, \\ (x-1)(x+2)>0. \end{cases}$$

На рис. 8 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

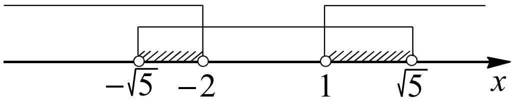

Рис. 8

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Пример 11. (МИОО, 2009). Решите неравенство

$$\log_x(7-x) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7) - \\ -\log_x(x-1).$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств

$$\begin{cases}\log_x\left((7-x)(x-1)\right) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7),\\ x>1.\end{cases}$$

В соответствии со схемой (14) для решения необходимо рассмотреть только случай, когда основание больше единицы, поэтому полученная система равносильна следующей

$$\begin{cases}(7-x)(x-1) < x^3-6x^2+14x-7,\\ 1<x<7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-5x^2+6x>0,\\ 1<x<7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2)(x-3)>0,\\ 1<x<7.\end{cases}$$

На рис. 9 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

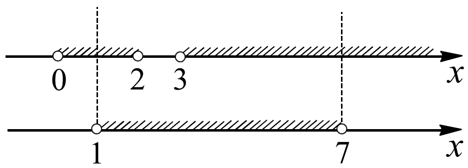

Рис. 9

Ответ: $(1;2)\cup(3;7)$.

Замечание. В приведенном решении данного неравенства в большей степени отражена математическая часть, чем методическая. При переходе от исходного неравенства к первой системе учтена часть области определения неравенства $x-1>0$. В следующей системе учтено еще условие $7-x>0$ и $(7-x)(x-1)>0$.

Пример 12. (ЕГЭ 2010). Решите неравенство

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

Решение. В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}|x|\ne 0,\\ 2^{x-1}\ne 1,\\ x+7>0,\\ x+7\ne 1,\\ x+12>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0,\\ x-1\ne 0,\\ x>-7,\\ x\ne -6,\\ x>-12\end{cases}$$

Из системы получаем значения

$$x\in(-7;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty).$$

Так как при допустимых значениях переменной x по свойствам логарифма справедливы равенства:

$$\frac{\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} = \log_{x+7}|x|$$

и

$$\frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)} = \log_{x+7}(x+12),$$

то исходное неравенство приводится к виду

$$2\log_{x+7}|x| \le \log_{x+7}(x+12) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \log_{x+7}x^2 \le \log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем на множестве

$$(-7;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty):$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+7<1,\\ x^2\ge x+12\end{cases}\\ \begin{cases}x+7>1,\\ x^2\le x+12\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-7<x<-6,\\ x^2-x-12\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-6,\\ x^2-x-12\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-7<x<-6,\\ (x-4)(x+3)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-6,\\ (x-4)(x+3)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7<x<-6,\\ -3\le x\le 4.\end{array}\right.$$

С учетом области определения данного неравенства

$$(-7;\,-6)\cup(-6;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,+\infty)$$

получаем ответ.

Ответ. $(-7;\,-6)\cup[-3;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,4]$.

неравенства, содержащие выражения с модулями

Пример 13. (МИЭТ, 2002). Решите неравенство

$$\frac{1}{|x-9|}\le\frac{x-3}{4x-11}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}x>9,\\ \dfrac{1}{x-9}\le\dfrac{x-3}{4x-11}\end{cases}\ \text{и (II)}\ \begin{cases}x<9,\\ \dfrac{1}{9-x}\le\dfrac{x-3}{4x-11}.\end{cases}$$

Для системы (I) имеем:

$$\text{(I)}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x>9,\\ \dfrac{x^2-16x+38}{(x-9)(4x-11)}\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x>9,\\ \dfrac{(x-8+\sqrt{26})(x-8-\sqrt{26})}{(x-9)(4x-11)}\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x\ge 8+\sqrt{26}.$$

Для системы (II) имеем:

$$\text{(II)}\Leftrightarrow\ \begin{cases}x<9,\\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)}\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x<2{,}75,\\ x=4.\end{array}\right.$$

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $x<2{,}75$, $x=4$, $x\ge 8+\sqrt{26}$.

Приведем некоторые стандартные схемы для решения неравенств с модулями, которые опираются на определение модуля, его геометрический смысл и свойства.

- $|f(x)|<g(x)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>-g(x),\end{cases}$ (20)
- $|f(x)|\le g(x)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)\ge -g(x);\end{cases}$ (21)
- $|f(x)|>g(x)\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}f(x)>g(x),\\ f(x)<-g(x);\end{array}\right.$ (22)
- $|f(x)|\ge g(x)\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge g(x),\\ f(x)\le -g(x);\end{array}\right.$ (23)
- $|\,f(x)\,|>|\,g(x)\,|\ \Leftrightarrow\ f^2(x)>g^2(x)\ \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\ \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)>0$; (24)
- $|f(x)|\ge|g(x)|\ \Leftrightarrow\ f^2(x)\ge g^2(x)\ \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\ \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)\ge 0$. (25)

Пример 14. Решите неравенство

$$\left|x^7+4x^5+x^2+2x-3\right|<$$
$$<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

Решение. Используя схему (20) получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^7+4x^5+x^2+2x-3<\\ \qquad <x^7+4x^5-x^2-2x+3,\\ x^7+4x^5+x^2+2x-3>\\ \qquad >-(x^7+4x^5-x^2-2x+3)\end{cases}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{cases}x^2+2x-3<0\\ x^5\left(x^2+4\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<1\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Ответ: $0<x<1$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\log_9(2x+1)+\left|\log_3(2x+1)\right|-1\ge 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему

$$\left|\log_3(2x+1)\right|\ge 1-\log_9(2x+1).$$

Используя схему (23), получаем, что это неравенство, а значит и исходное, равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\ge 1-\log_9(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\le -\big(1-\log_9(2x+1)\big)\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\ge 1-0{,}5\log_3(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\le 0{,}5\log_3(2x+1)-1\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(2x+1) \ge \dfrac{2}{3}, \\ \log_3(2x+1) \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 \ge \sqrt[3]{9}, \\ 0 < 2x+1 \le \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} < x \le -\dfrac{4}{9},\ x \ge \dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{2}$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\big|\,|2^x + x - 2| - 1\big| > 2^x - x - 1.$$

Решение. Используя схему (22), получаем, что данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |2^x + x - 2| - 1 > 2^x - x - 1, \\ |2^x + x - 2| - 1 < -2^x + x + 1. \end{array}\right.$$

Используя схемы (20) и (22), получаем, что эта совокупность равносильна следующей.

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2^x + x - 2 > 2^x - x, \\ 2^x + x - 2 < -2^x + x, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2^x + x - 2 < -2^x + x + 2, \\ 2^x + x - 2 > 2^x - x - 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ 2^{x+1} < 2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2^{x+1} < 4, \\ x > 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\,0) \cup (0;\,1) \cup (1;\,+\infty)$.

Для решения неравенств вида:

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| \vee g(x),$$

где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \ge, \le$, применяют метод промежутков. Для этого находят ОДЗ неравенства, определяют точки разрыва функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ и находят корни совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{array}\right.$$

На каждом из промежутков, на которые найденные точки разбивают ОДЗ, функции, стоящие под знаком модуля, имеют постоянный знак. Поэтому исходное неравенство на каждом промежутке заменяется на неравенство, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному.

Пример 17. Решить неравенство

$$|x-1| + |x-2| > 3 + x.$$

Решение. Решением совокупности $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0 \end{array}\right.$ являются числа 1 и 2.

Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;1)$, $[1;2)$ и $[2;+\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений под знаком модуля решим данное неравенство на каждом из этих промежутков (см. рис. 10).

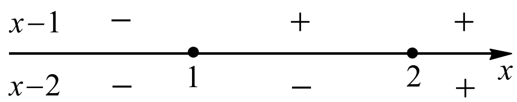

Рис. 10

Если $x<1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$-x+1-x+2 > 3+x \quad \Leftrightarrow \quad x<0.$$

Получаем, что $x<0$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Если $1 \le x < 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$x-1-x+2 > 3+x \quad \Leftrightarrow \quad x<-2.$$

Следовательно, на этом промежутке решений нет.

Если $x \ge 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$x-1+x-2 > 3+x \quad \Leftrightarrow \quad x>6.$$

Получаем, что $x>6$ есть решение исходного уравнения на рассматриваемом промежутке.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ: $x<0, x>6$.

расщепление неравенств

Если левая часть неравенства представляет собой произведение двух выражений, а правая часть равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

- $f(x)\cdot g(x)\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (26)

- $f(x)\cdot g(x)\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (27)

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)> 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)< 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (28)

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)< 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (29)

Пример 18. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\ge 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right).$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\ge 0\,.$$

В соответствии со схемой полученное неравенство равносильно совокупности систем (I) и (II):

$$\text{(I)}\ \begin{cases}x+\dfrac{3}{x}-4\ge 0, & (1)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\ge 0; & (2)\end{cases}$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases}x+\dfrac{3}{x}-4\le 0, & (3)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\le 0. & (4)\end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы (I). Для неравенства (1) имеем:

$$x+\frac{3}{x}-4\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}0<x\le 1,\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Для неравенства (2) имеем:

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|-1\ge 0\\ \sqrt{5-x}-1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|-1\le 0,\\ \sqrt{5-x}-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|\ge 1,\\ \sqrt{5-x}>1,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|\le 1,\\ \sqrt{5-x}<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le 2\end{array}\right.\\ x<4,\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 4,\\ 4<x\le 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x\le 2\,.$$

Значит все значения $x\in(0;1]$ – решения системы (I).

Найдем решение системы (II). Для неравенства (3), используя решение (1), имеем: $x+\dfrac{3}{x}-4\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x<0,\\ 1\le x\le 3.\end{array}\right.$

Для неравенства (4), используя решение (2) и учитывая ограничения

$$\begin{cases}5-x\ge 0,\\ \sqrt{5-x}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5,\\ x\ne 4\end{cases}$$

имеем:

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in[2;\,4)\cup(4;\,5]\,.$$

Значит все значения $x\in[2;\,3)$ – решения системы (II).

Объединяя решения систем (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $(0;1]\cup[2;3]$.

1.2. Метод замены

введение одной новой переменной

Пример 19. Решите неравенство

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2}\le 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$, где $t\ge 0$. Тогда получаем рациональное неравенство

$$t-\frac{2}{t-2}\le 3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-1)(t-4)}{t-2}\le 0 .$$

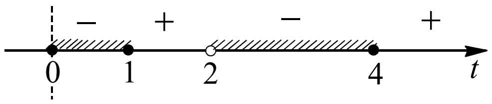

Рис. 11

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0\le t\le 1,\\ 2<t\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le \sqrt{x}\le 1,\\ 2<\sqrt{x}\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1,\\ 4<x\le 16.\end{array}\right.$$

Ответ: $[0;1]\cup(4;16]$.

Пример 20. (МИОО, 2009). Решите неравенство

$$\frac{1}{6x^2-5x}\ge\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{6x^2-5x+1}=t$, где $t\ge 0$, тогда получаем систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{t^2-1}\ge\dfrac{1}{t-1},\\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{1}{t^2-1}-\dfrac{1}{t-1}\ge 0,\\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{t}{(t-1)(t+1)}\le 0,\\ t\ge 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 0\le t<1 .$$

Выполняя обратную замену, получаем

$$\begin{cases}6x^2-5x+1<1,\\ 6x^2-5x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(6x-5)<0,\\ (2x-1)(3x-1)\ge 0.\end{cases}$$

Отсюда получаем (см. рис. 12) $0<x\le\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{6}$.

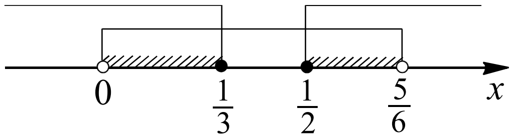

Рис. 12

Ответ: $0<x\le\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{6}$.

Пример 21. (ЕГЭ 2010). Решите неравенство

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>$$
$$>\log_5\left(7^{2-x^2}-1\right)^2.$$

Решение. В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)>0,\\ 7^{2-x^2}-1\ne 0.\end{cases}$$

Сделаем замену $7^{-x^2}=t$. Так как неравенство $-x^2\le 0$ выполняется при всех x, то по свойству степени с основанием больше единицы получаем $0<7^{-x^2}\le 7^0=1$. Отсюда $0<t\le 1$. С учетом последнего неравенства, запишем полученную выше систему

$$\begin{cases}(t-5)\left(7^{16}t-1\right)>0,\\ 7^2t-1\ne 0,\\ 0<t\le 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 0<t<7^{-16}.$$

Исходное неравенство с переменной t будет иметь вид

$$\log_5\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_5\frac{t-5}{7^{16}t-1}>$$
$$>\log_5(49t-1)^2,\ \text{где } 0<t<7^{-16}.$$

Используя свойство логарифма (при допустимых значениях переменной сумма логарифмов с одинаковым основанием равна логарифму произведения), получим

$$\log_5(t-5)^2>\log_5\left(7^2t-1\right)^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (t-5)^2>(49t-1)^2,$$

так как $(t-5)^2 > 0$ и $(49t-1)^2 > 0$ при $0 < t \le 7^{-16}$. Решим последнее неравенство:

$$(t-5)^2 > (49t-1)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (t-5)^2 - (49t-1)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big((t-5)-(49t-1)\big)\big((t-5)+(49t-1)\big) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (48t+4)(50t-6) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{12} < t < \frac{3}{25}.$$

С учетом ограничения на t получаем $0 < t < 7^{-16}$.

