а.11.8. Домашнее задание–11 без ответов

17. ♦♦ B10 Элементы теории вероятностей

а.11.8.1. Кубики P-27

a11h–1-v5. Кубик P состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика P окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, выбранный наугад миникубик не окрашен.

a11h–2-v5. Кубик P состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика P окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашена ровно одна грань.

a11h–3-v5. Кубик P состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика P окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно две грани.

a11h–4-v5. Кубик P состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика P окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно три грани.

a11h–5-v5. Кубик P состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика P окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно четыре грани.

1. ♦♦ C2 Точки, плоскости и прямые в 6–призме

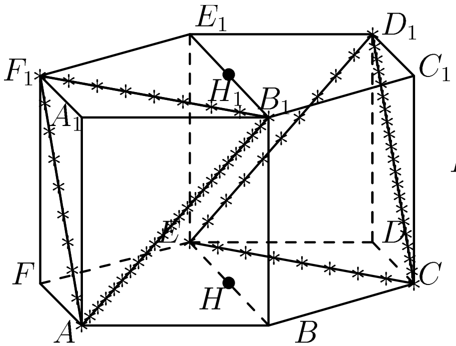
а.11.8.2. ♠ Расстояние между прямыми в 6–призме : для самостоятельного решения

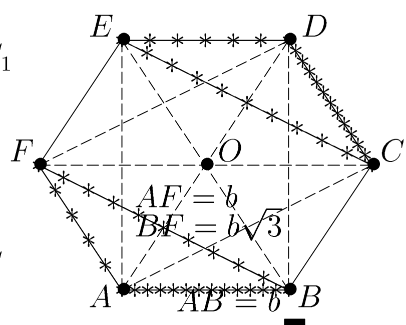
a11h–6-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания равно 3, высота равна 4. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.

а.11.8.3. ♠ Угол между прямыми в 6–призме: для самостоятельного решения

a11h–7-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания равно 1, высота

равна $\sqrt{2}$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.
(1) Найдите угол между прямой AB_1 и прямой CD_1, используя сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью AB_1F_1.
(2) Найдите угол между прямой AB_1 и прямой CD_1, используя сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью CD_1E.
(3) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1.
(4) **(e)** Найдите координаты точки $B_1(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$.
(f) Найдите координаты точки $A(A_x, A_y, A_z)$. **(g)** Найдите координаты вектора
$\overrightarrow{p} = A\vec{B}_1 = (B_{1x} - A_x, B_{1y} - A_y, B_{1z} - A_z) = (p_x, p_y, p_z)$.
(h) Найдите $||\overrightarrow{p}|| = \sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2}$.. **(9)** **(j)** Найдите координаты точки $D_1(D_{1x}, D_{1y}, D_{1z})$. **(k)** Найдите координаты точки $C(C_x, C_y, C_z)$. **(l)** Найдите координаты вектора
$\overrightarrow{q} = C\vec{D}_1 = (D_{1x} - C_x, D_{1y} - C_y, D_{1z} - C_z) = (q_x, q_y, q_z)$.
(m) Найдите $||\overrightarrow{q}|| = \sqrt{q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2}$.. **(14)** **(o)** Найдите $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z$. **(p)** Найдите
$\cos\angle\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\} = \frac{(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}{||\overrightarrow{p}||\cdot||\overrightarrow{q}||}$. **(q)** Найдите острый (или нулевой, или прямой, но не тупой) угол $\angle\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\}$.





■

а.11.8.4. ♠ Расстояние от точки до плоскости в 6-призме: для самостоятельного решения

a11h–8-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 4. Найдите оасстояние от точки D до плоскости AE_1F.

