Тема 7. Планиметрия, 1. Треугольники

7.1. Треугольник

7.1.1. Основные формулы

7.1.1.1. Основные обозначения

В приведенных ниже формулах используются следующие обозначения: a, b, c — длины сторон треугольника ABC, лежащие против углов A, B и C соответственно, p — половина периметра, $p = 0,5(a+b+c)$, h_a, h_b, h_c — высоты, m_a, m_b, m_c — медианы, l_a, l_b, l_c — биссектрисы, проведенные из вершин A, B и C соответственно (имеются в виду длины соответствующих отрезков), r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, S — площадь треугольника ABC.

7.1.1.2. Теорема синусов

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

7.1.1.3. Теорема косинусов

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
Если $b^2 + c^2 > a^2$, то угол A острый, если $b^2 + c^2 = a^2$, то угол A прямой, если $b^2 + c^2 < a^2$, то угол A тупой.

7.1.1.4. Площадь треугольника

Формулы для вычисления площади треугольника:
$S = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$, $S = \frac{bc\cdot\sin A}{2} = \frac{ab\cdot\sin C}{2} = \frac{ac\cdot\sin B}{2}$,
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = rp$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

7.1.1.5. Медианы треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется "центр тяжести" и делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Длина медианы m_a, проведенной к стороне $BC = a$, выражается формулой

$m_a = 0,5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$
(доказывается дополнением треугольника до параллелограмма). Длина стороны треугольника выражается через медианы формулой
$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$.

7.1.1.6. Биссектрисы треугольника

Биссетрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанного круга. Биссетриса делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Если AD — биссектриса угла BAC треугольника ABC, то $AB : AC = BD : CD$, или $c : b = c_1 : b_1$, c_1 и d_1 — отрезки стороны a, прилегающие к сторонам c и d. Длина биссектрисы выражается формулами
$AD = \sqrt{AB\cdot AC - BD\cdot CD}$, $l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$.
Длина биссектрисы выражается также формулой
$l_c = \sqrt{\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}}$.
Если a и b - две стороны треугольника, α - угол между ними и l_c - биссектриса этого угла, то
$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$.

7.1.1.7. Высоты треугольника

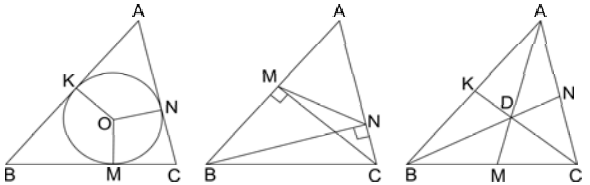
Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Имеет место соотношение
$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

7.1.1.8. Центр описанного круга

Центр описанного круга лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Если центр описанного круга лежит на стороне, то треугольник прямоугольный. Если центр лежит внутри треугольника, то треугольник остроугольный. Если центр лежит вне треугольника, то треугольник тупоугольный.

7.1.1.9. Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике a, b — катеты, c — гипотенуза, a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу. Теорема Пифагора:



(a) (b) (c)

Рис. 1.

$c^2 = a^2 + b^2$, формулы для площади: $S = \frac{ab}{2}$, $S = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Для радиуса вписанного круга и радиуса описанного круга можно использовать формулы
$r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$.
Для катетов и их проекций на гипотенузу верны равенства
$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$. $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

7.1.1.10. Равносторонний треугольник

Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

7.1.2. Медиана треугольника

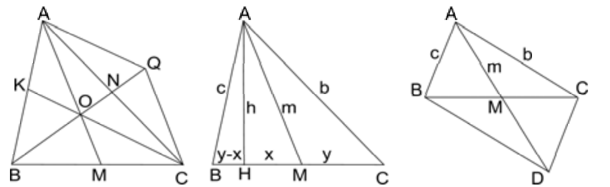
a02-1. Найдите медиану треугольника, проведенную к стороне длиной $\sqrt{116}$, если длины двух других сторон равны 7 и 9.
♦ 6.
Решение. Длина медианы равна $\frac{1}{2}\sqrt{2(49+81)-116} = 6$. ■
a02-2. В треугольнике ABC проведены медианы AM, BN, CK, пересекающиеся в точке D. Площадь четырехугольника $MDNC$ равна 12. Найдите площадь треугольника BAN.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 18 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 24 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 16
Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 18.

Решение. Докажем, что три медианы треугольника рассекают его на шесть равновеликих частей,

$S_{AKD} = S_{AND} = S_{BKD} = S_{BMD} = S_{CMD} = S_{CND} = \frac{S_{ABC}}{6}$.
Треугольники BDM и CDM (рис. 1c) имеют равные основания и равные высоты, поэтому их площади равны, то
$S_{BDM} = 2S_{CDM}$. Так как $BD = 2DN$, то $S_{BDC} = 2S_{CDN}$.
Следовательно, то $S_{BDM} = S_{CDN}$. Аналогично докажем, что все шесть треугольников равновелики. Следовательно,
$S_{BAN} = \frac{3}{2}S_{MDCN}$. ■
a02-3. Сумма квадратов длин медиан треугольника равна 144. Найдите сумму квадратов длин сторон этого треугольника.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 216 $\boxed{\mathbf{2}}$ 196 $\boxed{\mathbf{3}}$ 98 $\boxed{\mathbf{4}}$ 240 $\boxed{\mathbf{5}}$ 180
Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 196.

Решение. Возведем в квадрат каждую из формул для длины медианы, $m_a = 0,5\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, $m_b = 0,5\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, $m_c = 0,5\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, и сложим. Получится
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Поэтому
$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 196$. ■
a02-4. Площадь треугольника ABC равна 144. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 72 $\boxed{\mathbf{2}}$ 196 $\boxed{\mathbf{3}}$ 98 $\boxed{\mathbf{4}}$ 108 $\boxed{\mathbf{5}}$ 180
Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 108.

Решение. Продолжим медиану BN треугольника ABC (рис. 2a) через сторону AC на расстояние, равное одной третьей части длины этой медианы. Полученную точку обозначим Q. Так как $ON = NQ$ и $AN = NC$, то черырехугольник $OAQC$ — параллелограмм, поэтому $AQ = OC = \frac{2}{3}CK$, $OQ = \frac{2}{3}BN$, $AO\frac{2}{3}AM$, площадь AOQ равна $\frac{4}{9}$ площади искомого треугольника XYZ, стороны которого равны медианам AM, BN, CK. С другой стороны, $S_{AOQ} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.
Следовательно, $S_{XYZ} = \frac{3}{4}S_{ABC} = 108$. ■
a02-5. Дан треугольник ABC. Внутри этого треугольника найдется единственная точка D такая, что



(a) (b) (c)

Рис. 2.

$S_{ABD} = S_{BCD} = S_{ACD}$. Эта точка совпадает с точкой пересечения

1 высот **2** биссектрис **3** медиан

4 серединных перпендикуляров к сторонам

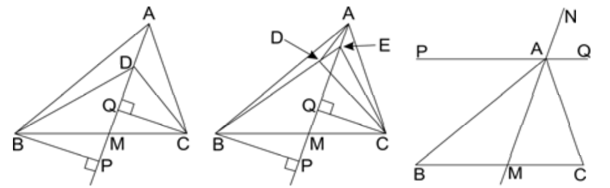
Ответ **3**♦ Это точка пересечения медиан.

Решение. Пусть на плоскости даны три точки A, B, C. Докажем, что множество всех точек плоскости D, лежащих внутри треугольника ABC, для которых $S_{ABD} = S_{ACD}$, совпадает медианой AM трреугольника ABC (рис. 3a). Сначала докажем, что все точки указанной медианы обладают нужным нам свойством. Возьмем произвольную точку $D \in AM$. Опустим перпендикуляры BP, CQ. Тогда прямоугольные треугольники BMP и CMQ равны (у них равные гипотенузы и острые углы). Поэтому высоты BP и CQ треугольников ABD и ACD равны. Эти треугольники имеют общее основание AD. Поэтому их площади равны. Пусть теперь точка D не лежит на AM (рис. 3b). Рассуждая аналогично, докажем, что $S_{ABE} = S_{ACE}$, $S_{ABD} < S_{ABE}$, $S_{ACD} > S_{ABE}$, поэтому $S_{ABD} \neq S_{ACD}$. ■

a02-6. Дан треугольник ABC. Сколько найдется на плоскости вне треугольника ABC точек D таких, что $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{ACD}$?

1 одна **2** две **3** три **4** четыре или больше четырех

5 ни одной



(a) (b) (c)

Рис. 3.

Ответ **3**♦ Три точки, каждая из которых находится на продолжении одной из медиан треугольника через сторону на расстояние, равное длине этой медианы.