Выполнив обратную замену, имеем $7^{-x^2} < 7^{-16}$. Отсюда $x^2 > 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < -4, \\ x > 4. \end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Пример 22. (МФТИ, 2009). Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1} 2 + \log_2 \frac{x+1}{4}\right| +$$
$$+ |\log_2(4x+4) + \log_{x+1} 2| < 5.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \ne 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0, \\ x > 0. \end{array}\right.$$

Так как при допустимых значениях x справедливо равенство

$$\log_{x+1} 2 = \frac{1}{\log_2(x+1)},$$

то, сделав замену $\log_2(x+1) = t$, получим неравенство

$$\left|\frac{1}{t} + t - 2\right| + \left|t + \frac{1}{t} + 2\right| < 5.$$

Полагая $t + \dfrac{1}{t} = u$, получим неравенство

$$|u-2| + |u+2| < 5.$$

Используем геометрический способ решения последнего неравенства (см. раздел «Геометрические методы решения»). Расстояние между точками –2 и 2 меньше 5, поэтому для каждой из точек отрезка $[-2; 2]$ сумма расстояний до точек –2 и 2 меньше 5. Рассмотрим точки справа и слева от отрезка $[-2; 2]$. Для точки, лежащей правее точки 2, сумма расстояний от точек –2 и 2 складывается из длины отрезка $[-2; 2]$ и удвоенного расстояния от этой точки до точки 2. Искомые точки находятся правее точки 2 на расстоянии меньше $(5-4):2 = 0{,}5$. Аналогично искомые точки находятся слева от точки –2 на расстоянии меньше 0,5. Следовательно,

$$|u-2| + |u+2| < 5 \Leftrightarrow -2{,}5 < u < 2{,}5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |u| < 2{,}5.$$

Тогда $\left|t + \dfrac{1}{t}\right| < 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{t^2+1}{|t|} < 2{,}5 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 2|t|^2 - 5|t| + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 < |t| < 2.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 0{,}5 < \log_2(x+1) < 2, \\ -2 < \log_2(x+1) < -0{,}5 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} < x+1 < 4, \\ \dfrac{1}{4} < x+1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}-1 < x < 3, \\ -\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$, $\sqrt{2}-1 < x < 3$.

введение двух новых переменных

Пример 23. (Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ 2011). Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2} \le \frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение. Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x \ne -2$ и $x \ne 3$.

При всех остальных x неравенство равносильно следующему

$$2(x-3)^2(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x+1)^2 \le$$
$$\le (2x^2-x+5)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(x^2-4x+3)^2 + 2(x^2+3x+2)^2 \le$$
$$\le (2x^2-x+5)^2.$$

Заметим, что

$$2x^2 - x + 5 = (x^2-4x+3) + (x^2+3x+2).$$

Пусть $x^2 - 4x + 3 = u$ и $x^2 + 3x + 2 = v$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$2u^2 + 2v^2 \le (u+v)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2u^2 + 2v^2 \le u^2 + 2uv + v^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2-2uv+v^2\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-v)^2\le 0.$$

Отсюда следует, что $u=v$. Выполняя обратную замену, получаем

$$x^2-4x+3=x^2+3x+2, \text{ т.е. } x=\frac{1}{7}.$$

Ответ. $\frac{1}{7}$.

тригонометрическая подстановка

Если область определения данного неравенства совпадает с областью значений тригонометрической функции, то иногда удобно использовать одну из замен:

$$x=a\sin t,\ \ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

или

$$x=a\cos t,\ t\in[0;\pi],$$

для неравенств, содержащих выражения $\sqrt{a^2-x^2}$;

$$x=a\,\mathrm{tg}t,\ \ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$x=a\mathrm{ctg}t,\ t\in(0;\pi),$$

для неравенств, содержащих выражения $\sqrt{a^2+x^2}$;

$$|x|=\frac{a}{\sin t},\ \ t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right],$$

или

$$|x|=\frac{a}{\cos t},\ \ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right),$$

для неравенств, содержащих выражения $\sqrt{x^2-a^2}$.

Пример 24. Решите неравенство

$$\sqrt{1-x^2}\ge 4x^3-3x.$$

Решение. Для решения неравенства $\sqrt{1-x^2}-4x^3+3x\ge 0$ используем метод интервалов.

1. Пусть $f(x)=\sqrt{1-x^2}-4x^3+3x$.

2. $D(f)=[-1;1]$.

3. Найдем нули функции $f(x)$, решив уравнение $\sqrt{1-x^2}-4x^3+3x=0$.

Так как уравнение определено при всех значениях $x\in[-1;1]$, то сделаем замену $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Уравнение примет вид $\cos t-4\sin^3 t+3\sin t=0$ или $\cos t+\sin 3t=0$. Далее имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin 3t=0 \ \Leftrightarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=0,\\ \cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ t=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\end{array}\right.$$

где $n,k\in\mathbf{Z}$.

Поскольку промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат три числа $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$ и $\frac{3\pi}{8}$, то корнями рассматриваемого уравнения являются числа $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, и $\sin\frac{3\pi}{8}$. Так как $-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{8}<\frac{3\pi}{8}$, то в силу возрастания функции $y=\sin t$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ имеем

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)<\sin\frac{3\pi}{8}.$$

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$.

Так как $f(x)$ непрерывна, как сумма непрерывных функций, и $f(0)>0$, то получаем, что $f(x)\ge 0$ при всех значениях

$$x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[-\sin\frac{\pi}{8};\ \sin\frac{3\pi}{8}\right].$$

Ответ: $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[-\sin\frac{\pi}{8};\ \sin\frac{3\pi}{8}\right]$.

Замечание. Если учесть, что $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, то ответ можно записать в следующем виде:

$$\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right].$$

1.3. Разбиение области определения неравенства на подмножества

Разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить некоторые неравенства. Решение неравенства рассматривают отдельно на каждом промежутке.

Пример 25. Решите неравенство

$$2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}.$$

Решение. Данное неравенство определено при всех значениях x. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \ge 0$, тогда неравенство примет следующий вид:

$2^x + 2^x \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$ (в силу возрастания функции $y = 2^t$).

2. Если $x < 0$, то имеем:

$$2^x + \frac{1}{2^x} \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2\sqrt{2}\cdot t + 1 \ge 0, \\ 2^x = t, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge \sqrt{2}+1, \\ t \le \sqrt{2}-1, \end{array}\right. \\ 2^x = t, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \ge \sqrt{2}+1, \\ 2^x \le \sqrt{2}-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \log_2(\sqrt{2}+1), \\ x \le \log_2(\sqrt{2}-1). \end{array}\right.$$

С учетом условия $x < 0$ получаем, что $x \le \log_2(\sqrt{2}-1)$ является решением неравенства на рассматриваемом промежутке, поскольку $\log_2(\sqrt{2}-1) < \log_2 1 = 0$, а $\log_2(\sqrt{2}+1) > \log_2 2 = 1$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\infty; \log_2(\sqrt{2}-1)\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 26. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-4\right) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условием:

$$(x-2)(x+2) > 0.$$

Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x > 2$.

Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+2) - 3\log_2(x+2) + \\ + 3\log_2(x-2) > 2$$

или

$$2\log_2(x-2) - \log_2(x+2) > 1.$$

Отсюда

$$(x-2)^2 > 2(x+2) \text{ или } x(x-6) > 0.$$

С учетом условия $x > 2$ получаем $x > 6$.

2. Пусть $x < -2$. В этом случае неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(2-x) + \log_2(-x-2) - 3\log_2(-x-2) + \\ + 3\log_2(2-x) > 2$$

или

$$2\log_2(2-x) - \log_2(-x-2) > 1.$$

Отсюда

$$(2-x)^2 > 2(-x-2) \text{ или } x^2 - 2x + 8 > 0.$$

Так как уравнение $x^2 - 2x + 8 = 0$ не имеет корней и старший коэффициент положителен, то последнее неравенство выполняется при всех действительных значениях x, т.е. на всем рассматриваемом промежутке.

В этом случае все значения $x < -2$ являются решениями неравенства.

Объединим полученные решения.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

Пример 27. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(x^2-2x-15\right)^{3/2}} 7^{(x+3)^2(x-5)} \le 1.$$

Решение. ОДЗ неизвестной данного неравенства находим из условия $x^2 - 2x - 15 \ge 0$, т.е. $x \le -3$ или $x \ge 5$.

Рассмотрим исходное неравенство на двух промежутках: 1) $x \le -3$ и 2) $x \ge 5$.

1. При $x \le -3$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}\le 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{-x-3}}\le 1.$$

Поскольку при $x\le -3$ верно каждое из неравенств: $-x-3\ge 0$, $\sqrt{x^2-2x-15}\ge 0$, $7^{x^2-2x-15}\ge 1$, $2^{x^2-2x-15}\ge 1$, то в этом случае левая часть неравенства меньше либо равна 1 для любого значения x из этого промежутка.

2. Пусть $x\ge 5$. Заметим, что неравенство $x+3>\sqrt{x^2-2x-15}$ справедливо на всем этом промежутке. Это следует из его решения

$$x+3>\sqrt{x^2-2x-15}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2+6x+9>x^2-2x-15\;\Leftrightarrow\; x>-3.$$

В силу возрастания функции $y=\left(\frac{a}{b}\right)^t$, где $a>b>0$, $t>0$, из неравенства $\left(\frac{a}{b}\right)^t\ge 1$ следует $a^t\ge b^t$. Поэтому имеем

$7^{x^2-2x-15}\ge 2^{x^2-2x-15}\ge 1$, причем равенство достигается при $x=5$ на рассматриваемом промежутке, при всех $x>5$ справедливо строгое неравенство.

Отсюда получаем

$$\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}\ge\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}\ge$$

$$\ge\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}.$$

Тогда $\frac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}>1$ при $x>5$

и $\frac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}=1$ при $x=5$.

Значит исходное неравенство на рассматриваемом промежутке выполняется только при $x=5$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ. $x\le -3$ и $x=5$.

2. Функционально-графические методы решения

Область применения свойств функции при решении неравенств очень широка. Наличие свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих в неравенства позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам – неравенствам.

Начнем с примера, связанного с композицией функций.

Пример 28. (МИЭТ, 2002). Пусть $f(x)=\frac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Решите неравенство $f\big(g(x-9)\big)\ge f(4)$.

Решение. Так как, $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f\big(g(x-9)\big)=f(\sqrt{x-9})=$$
$$=\frac{(\sqrt{x-9})^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-(\sqrt{x-9})^2}.$$

Так как $f(4)=\frac{4^2-14\cdot 4+33}{9-4^2}=1$, то неравенство $f\big(g(x-9)\big)\ge f(4)$ примет вид

$$\frac{(\sqrt{x-9})^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-(\sqrt{x-9})^2}\ge 1.$$

Сделав замену $t=\sqrt{x-9}$, где $t\ge 0$, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{t^2-14t+33}{9-t^2}\ge 1,\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-7t+12}{9-t^2}\ge 0,\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-3)(t-4)}{(t-3)(t+3)}\le 0,\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t-4}{t+3}\le 0,\\ t\ge 0,\\ t\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<3,\\ 3<t\le 4.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x-9}<3,\\ 3<\sqrt{x-9}\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x-9<9,\\ 9<x-9\le 16\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9\le x<18,\\ 18<x\le 25.\end{array}\right.$$

Ответ: $9\le x<18$, $18<x\le 25$.

2.1. Использование области определения функции

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной неравенства иногда позволяет получить решения без преобразований неравенства.

Пример 29. (МИЭТ, 1998). Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2+3x-2} > x^3-9.$$

Решение. Область определения неравенства задается условием:

$$-x^2+3x-2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le x \le 2.$$

Для этих значений x получаем:

$$1 \le x \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le x^3 \le 8 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -8 \le x^3-9 \le -1,$$

т.е. правая часть исходного неравенства отрицательна на его области определения. Следовательно, неравенство справедливо при всех $1 \le x \le 2$.

Ответ: $1 \le x \le 2$.

Пример 30. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\cdot \log_5 \frac{x}{5} +$$
$$+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right) > 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x^2-6x+5 \ge 0, \\ 12x-2x^2-10 \ge 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Подставляя полученные значения в данное неравенство, получим:

при $x=1$ что исходное неравенство примет вид

$\log_5 \frac{1}{5}+1>0$ или $0>0$, т.е. будет неверно;

при $x=5$ имеем верное неравенство $\frac{1}{5}>0$.

Ответ: 5.