1. ♦♦ ПП

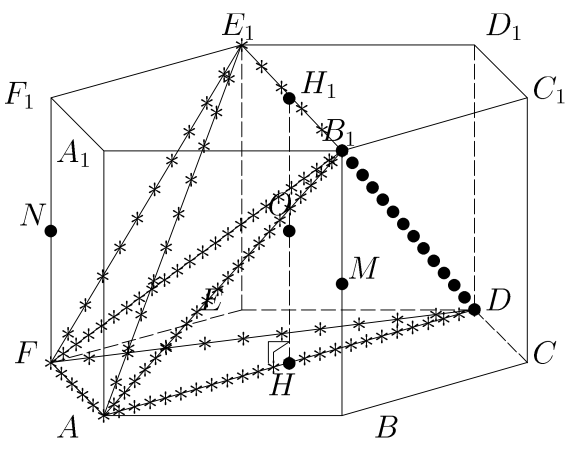
Найдите расстояние от точки до плоскости AB_1E_1F, используя плоский чертеж (после чертежа пирамиды).

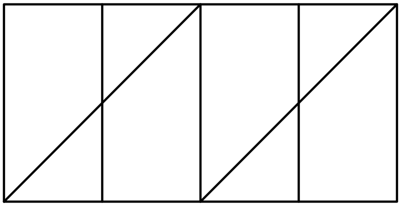
2. ♦♦ КВМ

(1) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1. **(2)** Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $F = \big(f_x, f_y, f_z\big)$. Запишите уравнение плоскости AE_1F в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(3)** Найдите координаты точки $D = \big(d_x, d_y, d_z\big)$. **(4)** Найдите расстояние от плоскости AE_1F, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки D, координаты которой равны (d_1, d_2, d_3), по формуле $\rho(AE_1F, D) = \frac{|Md_x+Nd_y+Kd_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

3. ♦♦ *SV*

Найдите расстояние от точки D до плоскости AE_1F, используя метод расчета обьема пирамиды. **(5)** Найдите площадь $\triangle\, ADF$. **(6)** Найдите $h\{B_1 : ADF\}$. **(7)** Найдите $V\{B_1 : ADF\}$. **(8)** Найдите площадь $\triangle\, AB_1F$ **(9)** Найдите $V\{D : AB_1F\}$. **(10)** Найдите $h\{D : AB_1F\}$.





■

a.11.8.5. ♠ Угол между прямой и плоскостью в 6-призме: для самостоятельного решения

a11h–9-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 4. Найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью AE_1F.

1. ♦♦ КВМ

(1) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1.
(2) Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $B_1 = \big(b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости AB_1E_1 в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(3)** Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. **(4)** Найдите расстояние от плоскости AB_1E_1, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки B, координаты которой равны (s_1, s_2, s_3), по формуле $\rho(AB_1E_1, B) = \frac{|Ms_x+Ns_y+Ks_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

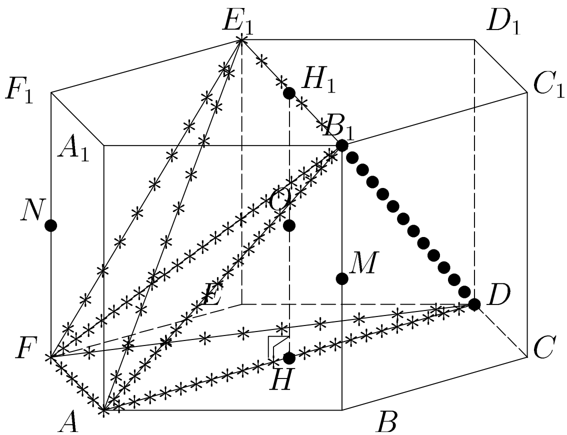
2. ♦♦ Альтернативный вариант использования КВМ

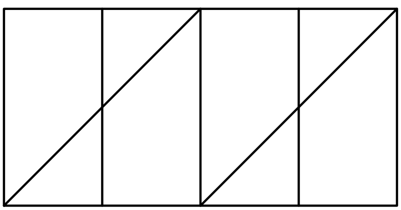
(5) Найдите координаты точки $E = \big(e_x, e_y, e_z\big)$. Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. Найдите координаты точки $D_1 = \big(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 1$ (если таковая не проходит через

начало координат) или в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 0$ (если таковая проходит через начало координат).
(6) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1.
(7) Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $B_1 = \big(b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости AB_1E_1 в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(8)** Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. **(9)** Найдите расстояние от плоскости AB_1E_1, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки B, координаты которой равны (s_1, s_2, s_3), по формуле $\rho(AB_1E_1, B) = \frac{|Ms_x+Ns_y+Ks_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

3. ♦♦ Еще альтернативный вариант использования КВМ
(10) Найдите координаты точки $E = \big(e_x, e_y, e_z\big)$. Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. Найдите координаты точки $D_1 = \big(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(11)** Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $Mx + Ny + Kz = L_1$ с теми же значениями M, N, K.

