68.8.6.4. Мини КР –Применение производной: текстовые задачи, v2 с ответами

14. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $12 + 8v + \dfrac{v^2}{3}$. С какой скоростью должен плыть пароход, чтобы стоимость поездки протяженностью 270 км была наименьшей? **[2219 c**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 12 км/ч $\boxed{\mathbf{2}}$ 8 км/ч $\boxed{\mathbf{3}}$ 4 км/ч $\boxed{\mathbf{4}}$ 6 км/ч $\boxed{\mathbf{5}}$ 10 км/ч

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$

♦ 6 км/ч

15. Студент собирается потратить 72 у.е. на летнее обучение. Часть средств, X у.е., необходимо потратить на проживание, остальное, Y у.е., — на оплату образовательной программы, причем качество обучения пропорционально $X \cdot Y^3$. Сколько у.е. следует потратить на образовательную программу? Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5. **[4496 d.⊕⊕**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$

♦ $X = 18,\ Y = 54.$

16. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (4 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 1620 кг рыбы? **[9808 r**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 240 $\boxed{\mathbf{2}}$ 360 $\boxed{\mathbf{3}}$ 256 $\boxed{\mathbf{4}}$ 320 $\boxed{\mathbf{5}}$ 400

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$

♦ 360; $P = 45$; $N = 36$.

17. Доход нефтяной компании (в у.е.) равен численно произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится в 16 у.е., одного добытчика — в 3 у.е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, то число t, равное отношению числа геологов x к числу добытчиков y, удовлетворяет условию

$\boxed{\mathbf{1}}$ $t \in \big(0;\ 0,2\big)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $t \in \big[0,2;\ 0,3\big)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $t \in \big[0,3;\ 0,5\big)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $t \in \big[0,5;\ 0,8\big)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $t \in \big[0,8;\ 999\big)$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$

♦ $x : y = 1 : 8 = 0,125....$ Если $x^2 \cdot y^3 = z$, $f(x,y) = ax + by \Rightarrow \min$, то $g(x) = ax + b\sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}} \Rightarrow \min$. Пусть $t = \sqrt[3]{x}$; $g(t) = at^3 + b\sqrt[3]{z}\cdot t^{-2}$; $\dfrac{dg}{dt} = 3at^2 - 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^3}$; $3at^2 - 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^3} = 0$; $3at^3 = 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^2}$; $3ax = 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^2}$. Так как $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}}$; $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{t^6}}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{t^2}$; то $3ax = 2by$. Поэтому $x : y = 2b : 3a$.

18. Расстояние от Парижа до Марселя (по шоссе) равно 90 лье. В Париже квартируют 2500 мушкетеров, в Марселе — 1600. На каком расстоянии (в лье) от Парижа следует расположить винокуренный завод для обслуживания мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные издержки, если затраты на перевозку P декалитров бургундского на расстояние L лье составляют $P \cdot L^3$ бурбонов? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$

♦ 40

19. Вдоль дороги в точках с координатами $x_k = 8 \cdot 3^k$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots; 9; 10\}$, расположены города A_k, каждый из которых потребляет 3^{k+4} единиц продукции. Расход на перевоз Q единиц продукции на расстояние L равен $Q \cdot L^2$. В какой точке дороги с целочисленной координатой следует расположить завод для того, чтобы общие расходы на перевозку были наименьшими? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5. **[3899 a**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$

♦ $2(3^{11}+1) = ...6$. $f(x) = q^0(x - m \cdot q^0)^2 + \cdots + q^n(x - m \cdot q^n)^2$,
$f(x) = (q^0 + q^1 \cdots + q^n)x^2 - 2 \cdot m\big(q^0 + q^2 + \cdots + q^{2n}\big)x + \ldots$,
$f(x) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}x^2 - 2 \cdot m\frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}x + \ldots$,
$f(x) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}x^2 - 2 \cdot m\frac{q^{2n+2}-1}{q-1}x + \ldots$, $x_0 = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}m\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$,
$x_0 = (q^{n+1}+1)\frac{m}{q+1}$, $x_0 = (3^{11}+1)\frac{8}{3+1} = 2(3^{11}+1) = ...6$.

20. В распоряжении предпринимателя находится участок земли в форме прямоугольного треугольника с катетами 4 и 12. Найдите наибольшую площадь цеха прямоугольной формы, который он может разместить на своей земле, и укажите остаток от деления этого натурального числа на 5. **[3535 c**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$

♦ 12, $S_{\max} = \frac{ab}{4}$.

21. Предприниматель собирается огородить участок земли прямоугольной формы, одна сторона которого прилегает к реке и не требует ограждения. Стоимость одного метра ограды, параллельной реке, равна 3 у.е. Стоимость одного метра ограды, перпендикулярной реке, равна 8 у.е. Найдите наибольшую площадь участка (в кв.м.), который можно таким образом огородить, затратив не более 384 у.е..

Ответ: 768, $x = 64$ (вдоль), $y = 12$ (поперек)

♦ 768. ♦ $x = 64$, $y = 12$, $P = ax + 2by$, $Q = xy$, $ax = 2by = \frac{P}{2}$,
♣♠] $x = \frac{P}{2a}$, $y = \frac{P}{4b}$, $Q = \frac{P^2}{8ab}$.