Решение. Пусть на плоскости даны три точки A, B, C. Докажем, что множество всех точек плоскости D, для которых $S_{ABD} = S_{ACD}$, совпадает с обьединением двух прямых, одна из которых содержит медиану AM трреугольника ABC, из которой исключена точка A (рис. 3d), а другая прямая PQ проходит через точку A параллельно BC. Доказательство вполне аналогично тому, что было дано в предыдущей задаче. Теперь повторим эти рассуждения еще один раз для условия $S_{ABD} = S_{BCD}$, и выполним операцию пересечения получившихся множеств. Получим на плоскости всего четыре точки, одна из которых лежит внутри треугольника и совпадает с точкой пересечения медиан, а каждая из трех остальных расположена вне треугольника, и вместе с его вершинами образует набор четырех вершин параллелограмма. ■

a02-7. Дан треугольник ABC. Сколько найдется на плоскости вне треугольника ABC точек D таких, что $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{ACD}$?

1 одна **2** две **3** три **4** четыре или больше четырех

5 ни одной

Ответ $\boxed{3}$♦ Три точки, каждая из которых находится на продолжении одной из медиан треугольника через сторону на расстояние, равное длине этой медианы.

Решение. Пусть на плоскости даны три точки A, B, C. Докажем, что множество всех точек плоскости D, для которых $S_{ABD} = S_{ACD}$, совпадает с объединением двух прямых, одна из которых содержит медиану AM трреугольника ABC, из которой исключена точка A (рис. 3d), а другая прямая PQ проходит через точку A параллельно BC. Доказательство вполне аналогично тому, что было дано в предыдущей задаче. Теперь повторим эти рассуждения еще один раз для условия $S_{ABD} = S_{BCD}$, и выполним операцию пересечения получившихся множеств. Получим на плоскости всего четыре точки, одна из которых лежит внутри треугольника и совпадает с точкой пересечения медиан, а каждая из трех остальных расположена вне треугольника, и вместе с его вершинами образует набор четырех вершин параллелограмма. ■

a02-8. Две стороны треугольника равны b и c, длина медианы к третьей стороне равна m. Найдите высоту треугольника, проведенную к третьей стороне.

♦ $h = \sqrt{m^2 - \frac{(b^2+c^2)^2}{8(b^2+c^2-2m^2)}}$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC даны длины сторон $AC = b$, $AB = c$, и длина медианы $AM = m$, причем для определенности $b > c$ (рис. 2b). Опустим высоту AH из вершины A на сторону BC, и обозначим длины отрезков $MC = y$, $HM = x$, $BH = y - x$. Запишем теоремы Пифагора для трех прямоугольных треугольников, ABH, AMH, ACH, $h^2 + (y-x)^2 = c^2$, $h^2 + x^2 = m^2$, $h^2 + (y+x)^2 = b^2$. Вычитая уравнения попарно, исключим h, $y^2 + 2xy = b^2 - m^2$, $4xy = b^2 - c^2$. Следовательно, $y^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - m^2$ (эту формулу можно получить непосредственно из выражения для длины медианы m), $x = \frac{b^2-c^2}{4\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-m^2}}$, $h = \sqrt{m^2 - \frac{(b^2-c^2)^2}{8(b^2+c^2-2m^2)}}$. ■

a02-9. Две стороны треугольника равны 40 и 30, длина медианы к третьей стороне равна 25. Найдите высоту треугольника, проведенную к третьей стороне.

♦ $h = 24$.

Решение. Используем решение предыдущей задачи, длины отрезков $b = 40$, $c = 30$, $m = 25$, $h^2 + (y-x)^2 = 30^2$, $h^2 + x^2 = 25^2$, $h^2 + (y+x)^2 = 40^2$, $y^2 + 2xy = b^2 - m^2$, $4xy = 700$, $y^2 = 625$, $y = 25$, $x = 7$, $h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. ■

a02-10. Найдите меньшую медиану треугольника, если длины двух сторон равны 5 и 8, а угол между этими сторонами равен 120°.

$\boxed{1}$ 1,5 $\boxed{2}$ 3,5 $\boxed{3}$ 4 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{5}$ 2,5

Ответ $\boxed{2}$♦ 3,5.

Решение. Продолжим медиану AM треугольника ABC за сторону BC на расстояние, равное ее длине, рис. 2c. Полученную точку обозначим D, $AB = c = 5$, $AC = b = 8$, $\angle BAC = \alpha = 120°$. Тогда $ABDC$ — параллелограмм, причем $BD = d$, $\angle ABD = 180° - \angle BAC$. По теореме косинусов $4m^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(180° - \alpha)$. ■

7.1.3. Биссектриса треугольника

a02-1. Длины сторон треугольника равны 20, 15, 7. Найдите длину большего из отрезков, на которые рассекает меньшую сторону точка основания биссектрисы.

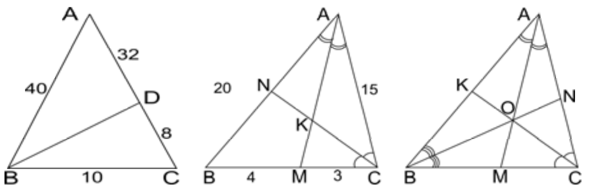
$\boxed{1}$ 4 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 4,5 $\boxed{4}$ $\sqrt{20}$ $\boxed{5}$ $\sqrt{18}$

Ответ $\boxed{1}$♦ 4.

Решение. Пусть вершины треугольника обозначены буквами A, B, C, меньшая сторона $BC = 7$, рис. 4b, $BM = x$, $MC = y$. Тогда $x + y = 7$, $x : y = 20 : 15$, поэтому $x = 4$, $y = 3$. ■

a02-2. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 10, длина боковой стороны равна 40. Найдите длину биссектрисы угла при основании треугольника.

$\boxed{1}$ 8 $\boxed{2}$ 10 $\boxed{3}$ 11,5 $\boxed{4}$ 15 $\boxed{5}$ 12



(a) (b) (c)

Рис. 4.

Ответ $\boxed{5}$♦ 12.

Решение. Биссектриса угла при основании рассечет боковую сторону на отрезки, отношение длин которых равно $4:1$, сумма длин которых равна 40, рис. 4a. Поэтому длины этих отрезков равны 8 и 32. Длина биссектрисы равна $\sqrt{10\cdot 40-8\cdot 32}=12$. ■

a02-3. Длины сторон треугольника ABC равны 7, 15 и 20. Найдите меньшую из двух площадей треугольников, на которые треугольник ABC делится биссектрисой своего меньшнего внутреннего угла.

$\boxed{1}$ 16 $\boxed{2}$ 24 $\boxed{3}$ 21 $\boxed{4}$ 28 $\boxed{5}$ 18

Ответ $\boxed{5}$♦ 18.

Решение. Найдем площадь по формуле Герона, $p=21$, $S=\sqrt{21\cdot 14\cdot 6\cdot 1}=42$. Меньший угол расположен между двумя большими сторонами (в этом можно убедиться с помощью теоремы косинусов), биссектриса меньшего угла делит сторону $a=7$ на отрезки, длины которых относятся как $15:20=3:4$. Сумма длин этих отрезков равна 7, поэтому длины этих отрезков равны 3 и 4. Площади двух треугольников, на которые эта биссектриса рассекает треугольник, также относятся как $3:4$. Поэтому площади равны 18 и 24. ■

a02-4. Длины сторон треугольника ABC равны 7, 15 и 20. Из двух треугольников, на которые треугольник ABC делится биссектрисой своего меньшнего внутреннего угла, выбран треугольник, имеющий меньшую площадь. Этот треугольник рассекается своей биссектрисой, которая также является и биссектрисой внутреннего угла треугольника ABC, на два треугольника. Найдите меньшую из площадей этих двух треугольников.

$\boxed{1}$ 15 $\boxed{2}$ 8 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

Ответ $\boxed{3}$♦ 3.

Решение. Действуя так же, как в предыдущей задаче, найдем меньшую из двух площадей, на которые рассекает треугольник ABC биссектриса его меньшего внутреннего угла, рис. 4b. Это треугольник AMC и его площадь равна 18. Биссектриса CN рассекает трекгольник AMC на треугольники CMK и CAK, площади которых относятся, как длины прилежащих сторон, т.е. как $3:15$. ■

a02-5. В треугольнике даны длины сторон $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B (считая от вершины треугольника).

♦ $(a+c):b$.

Решение. Используя свойство биссектрисы, найдем длины отрезков, на которые биссектрисы рассекут противолежащие стороны, рис. 4c,
$BM=\frac{ac}{b+c}$, $MC=\frac{ab}{b+c}$, $(\star)$ $AN=\frac{bc}{a+c}$, $NC=\frac{ba}{a+c}$, $AK=\frac{cb}{a+b}$, $KB=\frac{ca}{a+b}$. Мы должны найти отношение $BO:ON$. Так как отрезок AO является также биссектрисой треугольника AON, то $BO:ON=BA:AN$. Подставляя $(\star)$, получим ответ. ■

a02-6. В треугольнике даны длины сторон $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников BOK и AON.

♦ $a(a+c):b(a+b)$.