4. ♦♦ *SV*
Найдите расстояние от точки A до плоскости EBD_1, используя метод расчета обьема пирамиды. **(12)** Найдите площадь $\triangle\, ABE$. **(13)** Найдите $h\{D_1 : ABE\}$. **(14)** Найдите $V\{D_1 : ABE\}$. **(15)** Найдите площадь $\triangle\, EBD_1$ **(16)** Найдите $V\{A : EBD_1\}$. **(17)** Найдите $h\{A : EBD_1\}$.





■

5. ⧫⧫ С4 Окружности и треугольники, часть 1.

a11h–10-v5. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 6\sqrt{6}$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

a11h–11-v5. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причем CL – диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC, если $\sin\angle BAC = 0{,}25$.

a11h–12-v5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если $AC = b$, $\angle ABC = \beta$.

a11h–13-v5. В треугольнике ABC точка O - центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle LOA = 45°$, $LK = 8$, $AK = 7$.

a11h–14-v5. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую под углом $7°$, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $DC = 3$, $\angle DAC = 30°$. Найдите диаметр окружности.

a11h–15-v5. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как $2:1$, $\angle ADC = 120°$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

a11h–16-v5. В треугольнике ABC длины сторон $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, и $\angle B = 60°$. Биссектриса угла B продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка BD.

a11h–17-v5. В треугольнике ABC $\angle BAC = 75°$, $AB = c$, $AC = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30°$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найдите длину отрезка AN.

a11h–18-v5. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если $BD = 2$, $AB = 1$, $\angle ABD : \angle DBC = 4:3$.

a11h–19-v5. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите длину стороны AC.

6. ♦♦ С5 Квадратное уравнение с параметром в правой части

a11h–20-v5. При каком значении параметра p уравнение
$(\star)\ \ x^2 - 6|x+2| + 20 = p$
имеет хотя бы один корень?

a11h–21-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 6|x+2| + 20 = p$ имеет ровно три различных корня?

a11h–22-v5. При каких значениях параметра p уравнение $(\star\star)\ \ x - \frac{6|x+2|-20}{x} = \frac{p}{x}$ имеет ровно три различных корня?

a11h–23-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8|x-3| + 30 = p$ имеет единственный корень?

a11h–24-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8|x-3| + 30 = p$ имеет ровно три различных корня?

a11h–25-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x - \dfrac{8|x-3| - 30}{x} = \dfrac{p}{x}$ имеет ровно два различных корня?

a11h–26-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8||x| - 2| + 20 = p$ имеет ровно четыре различных корня?

7. ♦♦ С5 Множество значений линейной функции с модулем–1

a11h–27-v5. Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции $y = |x+p| + |x-p|$ меньше 6.

a11h–28-v5. Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции $y = 3|x| + 2|x-4| + p$ больше 15.

а.11.9. Домашнее задание–11 с ответами

8. ♦♦ B10 Элементы теории вероятностей

а.11.9.1. Кубики Р-27

a11h–1-v5. Кубик Р состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика Р окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, выбранный наугад миникубик не окрашен.

♦ $\frac{1}{27}$.

a11h–2-v5. Кубик Р состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика Р окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашена ровно одна грань.

♦ $\frac{6}{27}$.

a11h–3-v5. Кубик Р состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика Р окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно две грани.

♦ $\frac{12}{27}$.

a11h–4-v5. Кубик Р состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика Р окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно три грани.

♦ $\frac{8}{27}$.

a11h–5-v5. Кубик Р состоит из 27 одинаковых миникубиков (меньшего размера). Все грани кубика Р окрашены в разные цвета. Найдите вероятность того, у выбранного наугад миникубика окрашены ровно четыре грани.