2.2. Использование непрерывности функции

Сформулируем свойство непрерывных функций: *если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.*

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов. Обобщения метода интервалов связаны с расширением класса функций, входящих в неравенство.

В основе *метода интервалов* лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.
4. Пусть на промежутке $(a;b)$ задана возрастающая (убывающая) функция $f(x)$, причем x_0 – корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий промежутку $(a;b)$. Тогда функция $f(x)$ справа от корня положительна (отрицательна), слева отрицательна (положительна), т.е. при переходе через корень меняет знак.

метод интервалов

Сформулируем *свойство чередования знака линейного двучлена* $ax+b$ $(a \ne 0)$: при переходе через значение $x_0=-\frac{b}{a}$ знак выражения $ax+b$ меняется на противоположный. Знание свойства чередования знака линейного двучлена $ax+b$ позволяет в дальнейшем не приводить линейные двучлены к каноническому виду $x-x_0$.

Свойство двучлена $ax+b$ лежит в основе *метода интервалов* и часто используется при решении алгебраических неравенств более высоких степеней.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x), \qquad (*)$$

где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем выражения $a_i x + b_i$ и $a_j x + b_j$ попарно различны ($a_i \neq 0$ и $a_j \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Выражению **(*)** соответствует разбиение числовой прямой на интервалы точками $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Метод интервалов опирается на следующее свойство чередования знака функции (*): *при переходе через точку* $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ *из одного интервала в смежный знак значения функции* (*) *меняется на противоположный.*

Действительно, при переходе через точку $x = -\dfrac{b_i}{a_i}$ в выражении (*) меняет знак только один множитель $a_i x + b_i$.

Пример 31. Решите неравенство

$$(2x^2 - 5x + 3)(\sqrt[3]{3} - x) < 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде

$$(2x - 3)(x - 1)(\sqrt[3]{3} - x) < 0,$$

и далее используем метод интервалов.

1. Обозначим

$$f(x) = (2x - 3)(x - 1)(\sqrt[3]{3} - x).$$

2. $D(f) = \mathbf{R}$.

3. $f(x) = 0$; $(2x - 3)(x - 1)(\sqrt[3]{3} - x) = 0$.

Отсюда получаем корни уравнения: 1; 1,5; $\sqrt[3]{3}$. Так как $1 < 3 < 1{,}5^3 = 3{,}375$, то $1 < \sqrt[3]{3} < 1{,}5$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $f(0) > 0$, то расставляем знаки в соответствии с правилом знакочередования, как показано на рис. 13.

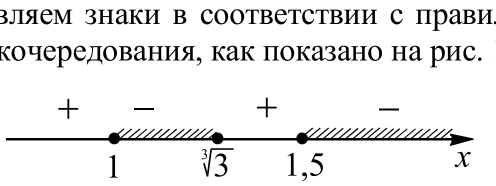

Рис. 13

Получаем все значения

$$x \in (1; \sqrt[3]{3}) \cup (1{,}5; +\infty),$$

при которых $f(x) < 0$.

***Ответ*:** $(1; \sqrt[3]{3}) \cup (1{,}5; +\infty)$.

Неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ $\left(\text{или } \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0\right)$ равносильно неравенству $f(x)g(x) > 0$ (соответственно $f(x)g(x) < 0$). Нестрогое неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ $\left(\text{или } \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0\right)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ $\left(\text{соответсвенно } \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}\right)$.

На практике неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ решают, не приводя его к виду $f(x)g(x) \vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

Рассмотрим неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции вида (*).

Пример 32. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3.$$

Решение. Приведем неравенство к виду

$$\frac{(2x - 3)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} > 0$$

и используем метод интервалов.

1. Пусть $f(x) = \dfrac{(2x - 3)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)}$.

2. $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. Нули функции $f(x)$ найдем из уравнения $(2x - 3)(x - 2) = 0$. Корни последнего уравнения 1,5 и 2 принадлежат $D(f)$.

4. На каждом из промежутков $(-\infty; 1)$, $(1; 1{,}5)$, $(1{,}5; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак. Так как $f(0) > 0$, то на промежутке $(-\infty; 1)$ функция $f(x) > 0$. На остальных

промежутках расставляем знаки по правилу знакочередования (см. рис. 14).

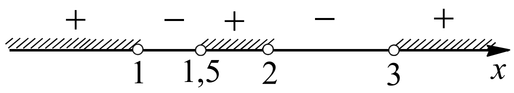

Рис. 14

Следовательно, $f(x) > 0$ при всех значениях $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

первое обобщение метода интервалов

Пусть дана функция вида

$$f(x) = f_1^{k_1}(x) \cdot f_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x), \quad (**)$$

где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем выражения $a_i x + b_i$ и $a_j x + b_j$ попарно различны ($a_i \neq 0$ и $a_j \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$)., $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – фиксированные натуральные числа.

Для решения неравенства $f(x) \vee 0$, где выражение $f(x)$ имеет вид (**), используется *обобщенный метод интервалов,* который опирается на следующее правило чередования знаков выражения: *при переходе через точку* $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ *из одного интервала в смежный знак значения функции* (**) *меняется на противоположный, если* k_i *– нечетное число, и не меняется, если* k_i *– четное число.*

Пример 33. Решите неравенство

$$(x-3)^2 (x - \sqrt{7}) \left(x - 2\frac{16}{25} \right) \le 0.$$

Решение. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x-3)^2 (x - \sqrt{7}) \left(x - 2\frac{16}{25} \right).$$

2. $D(f) = \mathbf{R}$.

3. Найдем нули функции $f(x)$ из уравнения $(x-3)^2 (x - \sqrt{7}) \left(x - 2\frac{16}{25} \right) = 0$. Отсюда $x = 3$ или $x = \sqrt{7}$, или $x = 2{,}64$.

Сравним полученные числа. Так как $7 < 9$, то $\sqrt{7} < \sqrt{9}$ и $\sqrt{7} < 3$.

Аналогично из неравенства $7 > 2{,}64^2 = 6{,}9696$ получаем $\sqrt{7} > \sqrt{2{,}64^2}$ и $\sqrt{7} > 2{,}64$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x) \le 0$. Так как $f(0) > 0$, то далее расставляем знаки левой части исходного неравенства, учитывая кратность корней, как показано на рис. 15.

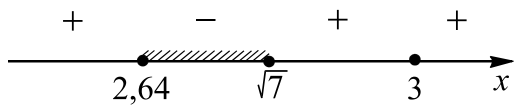

Рис. 15

Отсюда $f(x) \le 0$ при всех значениях $x \in [2{,}64; \sqrt{7}] \cup \{3\}$.

Ответ: $[2{,}64; \sqrt{7}] \cup \{3\}$.

второе обобщение метода интервалов

Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств.

Метод интервалов допускает обобщение на выражения вида

$$f_1^{k_1}(x) \cdot f_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x),$$

где $f_i(x)$ – функции, непрерывные на своей области определения ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – фиксированные натуральные числа).

Пример 34. Решите неравенство

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}} - 4\right)}{(3^x - 8)(x^4 + 4x + 20)} \ge 0.$$

Решение. Так как при $x = -1$ многочлен $x^4 + 4x + 20$ принимает наименьшее значение 17 (докажите с помощью производной), то неравенство $x^4 + 4x + 20 > 0$ выполняется при всех значениях x. Тогда данное неравенство принимает вид

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}} - 4\right)}{3^x - 8} \ge 0.$$

Используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}.$$

2. Функция $f(x)$ не существует при $x=0$ и $x=\log_3 8$.

3. Функция $f(x)$ обращается в нуль при $x=2{,}5$ или $x=\log_3 8$. Отметим, что в точке $x=2{,}5$ равны нулю два множителя $2x-5$ и $32^{\frac{1}{x}}-4$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $0<\log_3 8<\log_3 9=2<2{,}5$ и $f(5)<0$, то $f(x)\geq 0$ при всех значениях $x\in(0;\ \log_3 8)\cup\{2{,}5\}$ (см. рис. 16).

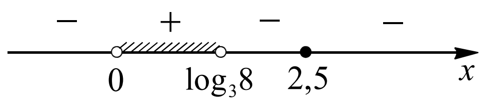

Рис. 16

Ответ: $0<x<\log_3 8; x=2{,}5$.

Пример 35. Решите неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\geq 0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{3^x}=t$, где $t\geq 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид

$$\left(\frac{t}{3}-1\right)\sqrt{t^2-10t+9}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (t-3)\sqrt{t^2-10t+9}\geq 0. \qquad (*)$$

Используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(t)=(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}.$$

2. Найдем область определения функции $f(t)$. Для этого решим неравенство $t^2-10t+9\geq 0$; $(t-1)(t-9)\geq 0$; $t\leq 1$ или $t\geq 9$. Отсюда $D(f)=(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$.

3. Находим нули функции $f(t)$.

$$(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{t^2-10t+9}=0,\\ t-3=0.\end{array}\right.$$

Из совокупности получаем числа 1, 3, 9, нулями функции из которых являются $t=1$ или $t=9$, так как $3\notin D(f)$.

4. Находим промежутки знакопостоянства функции $f(t)$. Так как $f(0)<0$, $f(10)>0$, то получаем, что $f(t)\geq 0$ при всех значениях $t\in\{1\}\cup[9;+\infty)$ (см. рис. 17).

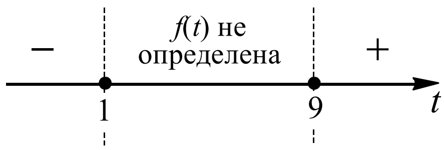

Рис. 17

Полученные решения удовлетворяют условию $t\geq 0$. Вернемся к переменной *x*.

Так как $\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t\geq 9,\end{array}\right.$ то имеем

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3^x}=1,\\ \sqrt{3^x}\geq 9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1,\\ 3^x\geq 81\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x\geq 4.\end{array}\right.$$

Замечание. Удобнее в алгоритм решения неравенства (∗) методом интервалов не вносить дополнительное условие $t\geq 0$, а учитывать его перед возвращением к первоначальной переменной.

Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

рационализация неравенств

При решении неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. С другой стороны, для рациональных функций такие вычисления несколько проще.

Чтобы расширить возможности применения метода интервалов при решении неравенств, используем идею *рационализации неравенств* (см. [2]), известную в математической литературе под другими названиями (*метод декомпозиции* – Моденов В.П., *метод замены множителей* – Голубев В.И.).

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G (см. табл. 1), где f, g, h, p, q – выражения с переменной x ($h>0;\ h\neq 1;\ f>0;\ g>0$), a – фиксированное число ($a>0;\ a\neq 1$).

Табл. 1

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f-\log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1*а*	$\log_a f-1$	$(a-1)(f-a)$
1*б*	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f-\log_h g$	$(h-1)(f-g)$
2*а*	$\log_h f-1$	$(h-1)(f-h)$
2*б*	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$ $(g\neq 1,\ f\neq 1)$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4	h^f-h^g $(h>0)$	$(h-1)(f-g)$
4*а*	h^f-1	$(h-1)f$
5	f^h-g^h $(f>0;\ g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

<u>Некоторые следствия</u> (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f\cdot\log_p g\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1)\vee 0.$$
- $\log_h f+\log_h g\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (fg-1)(h-1)\vee 0.$$
- $\sqrt{f}-\sqrt{g}\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad f-g\vee 0.$
- $\dfrac{h^f-h^g}{h^p-h^q}\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{f-g}{p-q}\vee 0.$
- $f^h-g^p\vee 0 \quad\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (a-1)\left(\log_a f^h-\log_a g^p\right)\vee 0.$$

В указанных равносильных переходах символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

Доказательство. **1.** Пусть

$$\log_a f-\log_a g>0,\ \text{т.е.}\ \log_a f>\log_a g,$$

причем
$$a>0;\ a\neq 1;\ f>0;\ g>0. \qquad (*)$$

Если $0<a<1$, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем $f<g$. Значит, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a-1<0,\\ f-g<0,\end{cases}$$

откуда следует неравенство $(a-1)(f-g)>0$, верное на области определения выражения $F=\log_a f-\log_a g$.

Если $a>1$, то $f>g$. Следовательно, имеет место неравенство
$$(a-1)(f-g)>0.$$

Обратно, если выполняется неравенство $(a-1)(f-g)>0$ на области $(*)$, то оно на этой области равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a-1<0,\\ f-g<0\end{cases} \text{ и } \begin{cases} a-1>0,\\ f-g>0.\end{cases}$$

Из каждой системы следует неравенство

$$\log_a f>\log_a g,\ \text{т.е.}\ \log_a f-\log_a g>0.$$

Аналогично, рассматриваются неравенства вида $F<0,\ F\geq 0,\ F\leq 0.$

2. Пусть некоторое число $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда имеем

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} =$$
$$= \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}.$$

Знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)} \text{ или } (h-1)(f-g).$$

3. Так как

$$\log_f h - \log_g h = \frac{\log_g h}{\log_g f} - \log_g h =$$
$$= (\log_g h)\log_f g - \log_g h = \log_g h(\log_f g - 1),$$

то, используя замены 2*а* и 2*б*, получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$(g-1)(h-1)(f-1)(g-f) \text{ или}$$
$$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f).$$

4. Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число $a > 1$, тогда

$$\log_a h^f > \log_a h^g \text{ или } (f-g)\log_a h > 0.$$

Отсюда с учетом замены 1б и условия $a > 1$ получаем

$$(f-g)(a-1)(h-1) > 0,\ (h-1)(f-g) > 0.$$

Аналогично, доказываются неравенства $F < 0$, $F \leq 0$, $F \geq 0$.

5. Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

6. Доказательство замены 6 следует из равносильности неравенств

$$|p| > |q| \text{ и } p^2 > q^2 \quad (|p| < |q| \text{ и } p^2 < q^2).$$

Пример 36. Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -1{,}5, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем решения

$$(-1{,}5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3).$$

Ответ: $(-1{,}5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Пример 37. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4 + 7x - 2x^2\right) \leq 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{|x+2|}\left(4 + 7x - 2x^2\right) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-(x+2)^2) \leq 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0, \\ x+2 \neq 0, \\ |x+2| \neq 1. \end{cases}$$

Знак множителя $(|x+2|-1)$ совпадает со знаком $((x+2)^2-1)$ по замене 6.

Получим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \leq 0, \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0, \\ x \neq -3,\ x \neq -2,\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0, \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0, \\ x \neq -3,\ x \neq -2,\ x \neq -1. \end{cases}$$

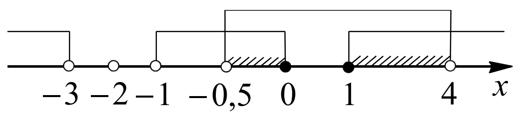

Рис. 18

Окончательно получаем (см. рис. 18), что решением являются все x такие, что $-0{,}5 < x \leq 0$, $1 \leq x < 4$.

Ответ: $(-0{,}5;\ 0] \cup [1;\ 4)$.

Пример 38. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0.$$

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{3}-1\right)\left(\log_x \sqrt{3-x}-1\right) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ 3-x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)(\sqrt{3-x}-x) \geq 0, \\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) > 0, \\ x < 3, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3-x-x^2) \leq 0, \\ (x-1)(3-x-1) > 0, \\ x < 3, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \geq 0, \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x < 2.$$

Замечание. При решении неравенства $(x-1)(x-2) < 0$ системы учтены условия $x < 3,\ x > 0,\ x \neq 1$. Условие $1 < x < 2$ позволяет исключить множитель $x-1 > 0$ в первом неравенстве системы.

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ 2\right)$.

Пример 39. Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \geq 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)\times \\ \qquad \times(-10x^2+36x-32) \geq 0, \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 2x^2-5x+3 > 0, \\ 12x^2-41x+34 \neq 0, \\ 2x^2-5x+2 \neq 0, \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^4\left(x-\dfrac{8}{5}\right)\left(x-\dfrac{17}{12}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \geq 0, \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right) > 0, \\ \left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2) \neq 0, \\ (x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \neq 0, \\ x < 3. \end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.

Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\dfrac{8}{5}; \dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Пример 40. Решите неравенство

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9} x} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9} x}.$$

Решение. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 10, \\ (x-10)^2 \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 10, \\ x \neq 11, \\ x \neq 9. \end{cases}$$

Учитывая, что при $x>1$ выражение $\log_{1,9} x$ положительно, преобразуем данное неравенство на его области определения

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2} \geq 0 .$$

Далее используем метод рационализации

$$\frac{\log_3 81-\log_3(x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)} \geq 0 ;$$

$$\frac{4-\log_3^2(x-1)}{(x-9)(x-11)} \geq 0 ;$$

$$\frac{\left(\log_3 9-\log_3(x-1)\right)\left(\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \geq 0 ;$$

$$\frac{(9-x+1)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \geq 0 ;$$

$$\frac{(x-10)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)} \leq 0 .$$

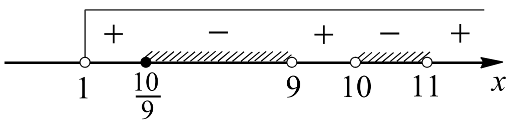

Рис. 19

Ответ: $\left[\frac{10}{9};9\right)\cup(10;11)$.

Пример 41. Решите неравенство

$$3\log_{(3,5+x)^2}\left(x^2+14x+45\right) \leq$$

$$\leq 4\log_{-3,5-x}\left(x^2+14x+45\right).$$

Решение. Учитывая, что $-3,5-x>0$, получаем

$$\frac{3}{2}\log_{-3,5-x}\left(x^2+14x+45\right) \leq$$

$$\leq 4\log_{-3,5-x}\left(x^2+14x+45\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\log_{-3,5-x}\left(x^2+14x+45\right) \geq 0 .$$

Далее имеем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3,5-x-1)(x^2+14x+45-1) \geq 0, \\ x^2+14x+45>0, \\ -3,5-x>0, \\ -3,5-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4,5)\left(x-(-7-\sqrt{5})\right)\left(x-(-7+\sqrt{5})\right) \leq 0, \\ (x+9)(x+5)>0, \\ x<-3,5, \\ x \neq -4,5. \end{cases}$$

Для выяснения взаимного расположения точек на числовой прямой, сравним числа: $-7-\sqrt{5} \vee -9$, $-7+\sqrt{5} \vee -5$ и $-7+\sqrt{5} \vee -4,5$.

Получаем $-7-\sqrt{5}<-9$, так как $2<\sqrt{5}$, $\sqrt{4}<\sqrt{5}$ (верно);

$-7+\sqrt{5}>-5$, так как $\sqrt{5}>2$ (верно)

$-7+\sqrt{5}<-4,5$, так как $\sqrt{5}<2,5$, $\sqrt{5}<\sqrt{6,25}$ (верно).

На рис. 20*а* на числовой оси показано решение первого неравенства системы.

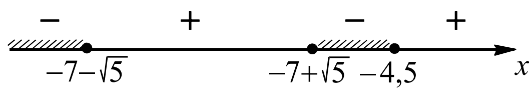

Рис. 20*а*

На рис. 20*б* на числовой оси показано решение всей системы.

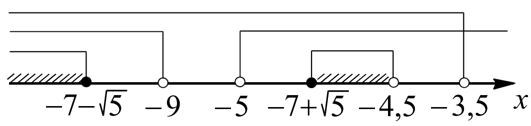

Рис. 20*б*

Ответ: $(-\infty;-7-\sqrt{5}]\cup[-7+\sqrt{5};-4,5)$.

метод интервалов на координатной окружности

Данный метод удобно применять к тригонометрическим неравенствам, приводимым к виду

$$(f_1(x)-a_1)(f_2(x)-a_2)\cdot\ldots\cdot(f_n(x)-a_n)\vee 0,$$

в частности,

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\vee 0,$$

где каждая $f_i(x)$ – одна из простейших тригонометрических функций, a_i – действительные числа, $i=1, 2, \ldots, n$.

В случае, когда наименьший общий период T тригонометрических функций, входящих в данное неравенство, не превосходит 2π, решение неравенства можно рассмотреть на числовой окружности на промежутке, равном по длине периоду. Далее при записи ответа следует учесть, что решением данного неравенства будут являться все числа, отличающиеся от полученных на nT, где $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 42. Решить неравенство

$$\frac{\sin x\cdot\sin 3x}{\cos x\cdot\sin 2x}\ge 0.$$

Решение. Для решения неравенства используем метод интервалов.

1. Пусть

$$f(x)=\frac{\sin x\cdot\sin 3x}{\cos x\cdot\sin 2x}.$$

2. Найдем нули знаменателя

$$\cos x\cdot\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi n}{2},\end{array}\right.\quad k,n\in\mathbf{Z}.$$

3. Найдем нули числителя

$$\sin x\cdot\sin 3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi l\\ x=\dfrac{\pi m}{3},\end{array}\right.\quad l,m\in\mathbf{Z}$$

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как нули тригонометрических функций ($\sin x, \sin 3x$, $\cos x$, $\sin 2x$), входящих в данное неравенство, повторяются с периодами $\left(\text{соответсвенно } \pi, \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$, кратными 2π, то изобразим множество решений на числовой окружности, выделив промежуток $[0;2\pi)$.

На промежутке $[0;2\pi)$ функция $f(x)$ не определена в точках 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ и обращается в нуль в точках $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$. При этом $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$ – точки четной кратности, остальные – нечетной кратности.

Так как $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>0$, то расставляем знаки в соответствии с правилом знакочередования, как показано на рис. 21.

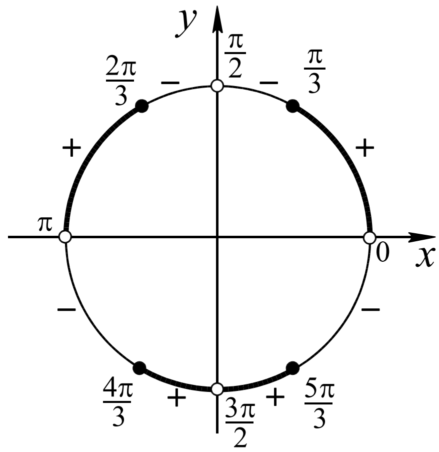

Рис. 21

Исходному неравенству удовлетворяют те значения x, для которых $f(x)\ge 0$.

***Ответ*:** $2\pi k<x\le\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$;

$\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\le x<\pi+2\pi k$;

$\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k\le x<\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k$;

$\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k<x\le\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k$; $k\in\mathbf{Z}$.

2.3. Использование ограниченности функций

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций (например, $-1 \le \sin x \le 1$, $\sqrt{x} \ge 0$ и т.д.).

метод оценки

Иногда неравенство $f(x) \vee g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной имеют место неравенства $f(x) \ge A$ и $g(x) \le A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x) \le g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x) = A$ и $g(x) = A$;

б) решение неравенства $f(x) \ge g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x) \ge A$, для которых определена функция $g(x)$.

Пример 43. Решите неравенство

$$\log_5 x \le \sqrt{1-x^4}.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < x \le 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x \le 0$, а $\sqrt{1-x^4} \ge 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток $(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

Пример 44. Решите неравенство

$$\sqrt{16-(5x+2)^2} \ge 4 + \cos^2 \frac{15\pi x}{4}.$$

Решение. Оценим правую часть. Так как $0 \le \cos^2 \frac{15\pi x}{4} \le 1$, то $4 \le 4 + \cos^2 \frac{15\pi x}{4} \le 5$.

Для левой части последовательно имеем $(5x+2)^2 \ge 0$, $-(5x+2)^2 \le 0$, $16-(5x+2)^2 \le 16$, $\sqrt{16-(5x+2)^2} \le 4$ при всех допустимых значениях x.

Исходное неравенство возможно только в том случае, если обе части неравенства равны 4, то есть данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{16-(5x+2)^2} = 4, \\ 4 + \cos^2 \dfrac{15\pi x}{4} = 4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет один корень $x = -\frac{2}{5}$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: –0,4.

неотрицательность функции

Пусть левая часть неравенства $f(x) \vee 0$ есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x) \le 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

а неравенство $f(x) \ge 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Пример 45. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3 + 8x^2 - 7x - 26} + \sqrt{x^2 + 3x - 10} \le 0.$$

Решение. Так как левая часть неравенства неотрицательна, то данное неравенство выполняется только при одновременном равенстве нулю слагаемых

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 + 8x^2 - 7x - 26} = 0, \\ \sqrt{x^2 + 3x - 10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8x^2 - 7x - 26 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Ответ: 2.

применение свойств модуля

Пример 46. Решите неравенство

$$|x^2-3x+2| \le x^2-3x+2.$$

Решение. Из условия $|a| \le a$ и из свойств модуля $|a| \ge a$ имеем $|a| = a$. Отсюда по определению модуля получаем $a \ge 0$, где $a = x^2-3x+2$. Неравенство $x^2-3x+2 \ge 0$ имеет решения $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Пример 47. (МИОО, 2010). Решите неравенство

$$|x^3-2x^2-3x|+|x^2+4x-5| \le$$
$$\le |x^3-x^2+x-5|.$$

Решение. Неравенство имеет вид $|a|+|b| \le |a+b|$, где $a = x^3-2x^2-3x$ и $b = x^2+4x-5$.

С другой стороны известно неравенство треугольника $|a|+|b| \ge |a+b|$. Отсюда получаем равенство $|a|+|b| = |a+b|$, которое справедливо при условии $ab \ge 0$.

Из неравенства

$$(x^3-2x^2-3x)(x^2+4x-5) \ge 0$$

или

$$x(x+1)(x-3)(x-1)(x+5) \ge 0$$

получаем решения $[-5;-1]\cup[0;1]\cup[3;+\infty)$.

Ответ: $[-5;-1]\cup[0;1]\cup[3;+\infty)$.

Напомним некоторые дополнительные свойства модулей.

● Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму.

$$|f|+|g| = f+g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \ge 0, \\ g \ge 0. \end{cases}$$

$$|f|+|g| = f-g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \ge 0, \\ g \le 0. \end{cases}$$

$$|f|+|g| = -f+g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \le 0, \\ g \ge 0. \end{cases}$$

$$|f|+|g| = -f-g \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0. \end{cases}$$

● Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак.

$$|f|+|g| = |f+g| \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \ge 0, \\ g \ge 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; fg \ge 0;$$

$$|f|+|g| = |f-g| \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \ge 0, \\ g \le 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f \le 0, \\ g \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; fg \le 0.$$

Одна из схем решения уравнения для трех слагаемых:

$$|f|+|g|+|h| = |f+g-h| \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \ge 0, \\ g \ge 0, \\ h \le 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0, \\ h \ge 0. \end{cases}$$

ограниченность синуса и косинуса

Пример 48. (МИЭТ, 1998). Решите неравенство

$$(x^2+2x+2)\cdot\cos(x+1) \ge 2x^2+4x+3.$$

Решение. Поскольку $x^2+2x+2>0$ при любом x, то, разделив обе части неравенства на x^2+2x+2, придем к равносильному неравенству

$$\cos(x+1) \ge \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \cos(x+1) \ge 1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

Так как $\cos(x+1) \le 1$, а правая часть неравенства $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} \ge 1$ при всех значениях x и $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} = 1$ при $x=-1$, то равенство возможно только при $x=-1$.

Проверкой убеждаемся, что и левая часть неравенства при $x=-1$ также равна 1.

Ответ: -1.

Пример 49. Решите неравенство

$$\cos 4x \cdot \sin x \geq 1.$$

Решение. Так как $|\cos 4x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$, то $|\cos 4x| \cdot |\sin x| \leq 1$ и исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \sin x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x = 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = \pi + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right. n, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 50. Решите неравенство

$$\cos x + \cos 3x \geq 2.$$

Решение. Из неравенств $|\cos x| \leq 1$ и $|\cos 3x| \leq 1$ следует, что неравенство возможно только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны по 1.

$$\cos x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = \dfrac{2\pi k}{3}, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}.$$

Вторая серия решений включает первую серию, поэтому окончательно имеем $x = 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

применение классических неравенств

Рассмотрим классическое неравенство Коши, известное школьнику как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел, которое эффективно может быть использовано при решении неравенств.

Неравенство Коши: *для любых неотрицательных чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

причем равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Пример 51. Решите неравенство

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} \leq 2011.$$

Решение. Запишем левую часть данного неравенства следующим образом

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} = x^{1005} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{2010 слагаемых}}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$x^{1005} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq$$

$$\geq 2011 \cdot \sqrt[2011]{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= 2011 \cdot \sqrt[2011]{1} = 2011.$$

Причем равенство имеет место при равенстве слагаемых, т.е. при

$$x^{1005} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Следовательно, исходное неравенство выполняется только при $x=1$. При всех остальных допустимых значениях x левая часть исходного неравенства больше 2011.

Ответ: 1.

2.4. Использование монотонности функций

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях неравенства, имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

***монотонность функции на множестве* R**

Если функция $f(t)$ строго возрастает на **R**, то $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на **R**, то $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Отметим следствия из этих утверждений, которые часто используют при решении неравенств.

Следствие 1. Так как функция $y = t^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, строго возрастает на **R**, то неравенство $(h(x))^{2n+1} > (g(x))^{2n+1}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 2. Так как функция $y = \sqrt[2n+1]{t}$, $n \in \mathbf{N}$, строго возрастает на **R**, то неравенство $\sqrt[2n+1]{h(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 3. Так как функция $y = a^t$ $(a > 1)$ строго возрастает на **R**, то неравенство $a^{h(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 4. Так как функция $y = a^t$ $(0 < a < 1)$ строго убывает на **R**, то неравенство $a^{h(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Следствие 5. Так как функция $y = \operatorname{arctg} t$ строго возрастает на **R**, то неравенство $\operatorname{arctg}(h(x)) > \operatorname{arctg}(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 6. Так как функция $y = \operatorname{arcctg} t$ строго убывает на **R**, то неравенство $\operatorname{arcctg}(h(x)) > \operatorname{arcctg}(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Пример 52. *Решите неравенство*

$$(2x^2+1)^5 - (3x)^5 > 3x - 2x^2 - 1.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$(2x^2+1)^5 + 2x^2 + 1 > (3x)^5 + 3x. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$, определенную при всех действительных значениях t.

Тогда неравенство (*) примет вид

$$f(2x^2+1) > f(3x).$$

Так как $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ для любого $t \in \mathbf{R}$, то функция $f(t)$ строго возрастает на **R**. Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1) > f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 > t_2$.

Следовательно, неравенство (*) равносильно неравенству $2x^2 + 1 > 3x$, решением которого являются $x < 0{,}5$ или $x > 1$.

***Ответ*:** $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

Пример 53. (МИЭТ, 2005). Решите неравенство

$$(1 - |x|) \cdot \sqrt{1+3x^2} \le x \cdot \sqrt{4 + 3x^2 - 6x}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t) = (1-t)\sqrt{1+3t^2},$$

определенную на всей числовой прямой.

Поскольку $4 + 3x^2 - 6x = 1 + 3(1-x)^2$, $x = 1 - (1-x)$, то данное неравенство примет вид

$$f(|x|) \le f(1-x).$$

Выясним характер монотонности функции $f(t)$. Для этого найдем ее производную:

$$f'(t) = -1 \cdot \sqrt{1+3t^2} + (1-t) \cdot \frac{6t}{2\sqrt{1+3t^2}} =$$

$$= -\sqrt{1+3t^2} - \frac{3t(t-1)}{\sqrt{1+3t^2}} = \frac{-6t^2 + 3t - 1}{\sqrt{1+3t^2}}.$$

Заметим, что многочлен $-6t^2 + 3t - 1$ не имеет корней и его старший коэффициент меньше нуля. Значит $-6t^2 + 3t - 1 < 0$ при всех t и соответственно $f'(t) < 0$ на **R**.

Это означает, что функции $f(t)$ – убывающая. Для убывающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1) \le f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 \ge t_2$. Следовательно,

$$f(|x|) \le f(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad |x| \ge 1-x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1-x, \\ x \le x-1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \ge \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \ge \frac{1}{2}$.

монотонность функции на промежутке

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на своей области определения – промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ строго убывает на своей области определения – промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Следствие 1. Неравенство вида $\log_a(h(x)) > \log_a(g(x))$, где $a > 1$, равносильно неравенствам $h(x) > g(x) > 0$.

Следствие 2. Неравенство вида $\log_a(h(x)) > \log_a(g(x))$, где $0 < a < 1$, равносильно неравенствам $0 < h(x) < g(x)$.

Следствие 3. Неравенство вида $\arcsin(h(x)) > \arcsin(g(x))$ равносильно неравенствам $1 \ge h(x) > g(x) \ge -1$.

Следствие 4. Неравенство вида $\arccos(h(x)) > \arccos(g(x))$ равносильно неравенствам $-1 \le h(x) < g(x) \le 1$.

Пример 54. Решите неравенство

$$\log_3\left(x^3 + x^2 - 4x + 2\right) \ge \log_3\left(x^3 - 1\right).$$

Решение. Так как функция $y = \log_3 t$ строго возрастает на множестве $t > 0$, то данное неравенство можно заменить равносильной системой

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 4x + 2 \ge x^3 - 1, \\ x^3 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0, \\ x^3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 3, \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Ответ: $[3; +\infty)$.

Пример 55. Решите неравенство

$$\arcsin(3x^2 - 2x) \le \arcsin(3x + 2).$$

Решение. Функция $y = \arcsin t$ определена при $-1 \le t \le 1$ и возрастает на всей области определения. Используя свойства этой функции, перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x \le 3x + 2, \\ -1 \le 3x^2 - 2x, \\ 3x + 2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 \le 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 \ge 0, \\ x \le -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \le x \le 2, \\ x \le -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 56. Решите неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2}(\cos x) \le \log_{x+19}(\cos x).$$

Решение. Из условий

$$\begin{cases} 84 - 2x - 2x^2 > 0, \\ 84 - 2x - 2x^2 \ne 1, \\ x + 19 > 0, \\ x + 19 \ne 1, \\ 0 < \cos x \le 1 \end{cases}$$

получаем

$$x \in \left(-7; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 6\right), \qquad (*)$$
$$x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{167}}{2}.$$

Так как по условию $0 < \cos x \le 1$, то рассмотрим два случая.

1. Пусть $\cos x = 1$, тогда из множества чисел $2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, с учетом $(*)$ решениями данного в условии неравенства являются два числа -2π и 0.

2. Для случая $0 < \cos x < 1$ исследуем функцию $y = \log_t a$, где $t > 0, t \neq 1$ и число $0 < a < 1$. Так как

$$y' = (\log_t a)' = \left(\frac{\ln a}{\ln t}\right)' = -\frac{\ln a}{t \ln^2 t} > 0,$$

то функция $y = \log_t a$ возрастает на каждом из промежутков $(0;1)$ и $(1;+\infty)$.

а) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(0;1)$, получаем

$$\begin{cases} 0 < 84 - 2x - 2x^2 < 1 \\ 0 < x + 19 < 1 \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < 6 \\ 84 - 2x - 2x^2 < 1 \\ -19 < x < 18 \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases} \quad \text{Нет решений.}$$

б) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(1;+\infty)$, получаем

$$\begin{cases} 84 - 2x - 2x^2 > 1, \\ x + 19 > 1, \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 83 < 0, \\ x > -18, \\ 2x^2 + 3x - 65 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}, \\ x > -18, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -6{,}5, \\ x \ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x \le -\dfrac{13}{2}, \\ 5 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}. \end{array}\right.$$

Полученные решения удовлетворяют условию $(*)$.

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2}; -\dfrac{13}{2}\right] \cup \{-2\pi; 0\} \cup \left[5; \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right).$

Пример 57. (МИЭТ, 2005). Решите неравенство

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \ge 3 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 4x + 20}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}.$$

$D(f) = [-7; 11]$. Найдем экстремумы функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = \frac{\sqrt{11-x} - \sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}\sqrt{11-x}},$$

$D(f') = (-7; 11)$. Найдем нули производной из уравнения $f'(x) = 0$. Из уравнения $11 - x = x + 7$ получаем $x = 2$.

$$f'(x) > 0 \text{ при } -7 < x < 2;$$
$$f'(x) < 0 \text{ при } 2 < x < 11.$$

Следовательно, $x = 2$ – точка максимума функции $f(x)$ и $f(2) = 6$. Значит $\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \le 6$ при всех допустимых значениях x.

Оценим правую часть исходного неравенства

$$3 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 4x + 20} = 3 \cdot \sqrt[4]{(x-2)^2 + 16} \ge$$
$$\ge 3 \cdot \sqrt[4]{16} = 6.$$

Таким образом, для исходного неравенства нужно, чтобы его левая и правая части были равны 6. Это выполняется при $x = 2$.

Ответ: 2.

функции разной монотонности

Пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 – корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > g(x)$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ – промежуток $(a; x_0)$ (см. рис. 22).

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 – корень

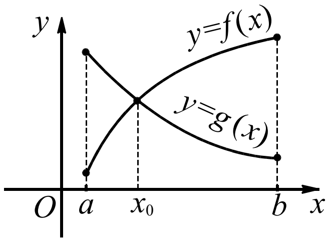

Рис. 22

уравнения $f(x) = c$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > c$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ – промежуток $(a; x_0)$ (см. рис. 23).

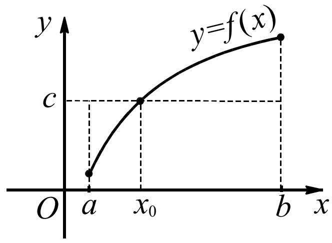

Рис. 23

Пример 58. Решите неравенства:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 > \sqrt[3]{14 - 3x}$.

б) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 < \sqrt[3]{14 - 3x}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ и $g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}$. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на **R**. Исследуем ее на монотонность:

$$f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5 > 0,$$

как сумма неотрицательных слагаемых и положительного слагаемого. Поэтому функция $f(x)$ строго возрастает на **R**.

Функция $g(x)$ определена на **R** и дифференцируема на множестве $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$, причем

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(14 - 3x)^2}} < 0.$$

Значит, функция $g(x)$ убывает на **R**.

Поскольку функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ убывает на **R**, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше одного корня. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем этого уравнения, так как получаем верное равенство

$$2 \cdot 2^5 + 2^3 + 5 \cdot 2 - 80 = \sqrt[3]{14 - 3 \cdot 2}.$$

Значит, решения неравенства а) есть промежуток $(2; +\infty)$, а неравенства б) – промежуток $(-\infty; 2)$.

***Ответ*: а)** $(2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 2)$

Пример 59. Решите неравенство

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x + 2) - \sqrt{1 - x} < 4.$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток [0;1]. Функция

$$y = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x + 2) - \sqrt{1 - x}$$

возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1) = 4$, то все значения x из множества [0;1) удовлетворяют исходному неравенству.