Решение. Используем результаты решения предыдущей задачи. Будем считать, что в указанных в условии треугольниках основанриями являются отрезки BK и AN, а из общая вершина — точка O. Так как прямая, содержащая биссектрису AM, совпадает со множеством точек, равноудаленных от прямых BA и AC, то указанные в условии задачи треугольники имеют равные высоты. Поэтому их площади относятся как длины оснований,
$S_{BOK} : SAON = BK : AN = \frac{ca}{a+b} : \frac{bc}{a+c} = \frac{a(a+c)}{b(a+b)}$. ■

a02-7. Длины сторон треугольника ABC равны $AB = 20$, $BC = 7$, и $AC = 15$. Найдите (считая от точки A) отношение отрезков, на которые биссектриса AM рассекается центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

♦ 5 : 1.

Решение. Треугольник с такими длинами сторон нам уже встречался, длины отрезков стороны $BC = 7$, $BM = 4,\ MC = 3$. Заметим, что центр вписанного круга совпадает с точкой пересечения биссектрис и применим основное свойство биссектрисы, $AO : OM = AC : MC = 15 : 3$. ■

a02-8. Длины сторон треугольника равны 7, 15, 20. Найдите площадь треугольника, вершины которого совпадают с основаниями биссектрис данного треугольника.

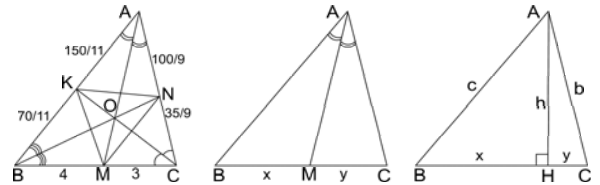
Решение. Соединим основания биссектрис, рис. 5a. Найдем площади треугольников BKM, AKN, CMN, ... ■

a02-9. Длины двух сторон треугольника относятся как $m : n$, причем $m > n$. Биссектриса угла между ними делит площадь треугольника в отношении

$\boxed{1}$ $(m+n) : (m-n)$ $\boxed{2}$ $\sqrt{m} : \sqrt{n}$ $\boxed{3}$ $m : n$ $\boxed{4}$ $m^2 : n^2$ $\boxed{5}$ 1 : 1

Ответ $\boxed{3}$♦ $m : n$.

Решение. Третья сторона треугольника делится основанием биссектрисы в отношении $m : n$, при этом образуются два треугольника с равными высотами, площади которых относятся как длины их оснований. ■



(a) (b) (c)

Рис. 5.

a02-10. Два острых угла треугольника равны $\arccos\frac{4}{5}$ и $\arccos\frac{5}{13}$. Биссектриса третьего угла делит площадь треугольника в отношении

$\boxed{1}$ 52 : 25 $\boxed{2}$ $\sqrt{52} : 5$ $\boxed{3}$ 13 : 20 $\boxed{4}$ 4 : 13 $\boxed{5}$ 10 : 17

Ответ $\boxed{3}$♦ 13 : 20.

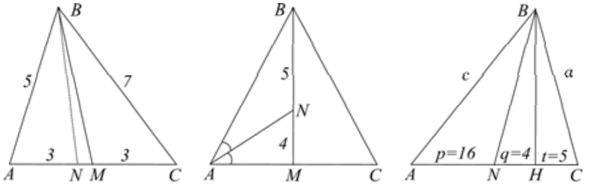
Решение. Пусть (рис. 5b) $\angle B = \arccos\frac{5}{13} = \arcsin\frac{12}{13}$, $\angle C = \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$, AM — биссектриса, $AM = l$. Тогда $S_{ABM} : S_{ACM} = BM : MC = x : y$, $x : \sin\angle BAM = l : \sin\angle ABC$, $y : \sin\angle CAM = l : \sin\angle ACB$, $\angle BAM = \angle CAM$, $x : y = \sin\angle ACB : \sin\angle ABC$, $x : y = \frac{3}{5} : \frac{12}{13} = \frac{13}{20}$. ■

a02-11. В треугольнике ABC длины сторон $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$, проведены биссектриса BN и медиана BM, причем $N \in AC$ и $M \in AC$. Найдите длину отрезка NM и укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $MN \in (0;\ 0,25]$ $\boxed{2}$ $MN \in (0,25;\ 0,5]$ $\boxed{3}$ $MN \in (0,5;\ 0,75]$ $\boxed{4}$ $MN \in (0,75;\ 1,25]$ $\boxed{5}$ $MN \in (1,25;\ 999)$

Ответ $\boxed{2}$♦ $MN = 1/2$.

Решение. Заметим, что $AN : NC = AB : BC = 6 : 7$, $AN + NC = 5$, поэтому $AN = \frac{6\cdot 5}{5+7} = 2{,}5$, $AM = 3$, $MN = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$ (рис. 6a). Задачу легко решить и в общем виде, $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$, $MN = \left|\frac{b}{2} - \frac{bc}{a+c}\right| = \frac{b}{2}\cdot\frac{|a-c|}{a+c}$. ■



(a) (b) (c)

Рис. 6.

а02-12. Если биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника рассекает высоту на части, равные 4 и 5, то длина основания равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ Основание равно 24.

Решение. Заметим, что (рис. 6b) так как $AB > AM$, то нижний отрезок высоты MN меньше верхнего BN, $MN : BN = AM : AB = 4 : 5$. Если отрезки высоты $BN = m$ и $MN = n$, $m > n$, то найдется такое число x, что длина боковой стороны $AB = mx$, половина длины основания $AM = nx$, теорема Пифагора для $\triangle ABM$ дает $m^2x^2 = n^2x^2 + (m+n)^2$, $(m^2 - n^2)x^2 = (m+n)^2$, $(m-n)x^2 = m+n$, $x = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, длина основания равна $2nx = 2n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, длина боковой стороны равна $mx = m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. ■

а02-13. В треугольнике ABC проведены биссектриса BN и высота BH, причем $N \in AC$ и $H \in AC$, длины отрезков $AN = 16$, $NH = 3$, $HC = 5$. При этих условиях квадрат высоты BH равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{2}$♦ $h^2 = 87$.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 6c) биссектриса BN, высота $BH = h$, обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AM = p$, $MN = q$, $NC = t$. Теорема Пифагора для $\triangle ABM$ и $\triangle BCN$ дает $(\star)$ $c^2 = (p+q)^2 + h^2$, $(\star\star)$ $a^2 = t^2 + h^2$. В соответствии с основным свойством высоты, $(\star\star\star)$ $c : a = p : (q+t)$. После исключения a и c из системы $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ получим $h^2 = \frac{(p+q)^2(q+t)^2 - p^2t^2}{p^2 - (q+t)^2}$. Предоставляем читателю подставить числовые значения самостоятельно. ■

7.1.4. Высота треугольника

а02-1. Найдите расстояние между основаниями высот, опущенных на стороны треугольника, длины которых равны a и b, а угол между этими сторонами равен α.

♦ $\cos\alpha\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 1b) известны длины сторон, $AC = b$, $AB = c$, и угол $\angle A = \alpha$. Проведем высоты BM и CN. Тогда $AN = b\cos\alpha$, $AM = c\cos\alpha$, по теореме косинусов $MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cdot \cos\alpha$. Подставим выражения для длин отрезков AN и AM, $MN^2 = \cos^2\alpha(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)$. Осталось извлечь корень квадратный из этого выражения. ■

а02-2. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение. Заметим, что $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$. Далее применим теорему Пифагора. ■

а02-3. Стороны треугольника равны $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$, AH — высота, $H \in BC$. Найдите $BH : HC$.

$\boxed{1}$ 3 : 11 $\boxed{2}$ 11 : 21 $\boxed{3}$ 7 : 13 $\boxed{4}$ 5 : 11 $\boxed{5}$ 6 : 7

Ответ $\boxed{2}$♦ 11 : 21.

Решение. Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BH = x$, $CH = y$, $x + y = a$ (рис. 5c). Применим теорему Пифагора к треугольникам $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$, $h^2 + x^2 = c^2$, $h^2 + y^2 = b^2$, $x + y = a$,

$x^2-y^2=c^2-b^2$, $(x-y)(x+y)=c^2-b^2$, $a(x-y)=c^2-b^2$,
$x-y=\frac{c^2-b^2}{a}$, $x=\frac{a}{2}+\frac{c^2-b^2}{2a}$, $y=\frac{a}{2}-\frac{c^2-b^2}{2a}$,
$x:y=a^2+c^2-b^2:a^2+b^2-c^2$,
$x:y=(16+4-9):(16+9-4)=11:21$. ■

a02-4. Длина высоты h треугольника со сторонами 26, 40, 42, опущенной на сторону длиной 42, находится в пределах

$\boxed{1}$ (8; 22] $\boxed{2}$ (22; 23] $\boxed{3}$ (23; 24] $\boxed{4}$ (24; 25] $\boxed{5}$ (25; 26)

Ответ $\boxed{3}$♦ $h=24$.