♦ 0.

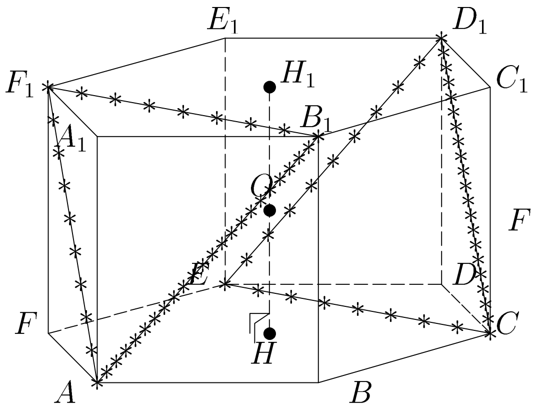
1. ♦♦ C2 Точки, плоскости и прямые в 6–призме

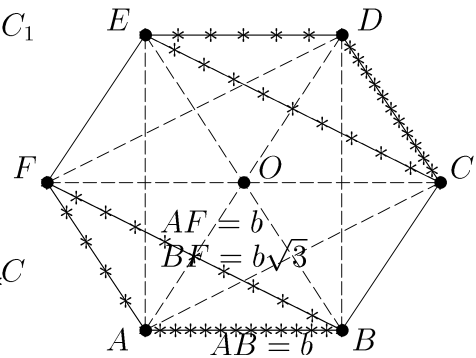
а.11.9.2. ♠ Расстояние между прямыми в 6–призме : для самостоятельного решения

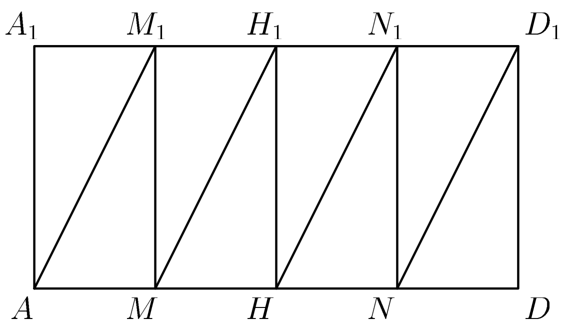
a11h–6-v5. [С2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания равно 3, высота равна 4. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.

♦ 7,2.

Решение.





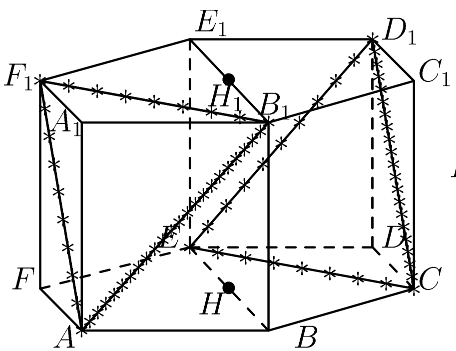


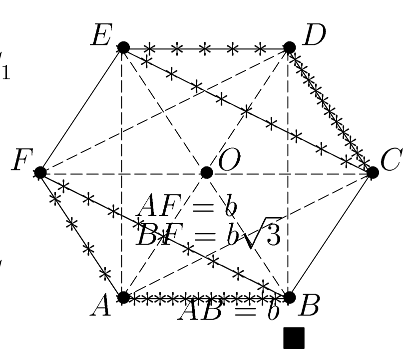
■

а.11.9.3. ♠ Угол между прямыми в 6–призме: для самостоятельного решения

a11h–7-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания равно 1, высота равна $\sqrt{2}$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.