22. Требуется изготовить будку для собаки в форме прямоугольного параллелепипеда из трех листов фанеры, причем пол и две боковые стенки делать не нужно, так как будка будет стоять в углу двора у забора, и к тому же одна из боковых стенок должна быть обязательно квадратной. Стоимость 1 кв м фанеры, идущей на боковые стенки, равна 2 у.е., стоимость 1 кв м потолочного листа равна 3 у.е. Найдите наибольший обьем будки (в куб м), которую можно изготовить, израсходовав на закупку фанеры 1350 у.е..

♦ 2700. ♦ $V = x^2y$, $y = \frac{V}{x^2}$, $S = mx^2 + (m+n)xy$, $S = mx^2 + (m+n)x\frac{V}{x^2}$, $S = mx^2 + \frac{(m+n)V}{x}$, $S' = 2mx - \frac{(m+n)V}{x^2}$, $S' = \frac{2mx^3-(m+n)V}{x^2}$, $x = \sqrt[3]{\frac{(m+n)V}{2m}}$, $y = \frac{2m}{m+n}x$, $x = 15$, $y = 12$, $V = 15^2 \cdot 12 = 2700$.

] $S = 2 \cdot 15^2 + 5 * 15 * 12 = 1350$.

23. В распоряжении предпринимателя находится участок земли, ограниченный отрезком оси абсцисс $0 \leqslant x \leqslant 8$, отрезком оси ординат и частью линии $y = \dfrac{1}{4}(8-x)^3$, $0 \leqslant x \leqslant 8$. Найдите наибольшую площадь цеха в форме треугольника, который он может разместить на своей земле, и укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

⊗|

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ: $\boxed{\mathbf{1}}$.

♦ $S = \frac{4\cdot 108}{2} = 216$. Для параболы $y = a(x+b)^n$, $b > 0$, экстремальное значение площади достигается при $x^\star = \frac{-b}{n+1}$, $S^\star = \frac{2a}{n}\left(\frac{nb}{n+1]}\right)^{n+1}$,
$y = \frac{1}{4}(x+8)^3$, $x^\star = \frac{-8}{4} = -2$, $y^\star = \frac{1}{4}6^3 = 54$, $y'^\star = \frac{3}{4}6^2 = 27$,
$\tilde{y}(x) = 54 + 27(x+2)$, $\tilde{y}(x) = 27(x+4)$, $x_1 = -4$, $y_1 = 2\cdot 54 = 108$,
$S^\star = \frac{4\cdot 108}{2} = 216$.

♦

24. Если значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $11x^3 + \dfrac{p}{x^{11}} = 112$ имеет единственный корень, то p — натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен **[4235 c**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$

♦ $x = 2$; $p = 112\cdot 2^{11} - 11\cdot 2^{14} = ...2$. $ax^m = bx^n + p$; Два корня будут при условии $ma = k\cdot m\cdot x^{m-1} + b$. Поэтому $x = \sqrt[n-m]{\dfrac{ma}{nb}}$; $p = ax^m - bx^n$.

25. Найдите значение параметра p, при котором уравнение $x^3 + \dfrac{162}{x^2} = px$ имеет ровно два различных корня, и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5. **[2939 r**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$

♦ $p = 15$; $x_{\max} = 3$. Целесообразно поделить левую и правую части уравнения на x. Если записать новое уравнение в виде $f(x) = g(x)$, то из условий задачи следует, что $f'(x) = g'(x)$. $\alpha x^3 + \dfrac{\beta}{x^2} = px$,
$x_{\max} = \left(\dfrac{3\beta}{2\alpha}\right)^{0,2}$; $p = \dfrac{5\beta}{2}\left(\dfrac{2\alpha}{3\beta}\right)^{0,6}$.

26. Ожидаемый доход дома моды (в у.е.) равен численно произведению *квадрата* числа манекенщиц на *куб* числа дизайнеров. Наем одной манекенщицы обходится 16 у.е., одного дизайнера 3 у. е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, то число, равное отношению числа манекенщиц x к числу дизайнеров y, удовлетворяет условию

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{x}{y} \in \Big(0;\ 0,2\Big)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{x}{y} \in \Big[0,2;\ 0,3\Big)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\dfrac{x}{y} \in \Big[0,3;\ 0,5\Big)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{x}{y} \in \Big[0,5;\ 0,8\Big)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\dfrac{x}{y} \in \Big[0,8;\ 999\Big)$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$

♦ $x : y = 1 : 8 = 0,125....$ Если $x^2 \cdot y^3 = z$, $f(x, y) = ax + by \Rightarrow \min$, то $g(x) = ax + b\sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}} \Rightarrow \min$. Пусть $t = \sqrt[3]{x}$; $g(t) = at^3 + b\sqrt[3]{z} \cdot t^{-2}$;
$\dfrac{dg}{dt} = 3at^2 - 2b\sqrt[3]{z} \cdot \dfrac{1}{t^3}$; $3at^2 - 2b\sqrt[3]{z} \cdot \dfrac{1}{t^3} = 0$; $3at^3 = 2b\sqrt[3]{z} \cdot \dfrac{1}{t^2}$;
$3ax = 2b\sqrt[3]{z} \cdot \dfrac{1}{t^2}$. Так как $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}}$; $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{t^6}}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{t^2}$; то
$3ax = 2by$. Поэтому $x : y = 2b : 3a$.