Решение 1. Запишем теорему Пифагора дважды, для треугольников ABH, ACH (рис. 5c), получим $42=\sqrt{26^2-h^2}+\sqrt{40^2-h^2}$. Решить это простое иррациональное уравнение предоставляем читателю. Лучше всего перенести меньший по величине из корней в левую часть и возвести в квадрат (при этом обеспечена эквивадентность преобразования). ■

Решение 2. Найдем площадь по формуле Герона, $S=\sqrt{54\cdot 28\cdot 14\cdot 12}=42\cdot 12$. Высоту теперь найдем по формуле для площади через основание и высоту, $\frac{1}{2}h\cdot 42=42\cdot 12$, $h=24$. ■

7.1.5. Высота, биссетриса, медиана

a02-1. В треугольнике длина основания равна 28, а длина высоты и длина медианы, проведенные к этому основанию, равны 12 и 13. Длина меньшей боковой стороны равна

$\boxed{1}$ 12 $\boxed{2}$ 15 $\boxed{3}$ 18 $\boxed{4}$ 24 $\boxed{5}$ 16

Ответ $\boxed{2}$♦ 15.

Решение. Ход решения показан на рис. 7a, H — основание высоты, M — основание медианы. Нам известно, что $AH=12$, $AM=13$, $BM=MC=14$. По теореме Пифагора найдем $HM=5$, затем $BH=14-5=9$, $AB=\sqrt{9^2+12^2}=15$, $HC=14+5=19$, $AC=\sqrt{12^2+19^2}>15$, меньшая боковая сторона равна 15. ■

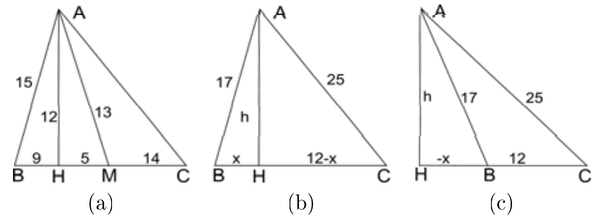


Рис. 7.

a02-2. В треугольнике ABC длины сторон $AB=26$, $BC=30$, $AC=28$. Найдите площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

♦ 36.

Решение. Обозначим длины отрезков, на которые высота рассекает основание AC, x (прилежащий стороне $AB=26$) и $28-x$. Тогда $26^2-x^2=30^2-(28-x)^2$, $56x=26^2+28^2-30^2$, $x=10$, поэтому высота $h=\sqrt{26^2-10^2}=24$. Биссектриса, проведенная из вершины B к стороне AC, делит эту сторону на отрезки, равные $28\frac{26}{26+30}=13$ (прилежит стороне $AB=26$) и $28-13=15$. Искомый треугольник имеет основание $13-10=3$ и высоту 24. ■

a02-3. Стороны треугольника ABC равны $AB=17$, $BC=12$, $AC=25$. Найдите длину высоты, опущенной на сторону BC (или ее продолжение).

$\boxed{1}$ 13 $\boxed{2}$ 14 $\boxed{3}$ 15 $\boxed{4}$ 16 $\boxed{5}$ 17

Ответ $\boxed{3}$♦ 15.

Решение 1. Пусть AH — высота, опущенная на сторону BC из вершины A (рис. 7b). Запишем два раза теорему Пифагора, $x^2+h^2=17^2$, $(12-x)^2+h^2=25^2$, и вычтем первое уравнение из второго, $(12-x)^2-x^2=(25-17)(25+17)$, $12^2-24x=8\cdot 42$, $24x=24(6-14)$, $x=-8$. Отрицательное значение x

показывает, что на самом деле основание высоты расположено на продолжении стороны BC, рис. 7c. Теперь найдем длину высоты, $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. ■

Решение 2. Вычислим площадь треугольника ABC, используя теорему Герона, $p = 27$, $S = \sqrt{27 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 2} = 90$, поэтому длина высоты AH равна $h = \frac{90}{6} = 15$. ■

a02-4. Стороны треугольника ABC равны $AB = 17$, $BC = 12$, $AC = 25$. Найдите расстояние между основаниями высоты и медианы, проведенными из вершины A к стороне BC (или ее продолжению).

$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ 14

Ответ $\boxed{2}$♦ 14.

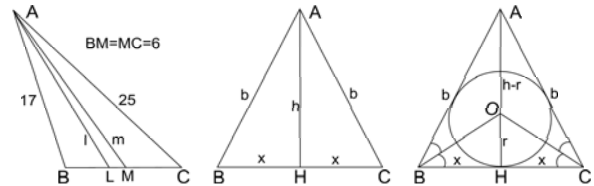
Решение. Используем результаты предыдущей задачи, рис. 7c. Искомое расстояние равно $8 + 6 = 12$. Если не заметить, что основание высоты расположено на продолжении основания, то получится неверный ответ $d = 2$. Особенно легко ошибиться, если найти длину высоты по формуле Герона, а один из отрезков основания — по теореме Пифагора, которая позволит вычислить только квадрат искомого отрезка. ■

a02-5. Стороны треугольника ABC равны $AB = 17$, $BC = 12$, $AC = 25$. Найдите расстояние между основаниями биссектрисы и медианы, проведенными из вершины A к стороне BC.

$\boxed{1}$ $\frac{6}{7}$ $\boxed{2}$ $\frac{8}{7}$ $\boxed{3}$ 1 $\boxed{4}$ $\frac{15}{7}$ $\boxed{5}$ $\frac{13}{7}$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\frac{8}{7}$.

Решение. Основания медианы BM и биссектрисы BL расположены на стороне BC, рис. 8a. Длина отрезка BM равна 6, точка L делит отрезок BC в отношении $17 : 25$, считая от точки B. Используем основное свойство биссектрисы, в сроответствии с которым ее основание делит противолежащую сторону на отрезки, длины которых относятся как длины прилежащих сторон, $BL = \frac{12 \cdot 17}{17+25} = 4\frac{6}{7}$. Искомое расстояние равно $6 - 4 - \frac{6}{7}$. ■



(a) (b) (c)

Рис. 8.

7.1.6. Площадь треугольника

a02-1. В треугольнике ABC длина стороны $AC = 11$, углы $\angle A = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\angle C = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Площадь треугольника ABC равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{2}$♦ $S = 22$.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 9a) проведем высоту $BH = h$. Обозначим $AH = p, HC = q$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Тогда $p = h \operatorname{ctg}\alpha$, $q = h \operatorname{ctg}\gamma$, $p + q = b$, $h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) = b$, $S = \frac{hb}{2} = \frac{b^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)}$, $S = \frac{b^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma}{2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)}$. $S = \frac{121}{2(\frac{3}{4}+2)} = 22$. ■

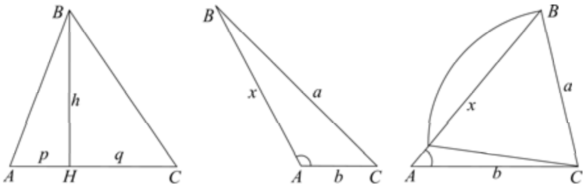
a02-2. В треугольнике длина основания равна 6, а величины углов, прилежащих к основанию, равны 60° и 45°. Найдите величину площади треугольника.

$\boxed{1}$ $9\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ $\boxed{2}$ $9(\sqrt{3} - 1)$ $\boxed{3}$ $6\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ $\boxed{4}$ $6(\sqrt{3} - 1)$ $\boxed{5}$ $3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

Ответ $\boxed{1}$♦ $9\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$.

Решение. Пусть (рис. 9a) высота $BH = h$, $AH = p, HC = q$, $AC = 6$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. Тогда $p = h$, $q = h\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p + q = 6$, $h(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 6$, $h = \frac{6}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $S = \frac{18}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $S = \frac{18\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $S = 9\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$.

■



(a) (b) (c)

Рис. 9.

a02-3. Прямая делит каждую из двух боковых сторон треугольника ABC в отношении $7:3$, считая от их общей вершины A, при этом образуются треугольник AMN и четырехугольник $MNCB$. Площадь треугольника AMN относится к площади четырехугольника $MNCB$ как

$\boxed{\mathbf{1}}$ $49:51$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $7:3$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $49:9$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $49:100$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $7:10$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $49:51$.

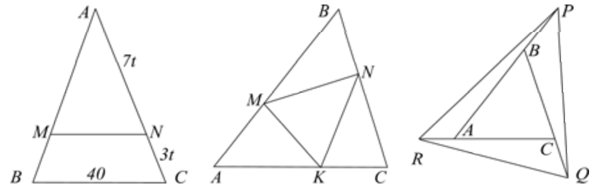
Решение. Треугольники (рис. 10a) AMN и ABC подобны, так как их имеют равный угол и соответственные стороны пропорциональны. Поэтому $S_{AMN}=\frac{7^2}{(7+3)^2}S_{ABC}$, $S_{MNBC}=S_{ABC}-S_{AMN}=\frac{51}{100}S_{ABC}$, $S_{ABC}:S_{MNBC}=\frac{49}{51}$. ■

a02-4. Площадь треугольника ABC равна 100. На стороне AB взята точка M, причем $AM:AB=4:10$. На стороне BC взята точка N, причем $BN:BC=6:10$. На стороне CA взята точка K, причем $CK:CA=7:10$. Площадь треугольника MNK равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $S_{MNK}=24$.

Решение. Пусть (рис. 10b) $AM:AB=p$, $BN:BC=q$, $CK:CA=r$, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Тогда $AM=pc$,



(a) (b) (c)

Рис. 10.