♦ 60°. **(1)** Найдите угол между прямой AB_1 и прямой CD_1, используя сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью AB_1F_1. **(2)** Найдите угол между прямой AB_1 и прямой CD_1, используя сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью CD_1E. **(3)** Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1. **(4)** **(e)** Найдите координаты точки $B_1(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$. **(f)** Найдите координаты точки $A(A_x, A_y, A_z)$. **(g)** Найдите координаты вектора $\overrightarrow{p} = \vec{AB_1} = (B_{1x} - A_x, B_{1y} - A_y, B_{1z} - A_z) = (p_x, p_y, p_z)$. **(h)** Найдите $||\overrightarrow{p}|| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2}$.. **(9)** **(j)** Найдите координаты точки $D_1(D_{1x}, D_{1y}, D_{1z})$. **(k)** Найдите координаты точки $C(C_x, C_y, C_z)$. **(l)** Найдите координаты вектора $\overrightarrow{q} = \vec{CD_1} = (D_{1x} - C_x, D_{1y} - C_y, D_{1z} - C_z) = (q_x, q_y, q_z)$. **(m)** Найдите $||\overrightarrow{q}|| = \sqrt{{q_x}^2 + {q_y}^2 + {q_z}^2}$.. **(14)** **(o)** Найдите $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z$. **(p)** Найдите $\cos\angle\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\} = \frac{(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})}{||\overrightarrow{p}||\cdot||\overrightarrow{q}||}$. **(q)** Найдите острый (или нулевой, или прямой, но не тупой) угол $\angle\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}\}$.





■

а.11.9.4. ♠ Расстояние от точки до плоскости в 6-призме: для самостоятельного решения

a11h–8-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 4. Найдите оасстояние от точки D до плоскости AE_1F.

1. ♦♦ ПП

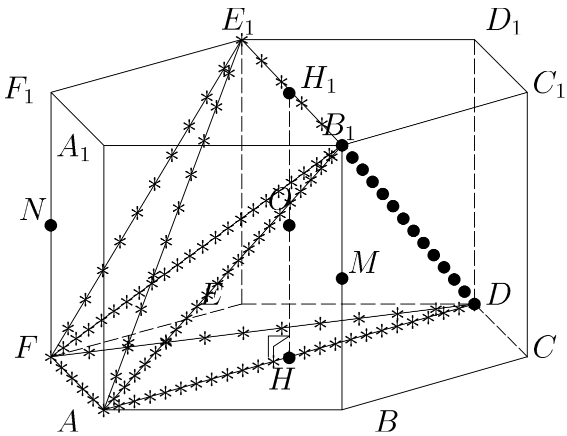
Найдите расстояние от точки до плоскости AB_1E_1F, используя плоский чертеж (после чертежа пирамиды).

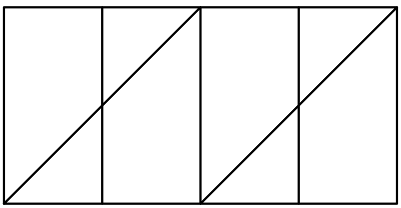
2. ♦♦ КВМ

(1) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1. **(2)** Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $F = \big(f_x, f_y, f_z\big)$. Запишите уравнение плоскости AE_1F в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(3)** Найдите координаты точки $D = \big(d_x, d_y, d_z\big)$. **(4)** Найдите расстояние от плоскости AE_1F, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки D, координаты которой равны (d_1, d_2, d_3), по формуле $\rho(AE_1F, D) = \frac{|Md_x+Nd_y+Kd_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

3. ♦♦ *SV*

Найдите расстояние от точки D до плоскости AE_1F, используя метод расчета обьема пирамиды. **(5)** Найдите площадь $\triangle\, ADF$. **(6)** Найдите $h\{B_1 : ADF\}$. **(7)** Найдите $V\{B_1 : ADF\}$. **(8)** Найдите площадь $\triangle\, AB_1F$ **(9)** Найдите $V\{D : AB_1F\}$. **(10)** Найдите $h\{D : AB_1F\}$.


E_1
D_1
F_1
H_1
C_1
B_1
A_1
N
O
M
E
D
F
C
H
A
B



■

а.11.9.5. ♠ Угол между прямой и плоскостью в 6-призме: для самостоятельного решения

a11h–9-v5. [C2**] В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 4. Найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью AE_1F.