***Ответ*:** [0;1).

2.5. Графический метод

Графическое представление неравенств обладает несколькими несомненными преимуществами:

а) построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение взаимное расположение графиков;

б) график подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи, т.е. графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

в) ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

Пример 60. На рис. 24 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3;6]$. Решите неравенство $f(x) > g(x)$.

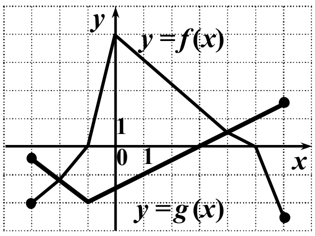

Рис. 24

Решение. Графики данных функций пересекаются в двух точках с абсциссами -2 и 4 соответственно. График функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$ при всех значениях $x \in (-2; 4)$.

Ответ: $(-2; 4)$.

Пример 61. (МФТИ, 2009). Решите неравенство

$$\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \ge 2\log_{x^2}(2x+8).$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями

$$x \ne 0,\ |x| \ne 1,\ x \ge -5,\ x > -4,$$

и представляет собой промежуток $(-4; +\infty)$ с выброшенными из него точками $-1, 0, 1$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x| > 1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \ge \log_{|x|}(2x+8),$$

которое равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5} \ge 2x+4. \qquad (*)$$

Построим графики функций $y = \sqrt{x+5}$ и $y = 2x+4$ (см. рис. 25).

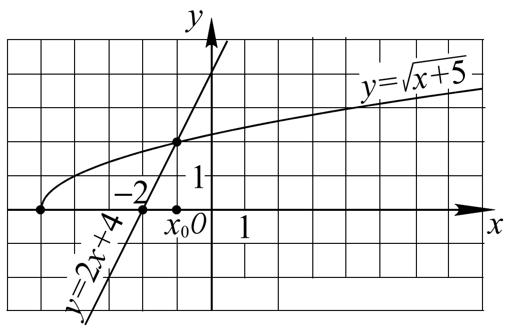

Рис. 25

Из рис. 25 видно, что последнему неравенству удовлетворяют все значения $x \in [-5; x_0]$, где x_0 – корень уравнения $x+5 = (2x+4)^2$ такой, что $-2 < x_0 < 0$. Уравнение $4x^2 + 15x + 11 = 0$ имеет корни -1 и $-\dfrac{11}{4}$, поэтому $x_0 = -1$. Отсюда с учетом области определения неравенства при условии $|x| > 1$ находим множество решений неравенства (∗):

$$-4 < x < -1.$$

2. Пусть $0 < |x| < 1$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5} \le 2x+4.$$

Откуда (см. рис. 25) следует $x \ge -1$. С учетом области определения неравенства при условии $0 < |x| < 1$ находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.

Ответ: $-4 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Пример 62. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решение?

Решение. График функции $y = \sqrt{1-x^2}$ или $x^2 + y^2 = 1 \; (y \ge 0)$ есть полуокружность (см. рис. 26).

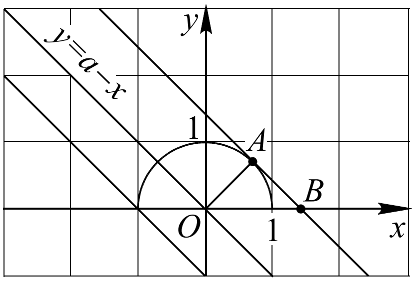

Рис. 26

Функция $y = a - x$ задает семейство прямых с угловым коэффициентом $k = -1$. С увеличением a прямая $y = a - x$ перемещается вправо.

Исходное неравенство будет выполняться до тех пор, пока точки окружности будут лежать выше точек прямой, т.е. пока прямая не станет касательной к окружности. В этом случае значение $a = OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ находим из прямоугольного треугольника OAB. Значение $a = \sqrt{2}$ можно найти и аналитически, если решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = a - x$, и после возведения в квадрат потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю.

***Ответ*:** $a < \sqrt{2}$.

3. Геометрические методы решения

Геометрическая интерпретация неравенств позволяет легко и красиво решать как простые, так и сложные задачи. Наиболее распространенная интерпретация неравенств связана с модулем или расстоянием на координатной прямой. Обобщением этой интерпретации является расстояние на плоскости.

3.1. Расстояние на координатной прямой

Геометрический смысл модуля: модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками координатной прямой, координаты которых соответствуют этим числам. Например, запись $|a-b|$ означает расстояние между точками a и b; $|a+b|$ – расстояние между точками a и $-b$; $|a| = |a-0|$ – расстояние между точками a и 0.

Пример 63. Решить неравенство

$$|x-2| > 5.$$

Решение. Запись $|x-2|$ есть расстояние от точки x до точки 2. Для решения данного неравенства необходимо на координатной оси найти такие точки, расстояние от которых до точки 2 больше 5. Справа от точки 2 расположена точка 7 на расстоянии 5 единиц, а слева – точка (–3). Поэтому данному неравенству удовлетворяют все значения $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

***Ответ*:** $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

Пример 64. Решить неравенство

$$|x-5| > |x+2|.$$

Решение. Рассмотрим уравнение

$$|x-5| = |x+2|.$$

Так как $|x-5|$ и $|x+2| = |x-(-2)|$ – это расстояния от точки x до точек 5 и –2 соответственно, то из данного равенства следует, что точка x – середина отрезка $[-2; 5]$, и поэтому $x = \dfrac{-2+5}{2} = 1{,}5$. Значит решениями данного неравенства являются все числа $x \in (-\infty; 1{,}5)$, т.е. все точки, расстояния от каждой из которых до точки 5 больше расстояния до точки (–2).

***Ответ*:** $(-\infty; 1{,}5)$.

Пример 65. Решить неравенство

$$|x+5| + |x-3| > 8.$$

Решение. Так как расстояние между точками –5 и 3 равно 8, то решениями уравнения

$$|x+5| + |x-3| = 8$$

являются все числа из отрезка $[-5; 3]$. Для любой точки, расположенной вне отрезка $[-5; 3]$ (справа или слева), сумма расстояний от точек –5 и 3 больше 8.

***Ответ*:** $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

3.2. Расстояние на координатной плоскости

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Для любых n точек $M_1, M_2, ..., M_n$ при $n \ge 3$ справедливо неравенство

$$M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_{n-1}M_n \ge M_1M_n, \quad (1)$$

причем знак равенства достигается только, когда точки $M_1, M_2, ..., M_n$ лежат на отрезке M_1M_n и следуют друг за другом в указанном порядке. В частности, если даны три точки M_1, M_2, M_3, то неравенство (1) имеет вид

$$M_1M_2 + M_2M_3 \ge M_1M_3$$

и называется *неравенством треугольника*. Если на плоскости введена декартова система координат, то через координаты точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), M_3(x_3; y_3)$ оно записывается следующим образом

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \ge$$
$$\ge \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}. \quad (2)$$

Пример 66. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-\sqrt{2}-4)^2+(x-\sqrt{3}+1)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-\sqrt{2}+2)^2+(x-\sqrt{3}-7)^2} \le 10.$$

Решение. Заметим, что число $u=\sqrt{(x-\sqrt{2}-4)^2+(x-\sqrt{3}+1)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками на координатной плоскости $A(\sqrt{2}+4; \sqrt{3}-1)$ и $B(x; x)$. Точно также число $v=\sqrt{(x-\sqrt{2}+2)^2+(x-\sqrt{3}-7)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками на координатной плоскости $C(\sqrt{2}-2; \sqrt{3}+7)$ и $B(x; x)$ (или $C_1(\sqrt{3}+7; \sqrt{2}-2)$ и $B(x; x)$, где точка C_1 симметрична точке C относительно прямой $y = x$).

Поэтому левую часть исходного неравенства можно рассматривать как длину ломаной ABC (или ABC_1), причем точка B лежит на прямой $y = x$. Из положения точки B (см. рис. 27) и равенства BC и BC_1 следует, что для решения достаточно рассмотреть только случай с точками A, B, C.

Заметим, что $AB + BC \ge AC$, но

$$AC =$$
$$=\sqrt{\left((\sqrt{2}+4)-(\sqrt{2}-2)\right)^2+\left((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+7)\right)^2} =$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

Следовательно, исходное неравенство будет выполняться только в случае, если точка B лежит на отрезке AC. Это возможно только в случае, когда B есть точка пересечения B_0 прямых AC и $y = x$.

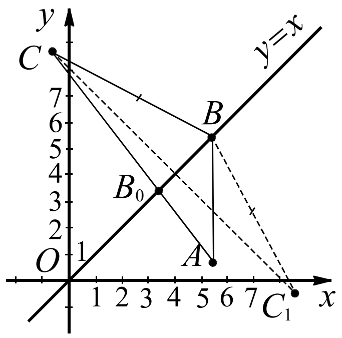

Рис. 27

Уравнение прямой AC в виде $y = kx + b$ находим из системы уравнений (подставляя в это уравнение координаты точек A и C):

$$\begin{cases}\sqrt{3}-1=k(\sqrt{2}+4)+b,\\ \sqrt{3}+7=k(\sqrt{2}-2)+b.\end{cases}$$

Отсюда $k=-\dfrac{4}{3}$ и $b=\sqrt{3}+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+\dfrac{13}{3}$.

Тогда координаты точки B_0 найдем, подставив $y = x$ в уравнение прямой AC. Получим

$$x=-\frac{4}{3}x+\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{13}{3}.$$

Отсюда $x=\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+13}{7}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+13}{7}$.

Замечание. Рассмотрение точки, симметричной точке A относительно прямой $y=x$ приводит к тому же ответу.

3.3. Векторная интерпретация неравенства

Векторы успешно могут быть применены не только в геометрии, но и при решении неравенств.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для скалярного произведения этих векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами, справедливы следующие оценки

$$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|, \qquad (3)$$

причем экстремальные значения скалярного произведения достигаются в случаях коллинеарности векторов. Запишем неравенства (3) в координатной форме:

для векторов на плоскости

$$-\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}\le a_1a_2+b_1b_2\le$$
$$\le\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2};$$

для векторов в пространстве

$$-\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\le$$
$$\le a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\le\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}.$$

Пример 67. Решите неравенство

$$2\sqrt{x-1}+5x\ge\sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Решение. Рассмотрим два вектора $\vec{a}=\{a_1,a_2\}=\{2;x\}$ и $\vec{b}=\{b_1,b_2\}=$ $=\{\sqrt{x-1};5\}$, заданные в декартовой системе координат. Тогда неравенство можно записать в виде

$$a_1b_1+a_2b_2\ge\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}, \text{ т.е.}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\ge|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

В силу неравенства (3) получаем $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Поскольку рассматриваемые векторы – ненулевые, то из полученного равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Следовательно, существует такая константа k, что $\vec{b}=k\vec{a}$, а это означает, что

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=2k,\\ 5=kx.\end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы получаем, что $k\ne0$, тогда из первого следует $k>0$ (соответственно $x>0$). Исключая из второго уравнения $k>0$, получим

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=\dfrac{10}{x},\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{100}{x^2},\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x^2-100=0,\\ x>0.\end{cases}$$

Перебирая целые делители числа 100, заметим, что уравнение $x^3-x^2-100=0$ имеет целый корень $x=5$. Тогда, раскладывая левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$x^3-x^2-100=(x-5)(x^2+4x+20).$$

Квадратное уравнение $x^2+4x+20=0$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен.

Следовательно, $x=5$ – единственный корень кубического уравнения, а так как условие $x>0$ выполнено, то число $x=5$ будет и решением исходного неравенства.

Ответ. 5.

Упражнения

1. Решите неравенство

$$x^2 - x(\cos 2 + \cos 3) + \cos 2 \cdot \cos 3 < 0.$$

2. Решите неравенство

$$(x-4)^2(x-\sqrt{5})\left(x - 2\frac{6}{25}\right) \le 0.$$

3. Решите неравенство

$$(2x^2 - 5x + 3)(3 - x^3) < 0.$$

4. Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 2011) \le 0.$$

5. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x-5} \ge 0$.

6. Решите неравенство $\dfrac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \ge 0$.

7. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 5x + 3} < \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 7x + 4}.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x+1)^2} + \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-1)^2} \le \frac{(2x^2 + x + 5)^2}{2(x^2 - 1)^2}.$$

9. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} + \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} \le 0.$$

10. Решите неравенство

$$(x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \ge 0.$$

11. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$$

12. Решите двойное неравенство

$$2 + \frac{3}{x+1} \ge \frac{2}{x} > 0.$$

13. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}}.$$

14. Решите неравенство

$$|x - 2x^2| > 2x^2 - x.$$

15. Решите неравенство

$$2||x-2|-3| < x + 4.$$

16. Решите неравенство

$$x(|x^2 - 1| - 2|x - 1|) < 0.$$

17. Решите неравенство

$$|x^3 + 2x^2 + 8x - 7| \le x^3 + 4x^2 - 8x + 7.$$

18. Решите неравенство

$$|x^3 + 2x^2 - 8x| + |x^2 - 3x - 10| \le$$
$$\le |x^3 + 3x^2 - 11x - 10|$$

19. Решите неравенство

$$\left||x^2 - 8x + 2| - x^2\right| \ge 2x + 2.$$

20. Решите неравенство

$$2x - 5 + 2|x - 3| < |x + 1|.$$

21. Решите неравенство $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right| > 2$.

22. Решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x^2 - |x| - 2} \ge -3x.$$

23. Решите неравенство

$$\frac{|2x+7| - 3x - 4}{x + 5 - |5x - 7|} \le 0.$$

24. Решите неравенство

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2 - 2|x^3 + x^2 + x| - 3x^2}{10x^2 - 17x - 6} \ge 0.$$

25. Решите неравенство

$$\left(2x - 3 - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1} + 2 + \left(\sqrt{-1-2x}\right)^2\right) \ge 0.$$

26. Решите неравенство

$$(x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \ge 0.$$

27. Решите неравенство

$$x^2 + 25 \ge 8\sqrt{5 - x} + 10x.$$

28. Решите неравенство

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \ge \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

29. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \geq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}.$$

30. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0.$$

31. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5x}-4x+26}{7-x} > 2.$$

32. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x.$

33. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leq 0.$$

34. Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}.$$

35. Решите неравенство $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2} \leq 3.$

36. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2} \geq \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$

37. При каких значениях аргумента график функции $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{2x+1}}$ лежит выше графика функции $g(x)=\sqrt{5x-3}$?

38. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2+3x-35}+\sqrt{2x^2+x-36} \leq |2x+1|.$$

39. Решите неравенство

$$\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leq \sqrt{4x-3}.$$

40. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2 \geq$$

$$\geq 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2.$$

41. Решите неравенство

$$(1-2|x|)\cdot\sqrt{1+x^2} < (4x-1)\sqrt{4x^2-4x+2}.$$

42. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+44}+\sqrt{28-2x} \geq 4\cdot\sqrt[4]{x^2+8x+97}.$$

43. Решите неравенство $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5.$

44. Пусть $f(x)=3^{x-x^2}$. Решите неравенство

$$2f(x)+f(1-x) < \frac{1}{3}.$$

45. Решите неравенство $4^{x-1}+2^{x-2}-\frac{3}{2} \geq 0.$

46. Решите неравенство

$$4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}}+8 < 0.$$

47. Решите неравенство

$$5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1} \leq 8\cdot 15^x.$$

48. Решите неравенство

$$2^{x^2+3x-3}-2^{x^2+3x-5}-96 \geq 0.$$

49. Решите неравенство

$$2^{2x-1}-2^{x-1}\left(2x^{0,5}+x\right)+x\cdot x^{0,5} > 0.$$

50. Решите неравенство

$$5\cdot 3^{2x^2-3x-1}-2\cdot 3^{2x^2-3x}+3^{2x^2-3x-3} \geq -72.$$

51. Решите неравенство

$$3^{2p^2-p+2}-5^{2p^2-p-1} > 5^{2p^2-p+1}+3^{2p^2-p-1}.$$

52. Решите неравенство

$$2^{\sqrt{2x^2-1}} < 4^x-14\cdot 0{,}25^{2-x}.$$

53. Решите неравенство

$$(3+2\sqrt{2})^x+3 < 4\cdot(3-2\sqrt{2})^x.$$

54. Решите неравенство $2^x\cdot 5^{\frac{1}{x}} > 10.$

55. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq x+4.$

56. Решите неравенство

$$2^{x^2-4x+5} \leq 4x-2-x^2.$$

57. Решите неравенство

$$\frac{12^x-4^{x+1}-3^{x+1}+12}{x^2-2x+1} < 0.$$

58. Решите неравенство

$$\frac{(x+4)\left(3^{\frac{1}{x+1}}+0,3\right)}{x-3}\le 0.$$

59. Решите неравенство

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{(3^x-8)(x^4+4x+20)}\ge 0.$$

60. Решите неравенство

$$\frac{\left(2^x-32\right)\left(3^x+27\right)}{x^2+5x-14}\le 0.$$

61. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$$

62. Решите неравенство

$$8\cdot\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

63. Решите неравенство $9^{|x|}+6\cdot 3^x\ge 11$.

64. Решите неравенство

$$\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\ge 0.$$

65. Решите неравенство

$$\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\ge 3^x-3\cdot 2^x.$$

66. Решите неравенство

$$\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|2^x-3|}\ge 1.$$

67. Решите неравенство

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}.$$

68. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\ge$$
$$\ge\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

69. Найдите область определения функции

$$f(x)=\left(64\cdot 2^{2-x}-0,125^{-2-\sqrt{2-x}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

70. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}.$$

71. Решите неравенство

$$\log_{\sin 91^\circ}(3x-8)\ge\log_{\sin 89^\circ}4.$$

72. Решите неравенство

$$\log_{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x-9)\ge\log_{\frac{\pi}{3}}(x+1).$$

73. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(x-2).$$

74. Решите неравенство

$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

75. Решите неравенство

$$9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2}<5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2}.$$

76. Решите неравенство

$$\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1.$$

77. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{x+2}>1$.

78. Решите неравенство $\log^2_{0,1}x-1\le 0$.

79. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55})\le 2.$$

80. Решите неравенство

$$\left|\log_3(x+2)\right|>2.$$

81. Решите неравенство $\log_2\left|1+\dfrac{9}{x^2}\right|<1$.

82. Решите неравенство

$$2<\left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|\le 3.$$

83. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x}\le\log_4 49.$$

84. Решите неравенство

$$\log_2\frac{3x-2}{x-1}+3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1.$$

85. Решите неравенство

$$\log_3((3x^2-1)(6x-7))+\log_{\frac{1}{3}}(6x-7)\ge 1.$$

86. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-4\right)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}>2.$$

87. Решите неравенство

$$\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2\ge\log_2(x^2+3x-4).$$

88. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-3x-2)\le$$
$$\le\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x-1)^2+\log_3 4-2.$$

89. Решите неравенство

$$\log_{13}(x^2+2x+4)+\log_{13}(x-2)\le$$
$$\le\log_{13}(x^3-x^2+4x-3).$$

90. Решите неравенство

$$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le$$
$$\le\log_5\left((1-x)\left(x^2-8x-8\right)\right).$$

91. Решите неравенство

$$\log_3\left((x+2)(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

92. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4}{3}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)+\log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{2}{3}\right)\ge 0.$$

93. Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>$$
$$>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1.$$

94. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1.$$

95. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_{2^{x+4}}4}{\log_{2^{x+4}}(-8x)}\le\frac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{2}}2^x}.$$

96. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}}x^2}<1.$$

97. Решите неравенство

$$\log_4(x+2)\cdot\log_x 2\le 1.$$

98. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\ge 0.$$

99. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)}\ge 1.$$

100. Решите неравенство

$$\log_2^2(x^2-2x)+\log_{0,5}(x^2-2x)^3+2\le 0.$$

101. Решите неравенство

$$7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\ge 1.$$

102. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{2^{4x+2}}{4^{x+1}}>1,\\ 1+\log_3(x-4)\le\log_3(x+21).\end{cases}$$

103. Найдите область определения функции

$$y=\log_5\log_{0,5}\frac{3-x}{x+2}.$$

104. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\log_6(x-3)}.$$

105. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{x^2-8,3x-17}}{3-x^2}+\ln(16-x^2).$$

106. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{x-1}{2-x}>-1$.

107. Решите неравенство

$$\log_4 x^2+\log_2^2(-x)>6.$$

108. Решите неравенство
$$\frac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\ge 2\log_2 x.$$

109. Решите неравенство
$$\frac{1-\sqrt{1-4\log_8^2 x}}{\log_8 x}<2.$$

110. Решите неравенство
$$\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\left(4-\log_{16} x^4\right).$$

111. Решите неравенство
$$49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\ge 0.$$

112. Решите неравенство
$$\frac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5}\ge\frac{\log_{32}11}{\log_2 11}.$$

113. Решите неравенство
$$(3-x)\log_3(x+5)\le 0.$$

114. Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)}<1.$

115. Решите неравенство $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0.$

116. Решите неравенство $\dfrac{\log^2_{x+2,5}(1{,}5-x)}{(x+0{,}5)(x-1)}\ge 0.$

117. Решите неравенство $\dfrac{\lg x}{x^2-x-6}\ge 0.$

118. Решите неравенство $\dfrac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0.$

119. Решите неравенство $\dfrac{\log_4\left(2^x-1\right)}{x-1}\le 1.$

120. Решите неравенство
$$\sqrt{8-2^x}\cdot\log_2\frac{4-x}{x+2}\ge 0.$$

121. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_{0,7}^{2}(23+4x)}{45-4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{83}{4x-45}$.

122. Решите неравенство
$$\frac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0.$$

123. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$

124. Решите неравенство
$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)}\le 0.$$

125. Решите неравенство
$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\ge 1.$$

126. Решите неравенство
$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x}\ge 1.$$

127. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\le 0.$$

128. Решите неравенство
$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0.$$

129. Решите неравенство $\log_{6x+11}5\ge 1.$

130. Решите неравенство
$$\log_{\frac{2x-1}{x}}5<\log_{\frac{2x-1}{x}}x.$$

131. Решите неравенство
$$\log_x(3x^2-6x+2)\le\log_x\frac{1}{x+2}+3.$$

132. Решите неравенство
$$\log_{x+4}(5x+20)\le\log_{x+4}(x+4)^2.$$

133. Решите неравенство
$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1).$$

134. Решите неравенство
$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$

135. Решите неравенство
$$\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2.$$

136. Решите неравенство
$$\log_{x+1}(2x^2-3x+1) \le 2\,.$$

137. Решите неравенство
$$\log_{x+2}(9x^2+15x-6) < 2\,.$$

138. Решите неравенство
$$\log_{1-x}(2x^2+3x+1) \ge 2\,.$$

139. Решите неравенство
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \le 2.$$

140. Решите неравенство
$$\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \ge 1\,.$$

141. Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

142. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right) \ge -2$.

143. Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right) \ge 1$.

144. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0.$

145. Решите неравенство
$$\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \ge \frac{1}{2}.$$

146. Решите неравенство
$$\frac{\log_{2x-1}\left(\log_2(x^2-2x)\right)}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)} \le 0\,.$$

147. Решите неравенство
$$\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \le \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}.$$

148. Решите неравенство
$$\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x \sqrt{6-x}\right) > 0.$$

149. Решите неравенство
$$\log_{10-x}(9{,}5-x)^2 > 2\log_{x-8}(x-8)\,.$$

150. Решите неравенство
$$\log_{x+2}(x^2-x+1) > \log_{\frac{x-3}{x-5}} 1\,.$$

151. Решите неравенство
$$\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x) \ge$$
$$\ge \log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}\,.$$

152. Решите неравенство
$$\log_{2^x-1}\left(9\cdot 2^{3-2x}-2^{x+1}\right) \le 2\,.$$

153. Решите неравенство
$$\log_{2-2^y}\frac{2^{2y+5}-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y}-1}+1 \le 0\,.$$

154. При каких p число 2 является решением неравенства
$$\log_{\frac{x}{2+p^2}}\left(0{,}5p^2+0{,}5-x^2+\frac{6p}{x}\right) \ge -1\,?$$

155. Решите неравенство
$$\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right) < 1.$$

156. Решите неравенство
$$\log_{\frac{x}{4}}\left(\log_x \sqrt{4-x}\right) \le 0.$$

157. Решите неравенство
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0.$$

158. Решите неравенство
$$\log_{x^2+2x-3}\frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0.$$

159. Решите неравенство
$$\frac{\left(\log_3(10x+3)\right)\cdot\left(\log_3(3x+10)\right)}{\left(\log_3 10x\right)\cdot\log_3 x} \ge 0.$$

160. Решите неравенство
$$\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2 \ge 2.$$

161. Решите неравенство
$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}\,.$$

162. Решите неравенство
$$\log_x 2x \le \sqrt{\log_x(2x^3)}\,.$$

163. Решите неравенство

$$\frac{(|2x+1|-x-2)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1\right)}{2^{x^2+1}-2^{|x|}} \geq 0.$$

164. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \leq \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

165. Решите неравенство

$$\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)} \leq 2.$$

166. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2 \geq$$

$$\geq 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2.$$

167. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(19+18x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log_{x+1}^2(x-19)^2 \geq 2.$$

168. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

169. Решите неравенство

$$\frac{\log_{2x-3}^2\frac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1} \leq 3.$$

170. Решите неравенство

$$5^{\log x2}\cdot\log_2 x+5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2 \leq 10.$$

171. Решите неравенство $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x}+3$.

172. Решите неравенство $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2} < 100.$

173. Решите неравенство $x^{\lg^2 x-3\lg x+1} > 1000$.

174. Решите неравенство

$$10^{x^{\lg x}}\cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1000\,000.$$

175. Решите неравенство $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}} \leq \frac{x^{\frac{\log_3 x}{3}}}{3}$.

176. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} \geq 2$.

177. Решите неравенство

$$x \geq \log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-$$

$$-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

178. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lg x}\right) \geq -1+\lg x.$$

179. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geq$$

$$\geq 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

180. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geq -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

181. Решите неравенство

$$\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x-x^2+5} \geq 0.$$

182. Решите неравенство

$$\sin^2 3x-\cos^2 3x \leq -1.$$

183. Решите неравенство $\arcsin\frac{3}{x} > \frac{\pi}{6}$.

184. Решите неравенство

$$(x^2-2x)(\mathrm{tg}^2 x+2^{x+1}) \leq 0.$$

185. Решите неравенство $\sqrt{\cos x-1} \geq x^2-16$.

186. Решите неравенство

$$(10x-x^2-24)\log_2\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x+1\right) \geq 1.$$

187. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\sqrt{3+2x-x^2} \geq 0$, удовлетворяющих условию $\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$.

188. Решите неравенство

$$5^{2x^2-2x+1} \leq$$

$$\leq \sqrt{3\sin\left(\pi x-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)+4\cos\left(\pi x-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$$

Ответы

1. $(\cos 3;\cos 2)$. **2.** $\left[\sqrt{5};2\frac{6}{25}\right]\cup\{4\}$.

3. $(1;\sqrt[3]{3})\cup(1{,}5;+\infty)$. **4.** $[1;2]$.
5. $[3;5)\cup(5;+\infty)$. **6.** $(1;2]\cup(7;8)$.

7. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$. **8.** $-\frac{1}{7}$. **9.** $(-\infty;1)\cup$ $\cup(2;4]$. **10.** $[-4;-3)\cup[-1{,}5;0)\cup[1;+\infty)$.
11. $(-\infty;-7)\cup(-4;-2)$. **12.** $[0{,}5;+\infty)$.
13. $\{-1\}\cup(1;+\infty)$. **14.** $(0;0{,}5)$.
15. $(-2;2)\cup(2;14)$. **16.** $(-\infty;-3)\cup(0;1)$.
17. $[-3;1],[7;+\infty)$. **18.** $[-4;-2]\cup[0;2]\cup$ $\cup[5;+\infty)$. **19.** $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$.

20. $(-\infty;-2)\cup(0;4)$. **21** $\left(\frac{5}{4};2\right)\cup(2;+\infty)$.

22. $\frac{2}{3}\le x\le 1,\ x>2$. **23.** $x<\frac{1}{3}$.

24. $x\le -2-\sqrt{3},\ -0{,}3<x\le -2+\sqrt{3},\quad x=1,$ $x>2$. **25.** $[-3;-1)\cup(-1;-0{,}5]$.

26. $(-\infty;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$. **27.** $(-\infty;1]\cup\{5\}$.
28. $x=3$. **29.** $[-4;1]\cup\{2\}$. **30.** $-3<x<0,$ $x=0{,}5,\ x=2$. **31.** $(-\infty;0]\cup[5;7)\cup(9;+\infty)$.
32. $[-2;-1)\cup[0;1]$. **33.** $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$.
34. $1<x<2,\ 4<x\le 5$. **35.** $[0;1]\cup(4;16]$.
36. $[-2;0)\cup(0;\sqrt{3}]$. **37.** $[0{,}6;1)$.

38. $\left[\frac{-1-\sqrt{145}}{2};-5\right]\cup\left[4;\frac{-1+\sqrt{145}}{2}\right]$.

39. $\frac{3}{4}<x\le 7$. **40.** $0<x\le 1,\ x=3,\ 4\le x<5,$

$5<x\le 6$. **41.** $x>\frac{1}{3}$. **42.** -4. **43.** $\left(\frac{5}{3};2\right)$.
44. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **45.** $[1;+\infty)$.
46. $(0;9)$. **47.** $[0;1]$. **48.** $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$.
49. $[0;0{,}5)\cup(1;+\infty)$. **50.** $[-1;2{,}5]$.
51. $-0{,}5<p<1$. **52.** $(5;+\infty)$. **53.** $x<0$.
54. $(0;1)\cup(\log_2 5;+\infty)$. **55.** $(-\infty;-1]$.
56. 2. **57.** $(\log_4 3;1)\cup(1;\log_3 4)$.
58. $[-4;-1)\cup(-1;3)$. **59.** $0<x<\log_3 8;$ $x=2{,}5$. **60.** $(-\infty;-7)\cup(2;5]$.

61. $(-\infty;-2{,}5]\cup(0;0{,}5]$. **62.** $\left(0;\ \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

63. $(-\infty;-1]\cup[\log_3(\sqrt{20}-3);+\infty)$.

64. $\{2\}\cup[6;+\infty)$. **65.** $x\ge\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{17}}$.

66. $x>3$. **67.** $-\sqrt{2+\sqrt{3}}<x<-\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$-\sqrt{2-\sqrt{3}}<x<0$; $0<x<\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

$\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **68.** $x>0$.
69. $(-\infty;-7]\cup\{2\}$. **70.** $[-4;0)\cup(0;1)\cup(1;4]$.

71. $\left(2\frac{2}{3};4\right]$. **72.** $[5;+\infty)$. **73.** $\left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

74. $x<-2$. **75.** $x<-1,\ x>1$. **76.** $1<x<4$.
77. $0{,}5<x<1$. **78.** $0{,}1\le x\le 10$. **79.** $[-2;0]$.

80. $\left(-2;-\frac{17}{9}\right)\cup(7;+\infty)$. **81.** $x<-3;\ x>3$.

82. $\left[-\frac{127}{384};-\frac{21}{64}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$.

83. $(0;1)\cup(1;2)$. **84.** $1-\sqrt{2}<x<\frac{2}{3},$

$1<x<1+\sqrt{2}$. **85.** $\left(1\frac{1}{6};+\infty\right)$. **86.** $x<-2$ или

$x>6$. **87.** $1<x\le 17$. **88.** -1. **89.** $(2;5]$.
90. $-2<x\le -1$. **91.** $-2<x<3$.

92. $0\le x\le\frac{27}{16}$. **93.** $-1\le x\le 0$.

94. $\left(0;10^{\frac{\lg 0{,}5\cdot\lg 2}{\lg 1{,}5}}\right)$ или $\left(0;\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1{,}5}3}\right)$.

95. $[-8;-4)\cup(-4;-1)\cup\left(-\frac{1}{8};0\right)$.
96. $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;6)\cup(6;+\infty)$.
97. $(0;1)\cup[2;+\infty)$. **98.** $-2\le x<-\sqrt{2}$;

$0\le x<-1+\sqrt{2}$. **99.** $2<x\le 2+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}$.

100. $[1-\sqrt{5};1-\sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3};1+\sqrt{5}]$.
101. 3. **102.** $(4;16{,}5]$. **103.** $(0{,}5;3)$.
104. $(3;4)\cup(4;+\infty)$.
105. $(-4;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-1{,}7]$.

106. $\left(\frac{3}{2};\frac{17}{9}\right)$. **107.** $(-\infty;-4)\cup\left(-\frac{1}{8};0\right)$.

108. $0<x\le 0{,}5,\ \sqrt{2}<x\le 2\sqrt[4]{2}$.

109. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4};1\right)\cup(1;\sqrt{8})$. **110.** $0<x\le\frac{1}{4}$; $1\le x<4$. **111.** $1<x\le 5^{\log_2 7}=7^{\log_2 5}$.
112. $\left[\frac{1}{4};\frac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$. **113.** $(-5;-4]\cup[3;+\infty)$.
114. $(0;+\infty)$. **115.** $(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup$ $\cup(1;\sqrt{2})\cup(2;+\infty)$. **116.** $(-2{,}5;-1{,}5)\cup$ $\cup(-1{,}5;-0{,}5)\cup\{0{,}5\}\cup(1;1{,}5)$.
117. $(0;1]\cup(3;+\infty)$. **118.** $(0;0{,}5)\cup(2;3)$.
119. $(1;+\infty)$. **120.** $(-2;1]\cup\{3\}$.
121. $(-5{,}75;11{,}25)$. **122.** $(0{,}5;1)$.
123. $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$. **124.** $(-7;-6)\cup[2;2{,}5)\cup$ $\cup(4;4{,}5]$. **125.** $\left(\log_2\frac{2}{3};0\right);[1;+\infty)$. **126.** $[2;3)$.
127. $1-\sqrt{3}\le x\le\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $2<x<\frac{5}{2}$.
128. $x<-2; -2<x<2-\sqrt{15};\ x\ge 6$.
129. $\left(-\frac{5}{3};-1\right]$. **130.** $(0{,}5;\ 1)\cup(5;\ +\infty)$.
131. $(0;-1+\sqrt{2}]\cup\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}};2\right]$.
132. $(-4;-3)\cup[1;+\infty)$. **133.** $1<x<2$, $3<x<7$. **134.** $\{1\}\cup(1{,}5;3)$. **135.** $0<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6}$. **136.** $(-1;0)\cup(0;0{,}5)\cup(1;5]$.
137. $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{8}\right)$. **138.** $(-\infty;-5]$. **139.** $(-0{,}5;0]\cup$ $\cup[1;4)$. **140.** $[-\sqrt{8};-1)\cup\left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5};1\right)$.
141. $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.
142. $[0{,}5;1),[2;+\infty)$. **143.** $\frac{1}{3}<x\le\frac{2}{3}$.
144. $1<x<1{,}5$, $2<x<2{,}5$, $x>3$.
145. $\sqrt{6}-1\le x<2;\ 2<x\le 5$.
146. $\sqrt{2}+1<x\le 1+\sqrt{3}$. **147.** $[-3;0);\left(0;\frac{1}{4}\right);$ $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **148.** (2; 5). **149.** $(9;9{,}5)\cup(9{,}5;9{,}75)$.
150. $(-1;0)\cup(1;3)\cup(5;+\infty)$. **151.** $-2<x<-1$, $3<x<5$. **152.** $(0;1)\cup\left[\frac{3}{2};\frac{2}{3}(1+\log_2 3)\right)$.
153. $\frac{\log_2 7-5}{3}<y\le-\frac{2}{3}; 0<y<1$.
154. $(-\infty;-7)\cup(1;1{,}5]$. **155.** $(\log_3 10;+\infty)$.
156. $\left(1;\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$. **157.** $(-2;-1]\cup(1;2)$.
158. $-1-\sqrt{5}<x<-3; \sqrt{5}-1<x<5$.
159. $(0;0{,}1)\cup(1;\infty)$. **160.** 2. **161.** $-\frac{1}{2}<x<0$.
Указание. Рассмотреть графики функций $y=\frac{6x}{2x+1}$ и $y=1+\log_2(x+2)$.
162. $0<x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $x>2$. **163.** $-4<x\le 1$.
164. $(-7;-6),[-3;0),(0;1),(1;4]$.
165. $-\frac{1}{2}<x<\frac{-5-\sqrt{5}}{20}$; $\frac{-5+\sqrt{5}}{20}<x<0$; $0<x<\frac{-5+\sqrt{45}}{20}$; $\frac{-3+\sqrt{44}}{10}\le x<\frac{1}{2}$.
166. $0<x\le 1$, $x=2$, $3<x<4$, $4<x<5$.
167. 3. **168.** $-5<x<-2-2\sqrt{2}$, $-4\le x<0$, $0<x<0{,}5$. **169.** $\frac{7}{4}$. **170.** $0<x<1$; $x=2$.
Указание. Рассмотреть два случая $0<x<1$ и $x>1$. Во втором случае применить неравенство Коши.
171. $0<x<10^{-\sqrt{\lg 5}}$, $10^{\sqrt{\lg 5}}<x$. **172.** (1;1000).
173. $x>1000$. **174.** $10^{-\sqrt{\lg 4}}<x<10^{\sqrt{\lg 4}}$.
175. $0<x\le 3^{-2\sqrt{3}}$; $x\ge 3^{2\sqrt{3}}$. **176.** $0<x\le\frac{1}{4}$; $x\ge 4$. **177.** $x\le -2$, $0\le x<\lg 101-2$.
178. $0{,}1<x\le 0{,}5$. **179.** $x=3; x\ge 8$.
180. $-1<x\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $0<x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x\ge\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **181.** $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\pi;\frac{4\pi}{3}\right]\cup$ $\cup\{-1;5\}$. **182.** $\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. **183.** $[3;6)$.
184. $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\right]$. **185.** 0. **186.** 5. **187.** 2.
188. 0,5.

Список и источники литературы

1. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.

2. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, №3.

3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

6. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-6, 8, 12, 14, 18, 25. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»), 1993-2003.

7. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. – 477 с.

8. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.

9. Панферов В.С., Сергеев И.Н. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3 / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

10. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

11. Потапов М.К., Шевкин А.В., Вуколова Т.М. О решении неравенств вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ // Математика в школе, 2005, №5.

12. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

13. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

14. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.

15. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010, 2011 (открытый банк заданий)

16. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

17. http:///eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.