$MB=(1-p)c$, $BN=qa$, $NC=(1-q)a$, $CK=rb$, $KA=(1-r)b$, $S_{AMK}=p(1-r)S_{ABC}$, $S_{BMN}=q(1-p)S_{ABC}$, $S_{CNK}=r(1-q)S_{ABC}$,
$S_{MNK}=S_{ABC}-[p(1-r)+q(1-p)+r(1-q)]S_{ABC}$,
$S_{MNK}=\big(1-p(1-r)-q(1-p)-r(1-q)\big)S_{ABC}$. Для указанных числовых данных $S_{MNK}=0{,}24S_{ABC}$. ■

a02-5. Точка P находится на продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B, $BP=2\cdot AB$. Точка Q находится на продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C, $CQ=2\cdot BC$. Точка R находится на продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A, $AR=4\cdot AC$. Отношение площадей треугольников $S_{PQR}:S_{ABC}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $\frac{S_{BMN}}{S_{ACN}}=29$.

Решение. Пусть (рис. 10c) $BP=m\cdot AB$, $CQ=n\cdot BC$, $AR=k\cdot AC$. Тогда $S_{APR}=k(1+m)S_{ABC}$, $S_{BPQ}=m(1+n)S_{ABC}$, $S_{CNK}=n(1+k)S_{ABC}$, $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=1+m+n+k+mn+nk+km$. ■

a02-6. Точка M находится на продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B, $BM=4\cdot AB$. Точка N находится на продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C, $CN = \frac{4}{9}\cdot BC$. Отношение площадей $\frac{S_{BMN}}{S_{ACN}}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3**♦ остаток 3; $\frac{S_{BMN}}{S_{ACN}} = 13$.

Решение. Аналогично, $BM = \alpha\cdot AB$, $CN = \beta\cdot BC$, $\frac{S_{BMN}}{S_{ACN}} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta}$. ■

7.2. Теоремы синусов и косинусов

a02-7. В треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 5$, $BC = \sqrt{58}$ и угол $\angle A = \arccos(-0,8)$. Найдите длину стороны AB и укажите верное утверждение.

1 $AB \in (0;\ 2]$ **2** $AB \in (2;\ 2,5]$ **3** $AB \in (2,5;\ 3]$
4 $AB \in (3;\ 3,5]$ **5** $AB \in (3,5;\ 999)$

Ответ **3**♦ $AB = 3$.

Решение. Используем теорему косинусов для угла A треугольника ABC, в котором обозначим $AB = x$ (рис. 9b), $a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\angle A$, $x^2 - 2bx\cos\angle A + b^2 - a^2 = 0$, $x^2 + 8x - 33 = 0$, корень $x_1 = -11$ не годится, корень $x_2 = 3$ единственное решение. ■

a02-8. В треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 5$, $BC = \sqrt{13}$ и угол $\angle A = \arccos(0,8)$. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение длины стороны AB и укажите верное утверждение.

1 $AB \in (0;\ 2]$ **2** $AB \in (2;\ 2,5]$ **3** $AB \in (2,5;\ 3]$
4 $AB \in (3;\ 3,5]$ **5** $AB \in (3,5;\ 999)$

Ответ **1**♦ $AB = 2$.

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче (рис. 9c), получим квадратное уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$, оба корня которого $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ не противоречат ни одному из условий задачи. В соответствии с условием, выберем из них меньший корень. ■

a02-9. В треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 17$, $BC = 8$ и угол $\angle A = \arccos\frac{15}{17}$. Найдите значение длины стороны AB и укажите верное утверждение.

1 $AB \in (0;\ 12]$ **2** $AB \in (12;\ 14]$ **3** $AB \in (14;\ 16]$
4 $AB \in (16;\ 18]$ **5** $AB \in (18;\ 999)$

Ответ **3**♦ $AB = 15$.

Решение. В данном случае получим квадратное уравнение $x^2 - 30x + 225 = 0$, имеющее единственный корень $x = 15$. Это означает, что треугольник с указанными в условиях задачи параметрами — прямоугольный. ■

a02-10. Если длина стороны треугольника составляет 60% длины радиуса описанной около этого треугольника окружности, то синус противолежащего угла треугольника равен

1 $0,6$ **2** $0,5$ **3** $0,4$ **4** $0,3$ **5** $0,2$

Ответ **4**♦ $\sin\angle A = 0,3$.

Решение. По условию, длина стороны a и радиус описанного круга R связаны соотношением $a = 0{,}6R$. В соответствии с теоремой синусов, $a : \sin\angle A = 2R$, поэтому $2R\sin\angle A = 0{,}6R$, $\sin\angle A = 0{,}3$. ■

a02-11. В треугольнике длина основания равна 6, а величины углов, прилежащих к основанию, равны 60° и 45°. Найдите длину меньшей стороны.

1 $3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$ **2** $9(\sqrt{3}-1)$ **3** $6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ **4** $6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
5 $6(\sqrt{3}-1)$

Ответ **5**♦ $6(\sqrt{3}-1)$.

Решение. Угол, противолежащий основанию, равен 75°. В соответствии с теоремой синусов, $\frac{6}{\sin 75^\circ} = \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$, поэтому боковые стороны равны $a = \frac{6\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 6(\sqrt{3}-1)$, $b = \frac{6\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$. Меньшая сторона остроугольного треугольникалежит против меньшего острого угла, поэтому меньшей будет сторона a. ■

7.2.1. Равнобедренный треугольник

а02-1. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами 13, 13, 10, лежит в пределах
$\boxed{1}$ $R \in (6;\ 7]$ $\boxed{2}$ $R \in (7;\ 7{,}1]$ $\boxed{3}$ $R \in (7{,}1;\ 7{,}2]$ $\boxed{4}$ $R \in (7{,}2;\ 7{,}3]$
$\boxed{5}$ $R \in (7{,}3;\ 10)$

Ответ $\boxed{2}$♦ $R = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

Решение. Пусть стороны треугольника a=10, b=13, c=13. По теореме Пифагора длина высоты, проведенной к основанию, равна $h = \sqrt{b^2 - 0{,}25a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, площадь $S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60$, радиус описанной окружности равен $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}$. ■

а02-2. В равнобедренном треугольнике основание a равно 12, а боковая сторона b равна 10. Радиус вписанного круга r равен
$\boxed{1}$ 2,4 $\boxed{2}$ 4 $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ 3,6 $\boxed{5}$ 3

Ответ $\boxed{5}$♦ $r = 3$.

Решение. Высота h равна $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{100 - 36} = 8$, площадь S равна $\frac{ah}{2} = 48$, радиус вписанного круга равен $\frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$. ■

а02-3. Длина высоты h, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 8, а радиус вписаннного круга r равен 3. Длина основания треугольника a равна
$\boxed{1}$ 18 $\boxed{2}$ 16 $\boxed{3}$ 10 $\boxed{4}$ 12 $\boxed{5}$ 8

Ответ $\boxed{4}$♦ $a = 12$.

Решение. Пусть половина длины основания треугольника равна x (рис. 8b). По теореме Пифагора, длина боковой стороны $b = \sqrt{h^2 + x^2}$, полупериметр $p = x + b = x + \sqrt{h^2 + x^2}$, площадь можно записать двумя способами, $S = hx$, $S = r(x + \sqrt{h^2 + x^2})$, так что половину длины основания можно найти из иррационального уравнения $hx = r(x + \sqrt{h^2 + x^2})$. Подставим сюда числовые данные этой задачи,
$8x = 3(x + \sqrt{64 + x^2})$, $5x = 3\sqrt{64 + x^2}$, $25x^2 = 9 \cdot 64 + 9x^2$,
$16x^2 = 9 \cdot 64$, $x^2 = 9 \cdot 4$, $x = 6$. ■

а02-4. Центр круга, вписанного в равнобедренный треугольник, делит высоту в отношении 35 : 1. Периметр треугольника равен 144. Длина основания a треугольника равна
$\boxed{1}$ 24 $\boxed{2}$ 16 $\boxed{3}$ 10 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 8

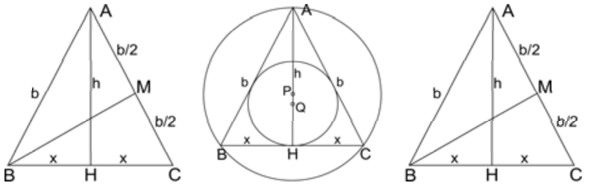
Ответ $\boxed{4}$♦ $a = 4$.

Решение. Пусть половина длины основания треугольника равна x (рис. 8c). Прямая BO, проходящая через центр вписанного круга, является биссектрисой угла $\angle ABC$. Основное свойство биссектрисы позволяет записать уравнение $AB : BH = AO : OH = 35$, поэтому $AB = 35x$, полупериметр $p = x + 35x = 36x$, периметр $P = 72x = 144$, $x = 2$, длина основания равна $a = 2x = 4$. ■

а02-5. Найдите наименьшее значение длины медианы, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника, площадь которого равна 24.
$\boxed{1}$ 6,25 $\boxed{2}$ 6 $\boxed{3}$ 10 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 8

Ответ $\boxed{2}$♦ $m = 6$.