1. ♦♦ КВМ

(1) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1.
(2) Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $B_1 = \big(b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости AB_1E_1 в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(3)** Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. **(4)** Найдите расстояние от плоскости AB_1E_1, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки B, координаты которой равны (s_1, s_2, s_3), по формуле $\rho(AB_1E_1, B) = \frac{|Ms_x+Ns_y+Ks_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

2. ♦♦ Альтернативный вариант использования КВМ

(5) Найдите координаты точки $E = \big(e_x, e_y, e_z\big)$. Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. Найдите координаты точки $D_1 = \big(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 0$ (если таковая проходит через начало координат).
(6) Нарисуйте декартову систему координат, начало O поместите в точку A, ось Ox направьте вдоль AB, ось Oy направьте вдоль AE, ось Oz направьте вдоль AA_1.
(7) Найдите координаты точки $A = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Найдите координаты точки $B_1 = \big(b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}\big)$. Найдите координаты точки $E_1 = \big(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости AB_1E_1 в виде $Mx + Ny + Kz = 1$ (если таковая не проходит через

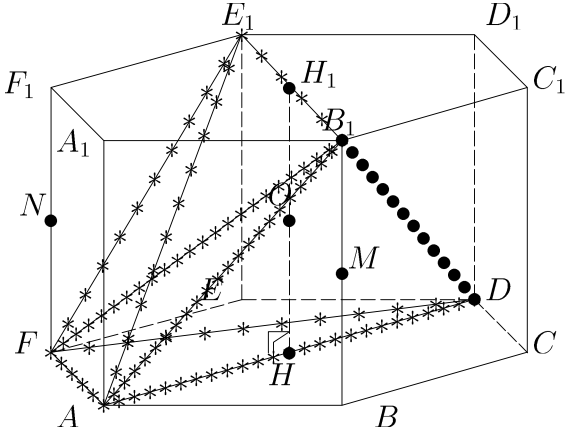
начало координат) или в виде $Mx + Ny + Kz = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(8)** Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. **(9)** Найдите расстояние от плоскости AB_1E_1, уравнение которой имеет вид $Mx + Ny + Kz = L$, до точки B, координаты которой равны (s_1, s_2, s_3), по формуле $\rho(AB_1E_1, B) = \frac{|Ms_x+Ns_y+Ks_z-L|}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}$.

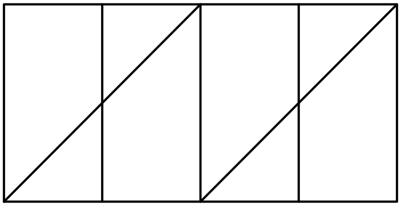
3. ♦♦ Еще альтернативный вариант использования КВМ

(10) Найдите координаты точки $E = \big(e_x, e_y, e_z\big)$. Найдите координаты точки $B = \big(b_x, b_y, b_z\big)$. Найдите координаты точки $D_1 = \big(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}\big)$. Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 1$ (если таковая не проходит через начало координат) или в виде $M_2x + N_2y + K_2z = 0$ (если таковая проходит через начало координат). **(11)** Запишите уравнение плоскости EBD_1 в виде $Mx + Ny + Kz = L_1$ с теми же значениями M, N, K.

4. ♦♦ *SV*

Найдите расстояние от точки A до плоскости EBD_1, используя метод расчета обьема пирамиды. **(12)** Найдите площадь $\triangle\, ABE$. **(13)** Найдите $h\{D_1 : ABE\}$. **(14)** Найдите $V\{D_1 : ABE\}$. **(15)** Найдите площадь $\triangle\, EBD_1$ **(16)** Найдите $V\{A : EBD_1\}$. **(17)** Найдите $h\{A : EBD_1\}$.





■

5. ⧫⧫ C4 Окружности и треугольники, часть 1.

a11h–10-v5. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 6\sqrt{6}$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

⧫ 12.

a11h–11-v5. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причем CL – диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC, если $\sin\angle BAC = 0{,}25$.

⧫ $\sqrt{15}$.

a11h–12-v5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если $AC = b$, $\angle ABC = \beta$.

⧫ $0{,}5b^2\cos^2\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

a11h–13-v5. В треугольнике ABC точка O - центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle LOA = 45°$, $LK = 8$, $AK = 7$.

⧫ $56\sqrt{2}$.

a11h–14-v5. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую под углом $7°$, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $DC = 3$, $\angle DAC = 30°$. Найдите диаметр окружности.

♦ $4\sqrt{3}\sin 7°$.

a11h–15-v5. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как $2:1$, $\angle ADC = 120°$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

♦ $7\sqrt{3}, 7\sqrt{3}, \sqrt{21}, 2\sqrt{21}$.

a11h–16-v5. В треугольнике ABC длины сторон $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, и $\angle B = 60°$. Биссектриса угла B продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка BD.

♦ $4\sqrt{3}$.

a11h–17-v5. В треугольнике ABC $\angle BAC = 75°$, $AB = c$, $AC = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30°$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найдите длину отрезка AN.

♦ $(\sqrt{3} - 1)(c + b/\sqrt{2})$.

a11h–18-v5. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если $BD = 2$, $AB = 1$, $\angle ABD : \angle DBC = 4 : 3$.

♦ $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$.

a11h–19-v5. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите длину стороны AC.

♦ 10.

6. ♦♦ C5 Квадратное уравнение с параметром в правой части

a11h–20-v5. При каком значении параметра p уравнение

($\star$) $x^2 - 6|x+2| + 20 = p$
имеет хотя бы один корень?

⧫ $p \in [-1; +\infty)$.

Решение.

(1) Рассмотрим уравнение $f(x) = p$, где $x \in X$, причем X – область определения функции $f(x)$, p – параметр.
Заметим, что

(1a) Пусть Y – множество значений функции $f(x)$ на множестве X. Если $p \in Y$, то найдется такое $x \in X$, что $f(x) = p$.

(1b) Если уравнение $f(x) = p$ имеет корень $x \in X$, то $p \in Y$.
Таким образом, уравнение $f(x) = p$ имеет по крайней мере один корень $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p \in Y$, т.е. значение параметра p принадлежит множеству значений функции $f(x)$ на множестве X. Заметим, что в этом случае уравнение может иметь и больше одного корня.

(2) Найдем множество значений функции $f(x) = x^2 - 6|x+2| + 20$ на всей числовой оси. Снимем модуль, т.е. запишем явное выражение для функции $f(x)$ без использования символа модуля. Заметим, что
$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0, \\ -x-2\,, & x+2 < 0. \end{cases}$ Поэтому

$$x^2 - 6\,|x+2| + 20 = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & x+2 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 32, & x+2 < 0. \end{cases}$$

(3) Вершина квадратного трехчлена $u(x) = x^2 - 6x + 8$ имеет координаты $x = 3; y = -1$. Так как значение переменной $x = 3$ принадлежит промежутку $x \in [-2; +\infty)$, то множество значений функции $y = u(x)$ на промежутке $x \in [-2; +\infty)$ совпадает с промежутком $Y_1 = [u(3);\ +\infty) = [-1;\ +\infty)$.

(4) Вершина квадратного трехчлена $v(x) = x^2 + 6x + 32$ имеет координаты $x = -3; y = 23$. Так как значение переменной $x = -3$ принадлежит промежутку $x \in (-\infty; -2)$, то множество значений функции $y = v(x)$ на промежутке $x \in (-\infty; -2)$ совпадает с промежутком $Y_2 = [v(-3); +\infty) = [23; +\infty)$.

(5) Множество значений функции $f(x) = x^2 - 6|x+2| + 20$ на всей числовой оси представляет собой объединение промежутков Y_1 и Y_2 и совпадает, таким образом, с промежутком $Y_1 = [-1; +\infty$. Это множество совпадает с искомым множеством значений параметра p. ■

a11h–21-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 6|x+2| + 20 = p$ имеет ровно три различных корня?

⧫ $p \in \{23; 24\}$.

Решение.