Решение. Пусть половина длины основания треугольника равна x, длина высоты равна h (рис. 11a). Длина медианы равна $m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 8x^2 - b^2}$, $m = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 8x^2}$. По теореме Пифагора для прямоугольного $\triangle AHC$, $b^2 = h^2 + x^2$, поэтому $(\star)$ $m = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 9x^2}$. Площадь треугольника S по условию постоянна и равна $(\star\star)$ $hx = 24$, поэтому условие задачи можно сформулировать в форме "найти наименьшее значение функции в правой чисти $(\star)$ при условии $(\star\star)$ ". Наибольшее значение $(\star)$ достигается при тех же параметрах, что наибольшее значение и выражения $(\star)$ $h^2 + 9x^2$. Используем неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, $\frac{h^2 + 9x^2}{2} \geqslant \sqrt{h^2 \cdot 9x^2} = 3hx$, причем равенство достигается при $h = 3hx$. Таким образом, наименьшее значение длины медианы равно $m_{\min} = \frac{1}{2}\sqrt{6hx} = 6$. ■



(a) (b) (c)

Рис. 11.

a02-6. Длина медианы, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника, равна длине боковой сторны. Найдите угол при основании.

$\boxed{1}$ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{2}$ 30° $\boxed{3}$ 45° $\boxed{4}$ 60° $\boxed{5}$ $\arccos\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

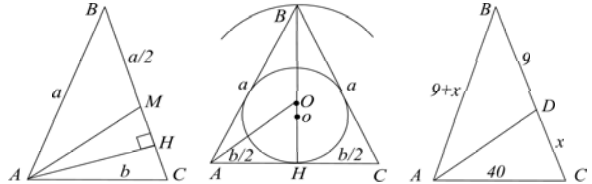
Ответ $\boxed{1}$♦ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть половина длины основания треугольника равна x, длина боковой стороны равна b. Длина медианы равна $m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+8x^2-b^2}$, поэтому $b = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+8x^2}$, $3b^2 = 8x^2$. ■

a02-7. Длина основания равнобедренного треугольника a равна 48, длина боковой стороны b равна 40. Найдите расстояние между центрами вписанного и описанного круга.

♦ 5.

Решение. По теореме Пифагора найдем высоту $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = 32$. Площадь треугольника S равна $\frac{48\cdot 32}{2} = 48\cdot 16$. Радиус вписанного круга r (его центр обозначим буквой Q, рис. 11b) найдем по формуле $r = \frac{S}{p} = \frac{48\cdot 16}{40+24} = 12$. Радиус описанной окружности R (ее центр обозначим буквой P) найдем по формуле $R = \frac{abc}{4S} = \frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot 48\cdot 16} = 25$. Поскольку $R < h$, центр описанной окружности лежит внутри треугольника. Поэтому расстояние между центрами равно $|HP - HQ| = |AH - AP - HQ| = |h - R - r| = |32 - 25 - 12| = 5$. ■



(a) (b) (c)

Рис. 12.

a02-8. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной a и углом при вершине $\alpha = \arccos(0,8)$ расстояние между основаниями медианы и высоты, опущенных на боковую сторону из одной и той же вершины основания, равно

$\boxed{1}$ $0{,}1a$ $\boxed{2}$ $0{,}2a$ $\boxed{3}$ $0{,}3a$ $\boxed{4}$ $0{,}4a$ $\boxed{5}$ $0{,}5a$

Ответ $\boxed{3}$♦ $0,3\cdot a$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 12a) $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, AH — высота, AM — медиана. Тогда $BM = a\frac{a}{2} = 0{,}5a$, $BH = a\cos\alpha = 0{,}8a$, поэтому $MH = 0{,}3a$. ■

a02-9. Если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей около остроугольного равнобедренного треугольника равно 9 : 50, то угол при основании треугольника равен

$\boxed{1}$ $\arccos 0{,}2$ $\boxed{2}$ $\arccos 0{,}8$ $\boxed{3}$ $\arccos 0{,}1$ $\boxed{4}$ $\arccos 0{,}9$ $\boxed{5}$ 15°

Ответ $\boxed{3}$♦ $\arccos 0,1$

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 12b) $AB = BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, BH — высота, O и o — центры описанного и вписанного кругов. Тогда $\frac{b}{2} = a\cos\alpha$, $S = a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha$, $r = \frac{S}{p} = \frac{a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha}{a+a\cos\alpha}$, $R = \frac{a\cdot a\cdot 2a\cos\alpha}{4\cdot a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha}$, $\frac{r}{R} = \frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$. Решим уравнение $\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = p$, Обозначм $\cos\alpha = t$, $2t^3 - (2-p)t + p = 0$, Это уравнение при любом p

имеет очевидный корень $t = -1$. Остальные корни находятся стандартным способом, $t \in \{1/10; 9/10\}$. Остается заметить, что $\frac{9}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\arccos\frac{9}{10} < \frac{\pi}{6}$ и поэтому равнобедренный треугольник с такими углами при основании будет тупоугольным. ■

a02-10. В равнобедренном треугольнике ABC, $AB = BC$, проведена биссектриса AD угла BAC, точка D лежит на BC, длины отрезков $AC = 40$ и $BD = 9$. Величина периметра треугольника ABC равна натуральному числу, сумма цифр которого равна

1 11 **2** 16 **3** 14 **4** 9 **5** 10

Ответ **2** ♦ $P = 88$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 12c) $AB = BC$, AD — биссектриса, $AC = 40$, $BD = 9$. Тогда $AB = x + 9$, $x^2 + BD \cdot x - BD \cdot DC = 0$, $\frac{9}{x} = \frac{9+x}{40}$, $x^2 + 9x - 40 \cdot 9 = 0$; $x = 15$; $AB = 24$. ■

7.2.2. Вписанный и описанный круг

a02-1. Если внутренние углы треугольника относятся как $19 : 13 : 16$, то средний из них равен

1 54° **2** 72° **3** 48° **4** 60° **5** 69°

Ответ **4** ♦ 60°.

Решение. Из условия задачи следует, что найдется такое число t, что внутренние углы равны $19t$, $13t$, $16t$, поэтому $(19 + 13 + 16)t = 180°$, $48t = 180°$, средний по величине угол равен $16t = 180°/3 = 60°$. ■

a02-2. Найдите углы треугольника, если известно, что две его стороны видны из центра вписанной окружности под углами α и β.

♦ $2\alpha - \pi, 2\beta - \pi, 3\pi - 2(\alpha + \beta)$.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ (рис. 1a). Тогда $\angle AOC = \pi - \alpha - \beta$,

$(\star)$ $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \alpha = \pi$, $(\star\star)$ $\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \beta = \pi$, $(\star\star\star)$ $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{\pi}{2}$. Вычтем $(\star)$ и $(\star\star\star)$, получим $\angle C = 2\alpha - \pi$. Аналогично из $(\star\star)$ и $(\star\star\star)$ получим $\angle A = 2\beta - \pi$. ■

a02-3. Радиус r окружности, вписанной в треугольник со сторонами $13, 21, 20$, лежит в пределах

1 $r \in (2,5;\ 3]$ **2** $r \in (3;\ 3,5]$ **3** $r \in (3,5;\ 4]$ **4** $r \in (4;\ 4,5]$ **5** $r \in (4,5;\ 5)$

Ответ **4** ♦ $r = 4\frac{2}{3}$.

Решение. Полупериметр p равен 27, площадь S (по формуле Герона) равна $\sqrt{27 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 7} = 126$, $r = S/p = (9 \cdot 14)/(9 \cdot 3) = 14/3$. ■

a02-4. Радиус R окружности, описанной около треугольника со сторонами $13, 21, 20$, лежит в пределах

1 $r \in (5;\ 9]$ **2** $r \in (9;\ 10]$ **3** $r \in (10;\ 11]$ **4** $r \in (11;\ 12]$ **5** $r \in (12;\ 15)$

Ответ **3** ♦ $r = 10\frac{5}{6}$.

Решение. Площадь $S = 126$, $R = abc/4S = 65/6$. ■

a02-5. Стороны треугольника относятся как $11 : 10 : 9$. Если представить отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности в виде несократимой рациональной дроби, то в числителе будет натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1** ♦ 1, $r/R = 16/33$.

Решение. Используем формулы для радиуса вписанного круга, $r = \frac{S}{p}$, радиуса описанного круга, $R = \frac{abc}{4S}$, и формулу Герона, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Получим, исключая S, формулу для искомого отношения, $\frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$. ■

Тема 14. Планиметрия, 2. Многоугольники, окружности

14.1. Теоремы синусов и косинусов

14.1.1. Теорема синусов

а02-1. Если длина стороны треугольника составляет 20% радиуса описанной около треугольника окружности, то синус противолежащего угла треугольника равен

$\boxed{1}$ 0, 1 $\boxed{2}$ 0, 2 $\boxed{3}$ 0, 3 $\boxed{4}$ 0, 4 $\boxed{5}$ 0, 5

Ответ $\boxed{1}$♦ $\sin\alpha = 0,1$.