(1) Нарисуем график функции $f(x) = x^2 - 6|x+2| + 20$, используя уже установленные ее свойства, рис. 45. Дополнительно заметим, что уравнение $u(x) = v(x)$ имеет

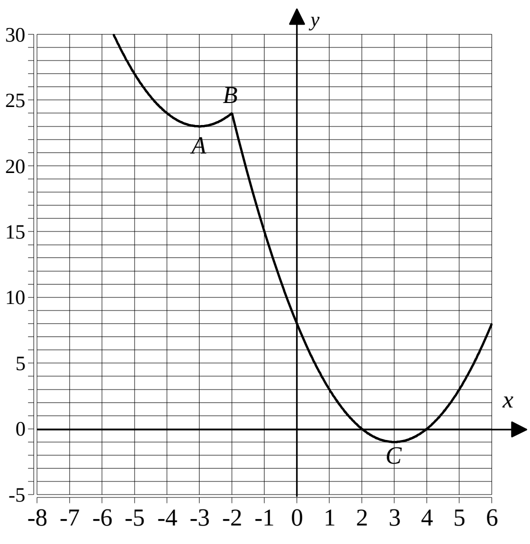


Рис. 39. |1831s1a|

единственный корень $x = -2$, причем $u(-2) = v(-2) = 24$. Если $p = 24$, то уравнение $u(x) = p$ имеет корни $\{-4; -2\}$, а уравнение $v(x) = p$ имеет корни $\{-2; 8\}$. Таким образом, уравнение $x^2 - 6\,|x+2| + 20 = p$

(1a) имеет ровно два различных корня при $p > 24$, причем $x_1 < -4$, $x_2 > 8$.

(1b) имеет ровно три различных корня при $p = 24$, причем $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 8$.

(1c) имеет ровно четыре различных корня при $p \in (23; 24)$, причем $x_1 \in (-4; -3)$, $x_2 \in (-3; -2)$, $x_3 \in (-2; 3)$, $x_4 \in (3; 8)$.

(1d) имеет ровно три различных корня при $p = 23$, причем $x_1 = -3$, $x_2 \in (-2; 3)$, $x_3 \in (3; 8)$.

(1e) имеет ровно два различных корня при $p \in (-1; 23)$, причем $x_1 \in (-2; 3)$, $x_2 \in (3; 8)$.

(1f) имеет единственный корень при $p = -1$, причем $x_1 = 3$.

(1g) не имеет корней при $p < -1$. ■

a11h–22-v5. При каких значениях параметра p уравнение $(\star\star)$ $x - \frac{6|x+2|-20}{x} = \frac{p}{x}$ имеет ровно три различных корня?

Решение. При $x \neq 0$ уравнение $(\star\star)$ равносильно уравнению $(\star)$. Про уравнение $(\star)$ мы уже все знаем, поэтому осталось найти и проанализировать те значения параметра p, при которых число $x = 0$ является корнем этого уравнения. Это можно сделать, вообще говоря, двумя способами.

(1) Можно найти корни уравнения $(\star)$ и каждый из них приравнять нулю. Получится совокупность уравнений относительно параметра, которую в принципе можно решить.

(2) Можно положить в уравнении $(\star)$ $x = 0$ и найти p. Это значительно проще, сразу получим $p = 8$. При этом значении $(\star)$ имеет два корня, а $(\star\star)$ – один корень. Ответ сформулируйте самостоятельно. ■

a11h–23-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8|x-3| + 30 = p$ имеет единственный корень?

♦ $p = -10$.

a11h–24-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8|x-3| + 30 = p$ имеет ровно три различных корня?

♦ $p \in \{38;\, 39\}$.

a11h–25-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x - \dfrac{8|x-3|-30}{x} = \dfrac{p}{x}$ имеет ровно два различных корня?

♦ $p \in (-10; 6) \cup (6; 38)\ (39; +\infty)$.

a11h–26-v5. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 8||x|-2| + 20 = p$ имеет ровно четыре различных корня?

♦ $p \in \{20;\ 24\}$.

7. ♦♦ С5 Множество значений линейной функции с модулем–1

a11h–27-v5. Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции $y = |x+p| + |x-p|$ меньше 6.

♦ $p \in (-3, -3)$.

a11h–28-v5. Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции $y = 3|x| + 2|x-4| + p$ больше 15.

♦ $p \in (7, +\infty)$.