Решение. По теореме синусов, $a : \sin\angle A = 2R$, $\sin\angle A = \frac{a}{2R} = 0{,}1$. ■

а02-2. Периметр треугольника, два угла которого равны 30° и 45°, вписанного в круг радиуса $R = 4$, равен

$\boxed{1}$ $4+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ $\boxed{2}$ $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ $\boxed{3}$ $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
$\boxed{4}$ $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{6}$ $\boxed{5}$ $2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

Ответ $\boxed{1}$♦ $P = 4+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$.

Решение. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. В соответствии с теоремой синусов, $\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$, $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$, $\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$, поэтому $P = 2R(\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C)$. По условию, $\angle A = 30°$, $\angle A = 45°$, поэтому $\angle C = 180° - 30° - 45° = 105°$, $P = 8(\sin 30° + \sin 45° + \sin 105°)$. Вычислим синус третьего угла треугольника, $\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, поэтому $P = 4+4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$. ■

14.1.2. Теорема косинусов

а02-1. В треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 5$, $AB = 3$, и угол $\angle A = \arccos(-0,8)$. Значение величины BC^2

равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{3}$♦ $BC^2 = 58$.

Решение. По теореме косинусов, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 5^2 + 3^2 + 2\cdot 5\cdot 3\cdot 0{,}8 = 58$. ■

а02-2. В треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 5$, $BC = \sqrt{58}$, и угол $\angle A = \arccos(-0{,}8)$. Найдите длину стороны AB и укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $AB \in (0;\ 2]$ $\boxed{2}$ $AB \in (2;\ 2,5]$ $\boxed{3}$ $AB \in (2,5;\ 3]$
$\boxed{4}$ $AB \in (3;\ 3,5]$ $\boxed{5}$ $AB \in (3,5;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ $AB = 3$.

Решение. Пусть $a = BC$, $b = AC$, $AB = x$. По теореме косинусов, $a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos A$, $x^2 - 2\cdot 5\cdot(-0{,}8)x + 5^2 - 58$, $x^2 + 8x - 33 = 0$, $x \in \{-11; 3\}$. Так как $x > 0$, то $x = 3$. ■

а02-3. Треугольник ABC вписан в окружность, площадь которой равна 111π. Длина стороны $AC = 12$, а угол, лежащий против стороны BC, равен 120°. Пусть x — длина стороны AB. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $x \in (0;\ 7,5)$ $\boxed{2}$ $x \in [7,5;\ 8,5)$ $\boxed{3}$ $x \in [8,5;\ 9,5)$
$\boxed{4}$ $x \in [9,5;\ 10,5)$ $\boxed{5}$ $x \in [10,5;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x = 9$.

14.2. Окружность

14.2.1. Вписанные и центральные углы в окружности

а02-1. Найдите длину дуги, которая опирается на вписанный угол величиной 30° в окружности, радиус которой равен 12.

$\boxed{1}$ π $\boxed{2}$ 2π $\boxed{3}$ 3π $\boxed{4}$ 4π $\boxed{5}$ 6π

Ответ $\boxed{4}$♦ 4π.

14.2.2. Вписанная и описанная окружности

а02-1. Радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами $AB = BC = 13$, $AC = 10$, лежит в пределах

$\boxed{1}$ $R \in (1;\ 7]$ $\boxed{2}$ $R \in (7;\ 7,1]$ $\boxed{3}$ $R \in (7,1;\ 7,2]$ $\boxed{4}$ $R \in (7,2;\ 7,3]$ $\boxed{5}$ $R \in (7,3;\ 100)$

Ответ $\boxed{2}$♦ $R = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

Решение. Для вычисления радиуса описанной окружности используем формулу $R = \frac{abc}{4S}$. По условию задачи, $a = c = 13$, $b = 10$. Треугольник равнобедренный, его высота равна $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, площадь равна $S = 6 \cdot 10$, радиус описанной окружности равен $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60}$. ■

а02-2. Стороны треугольника относятся как $11 : 10 : 9$. Если представить отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности в виде несократимой рациональной дроби, то в числителе будет натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{1}$♦ остаток 1; $\dfrac{r}{R} = \dfrac{16}{33}$.

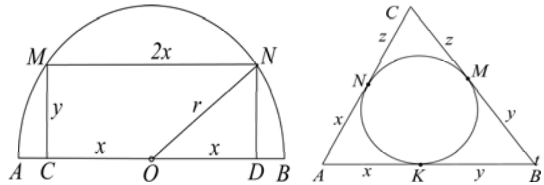
Решение. Пусть в треугольнике ABC длины сторон равны $AB = c = 11m$, $BC = a = 10m$, $CA = b = 9m$. Тогда $p = \frac{a+b+c}{2}$, $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$, $S = rp$, $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$, $\frac{r}{R} = \frac{4S^2}{abcp}$; $\frac{r}{R} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc(a+b+c)}$, $\frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2abc}$. ■

а02-3. В окружность радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь окружности, если периметр прямоугольника равен 96.

$\boxed{1}$ 256π $\boxed{2}$ 396π $\boxed{3}$ 512π $\boxed{4}$ 1024π $\boxed{5}$ 1024

Ответ $\boxed{3}$♦ $R = 512\pi$.

Решение. Пусть стороны прямоугольника равны $2x$ и y, рис. 13a, причем сторона $CD = 2x$ лежит на диаметре AB окружности, радиус которой равен r. Тогда по теореме



(a) (b)

Рис. 13.

Пифагора $x^2 + y^2 = r^2$, площадь прямоугольника равна $S = 2xy$. В соответствии с неравенством Коши, $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2}$, или $2xy \leqslant x^2 + y^2$. Поэтому максимальная возможная величина площади при заданном радиусе круга равна $S_{\max} = x^2 + y^2 = r^2$, причем $S = S_{\max}$ только при $x = y$, и тогда периметр прямоугольника равен $4x + 2y = 96$, меньшая сторона $x = y = 16$, квадрат радиуса $r^2 = 512$ и площадь круга равна $S = 512\pi$. ■

а02-4. Если x — длина меньшего из всех шести отрезков, на которые делят точки касания вписанного круга стороны треугольника, длины сторон которого равны 5, 8 и 9, то

$\boxed{1}$ $x \in (0;\ 1,3)$ $\boxed{2}$ $x \in [1,3;\ 1,8)$ $\boxed{3}$ $x \in [1,8;\ 2,3)$ $\boxed{4}$ $x \in [2,3;\ 2,8)$ $\boxed{5}$ $x \in [2,8;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x = \frac{b+c-a}{2}$, где a — большая сторона.

Решение. В соответствии со свойством двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AK = AN = x$, $BK = AM = y$, $CN = CM = z$. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ x + z = b. \end{cases}$$ рис. 13b. Сложим все три уравнения,

$x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$, поэтому $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $x = \frac{a+b-c}{2}$, осталось выбрать из этих трех величин наименьшую. ■

14.2.3. Хорды, радиусы, диаметры окружности

а02-1. Через точку L окружности проведены касательная и хорда LM длины 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найдите радиус окружности.♦ $R = 25/8$.

а02-2. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найдите длину хорды AB, если $AC = b$ и $BC = a$, где $a > b$.

а02-3. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой - секущая, параллельная касательной. Найдите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.
♦ $6,25$.

Решение. Точка касания, другой конец хорды и середина секущей образуют прямоугольный треугольник со сторонами 10, 6, 8. ■

а02-4. Из точки, взятой на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды с длинами 16 и 30. Найдите радиус окружности.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 17 $\boxed{\mathbf{2}}$ 15 $\boxed{\mathbf{3}}$ 23 $\boxed{\mathbf{4}}$ 18 $\boxed{\mathbf{5}}$ 21

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 17

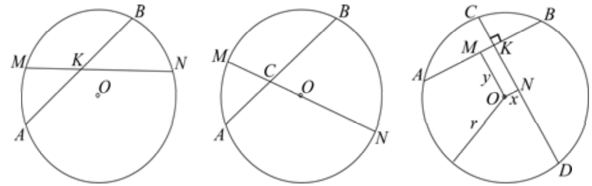
Решение. Два других конца хорд лежат на концах диаметра окружности, поэтому $(2R)^2 = 16^2 + 30^2 = (2 \cdot 17)^2$. ■

а02-5. В круге радиуса 13 расстояние между параллельными хордами длины 10 и 24, расположенными по разные стороны от центра, равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 13 $\boxed{\mathbf{2}}$ 14 $\boxed{\mathbf{3}}$ 15 $\boxed{\mathbf{4}}$ 16 $\boxed{\mathbf{5}}$ 17

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $d = 17$.

Решение. Проведем диаметр круга через середины двух хорд. Используя теорему Пифагора, найдем расстояние от каждой из хорд до центра круга, $d_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $d_2 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, $d = d_1 + d_2 = 17$. ■



(a) (b) (c)

Рис. 14. Пересекающиеся хорды в окружности

14.2.4. Пересекающиеся хорды в окружности

а02-1. В круге проведена хорда длиной 24 и через ее середину — другая хорда. Длина одного из отрезков, на которые делит вторую хорду точка пересечения, равна 9. Найдите длину второго отрезка.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 9 $\boxed{\mathbf{2}}$ 10 $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 $\boxed{\mathbf{4}}$ 14 $\boxed{\mathbf{5}}$ 16

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ 16

Решение. В окружности с центром O, рис. 14а, проведена хорда AB, ее середина находится в точке K, другая хорда MN проходит через точку K. В соответствии с условиями задачи, $AB = 24$, $AK = KB = 12$, $MK = 9$. Требуется найти длину отрезка KN. Так как произведения длин отрезков, на которые делит пересекающиеся хорды точка их пересечения, равны друг другу, то $AK \cdot KB = MK \cdot KN$, $KN = \frac{AK \cdot KB}{MK} = \frac{12^2}{9} = 16$. ■

а02-2. Точка C делит хорду AB окружности радиуса 12 на отрезки $AC = 9$ и $CB = 7$. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки C до точки на окружности и укажите отстаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 21.

Решение. В окружности с центром O, рис. 14b, проведена хорда AB, на ней взята точка C так, что $AC = 9$, $CB = 7$. Проведем диаметр MN через точку C. Наибольшее расстояние от точки C до точки на окружности равно отрезку диаметра от точки C до точки на окружности, на котором расположен центр окружности. Наименьшее расстояние также равно отрезку диаметра, но в этом случае нужно взять отрезок, на котором нет центра окружности. Пусть точка C расположена между M и центром O. Тогда искомый отрезок совпадает с CN. Обозначим его длину x, длину отрезка MC обозначим y. Используем свойство отрезков пересекающихся хорд в окружности, $\begin{cases} xy = AC \cdot CB, \\ x + y = d, \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 9 \cdot 7, \\ x + y = 24, \end{cases}$ $x^2 - 24xy + 63 = 0$,
$x = 12 \pm \sqrt{144 - 63} = 12 \pm 9 \in \{3; 21\}$, $x = 21$. ■

a02-3. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = 7$, $BC = 11$. Площадь окружности равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 18π $\boxed{\mathbf{2}}$ 42π $\boxed{\mathbf{3}}$ 84π $\boxed{\mathbf{4}}$ $42{,}5\pi$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 77π

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $S = \frac{85\pi}{2}$.

Решение. Решим задачу чисто аналитическим путем. Для этого зададим в символьном виде значения величин (не заданных в условии), которые позволяют однозначно определить все фигуры и линии, входящие в условия задачи, а также их взаимное расположение. После этого вычислим значения заданных в условии величин и составим систему уравнений, из решения которой определим неизвестные величины. Пусть в окружности с центром O, рис. 14c, радиус которой равен r, проведены пересекающиеся хорды AB и CD, причем $AB \perp CD$. Опустим из центра окружности перпендикуляры на эти хорды, $ON \perp CD$, $N \in CD$, $OM \perp AB$, $M \in AB$, и пусть их длины равны соответственно $ON = x$, и $OM = y$. По теореме Пифагора
$CN = ND = \sqrt{r^2 - x^2}$, $AM = MB = \sqrt{r^2 - y^2}$, поэтому
$CK = CN - NK = CN - MO = \sqrt{r^2 - x^2} - y$,

$KB = MB - MK = MB - NO = \sqrt{r^2 - y^2} - x$. Аналогично найдем $DK = \sqrt{r^2 - x^2} + y$, $KA = \sqrt{r^2 - y^2} + x$. Пусть $BC = m$, $AD = n$. По теореме Пифагора из $\triangle CKB$ найдем
$CK^2 + KB^2 = BC^2$, или, после подстановки вычисленных длин отрезков, $\left(\sqrt{r^2 - x^2} - y\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - y^2} - x\right)^2 = m^2$. Аналогично, $AK^2 + KD^2 = AD^2$, $\left(\sqrt{r^2 - x^2} + y\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 + y^2} + x\right)^2 = n^2$,
Таким образом, три неизвестные величины x, y и r удовлетворяют системе двух уравнений
$$\begin{cases} r^2 - x^2 - 2y\sqrt{r^2 - x^2} + y^2 + r^2 - y^2 - 2x\sqrt{r^2 - y^2} + x^2 = m^2, \\ r^2 - x^2 + 2y\sqrt{r^2 - x^2} + y^2 + r^2 - y^2 + 2x\sqrt{r^2 - y^2} + x^2 = m^2. \end{cases}$$
Типичная ситуация для планиметрических задач, когда число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому найти неизвестные величины не удается. Однако, это в данном случае не является необходимым. По условию задачи, требуется найти только одну неизвестную величину r. Сложим уравнения,
$(\star)$ $4r^2 = m^2 + n^2$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$, $S = \frac{\pi}{4}(m^2 + n^2)$,
$S = \frac{\pi}{4}(7^2 + 11^2)$, $S = \frac{\pi}{4}(49 + 121)$, $S = \frac{85\pi}{2}$. Разумеется, основное соотношение $(\star)$ можно получить и чисто геометрическим путем. Сделайте это самостоятельно. ■

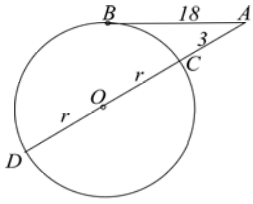
14.2.5. Касательная к окружности

a02-1. Из точки A проведена касательная AB к окружности с центром O, точка B лежит на окружности, $AB = 18$. Через точку A проведена также прямая, проходящая через точку O, пересекающая окружность в точках C и D, точка C лежит между A и D, $AC = 3$. Диаметр окружности — целое число, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $d = 105$.

Решение. Пусть (рис. 15a) в окружности с центром O проведена касательная $AB = 18$, прямая AD, проходящая через центр, причем $AC = 3$. В соответствии с теоремой о касательной и отрезках секущей, $AB^2 = AC \cdot AD$, причем



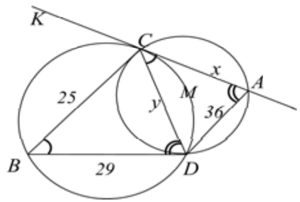


Рис. 15. Касательная к окружности

$AD = AC + 2r$, так что $18^2 = 3(3 + 2r)$, откуда $18 \cdot 6 = 3 + 2r$, $2r = 105$. ■

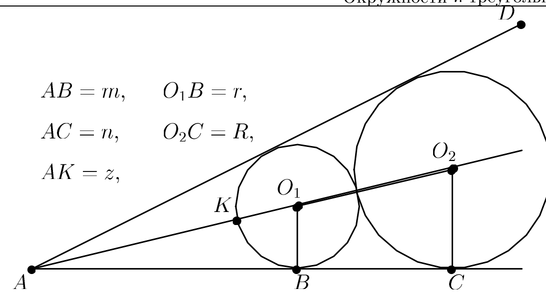
a02-2. Около остроугольного треугольника BCD описана окружность и к ней в точке C проведена касательная CA. Другая окружность касается прямой BD в точке D, проходит через точку C и второй раз пересекает прямую CA в точке A. Известно, что $AD = a$, $BC = b$, $BD = c$. Найдите AC.♦ $c\sqrt{a/b}$.

14.2.6. Свойства касательных и секущих

a02-1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются одна другой и касаются также прямой BC в точках B и C соответственно. Прямые BC и O_1O_2 пересекаюится в точке A. Известно, что $AB = 320$, $BC = 180$, расстояние от точки A до окружности с центром O_1 равно 256. Найдите радиусы окружностей.

♦ (144; 225).

Решение.



$2r = x$, $2R = y$, $AK = z$,

$$\begin{cases} y : x = n : m, \\ z(z + x) = m^2, \\ (z + x)(z + x + y) = n^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = xn/m, \\ z(z + x) = m^2, \\ (z + x)(z + x + xn/m) = n^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = xn/m, \\ x = m^2/z - z, \\ \frac{m^2}{z}(\frac{m^2}{z} + (\frac{m^2}{z} - z)\frac{n}{m}) = n^2, \end{cases}$$

$\dfrac{m^2}{z}(\dfrac{m^2}{z} + (\dfrac{m^2}{z} - z)\dfrac{n}{m}) = n^2$, $m^2(m^2 + (m^2 - z^2)\dfrac{n}{m}) = n^2z^2$,

$m(m^3 + m^2n - z^2n) = n^2z^2$, $m^4 + m^3n - z^2mn = n^2z^2$,

$m^3(m + n) = z^2n(m + n)$, $m^3 = z^2n$, $z = m\sqrt{m/n}$, ... ■

14.2.7. Окружности и треугольники

a02-1. Около остроугольного треугольника BCD описана окружность, и к ней в точке C проведена касательная CA. Другая окружность касается прямой BD в точке D, проходит через точку C и второй раз пересекает прямую CA в точке A. Известно, что AD = 36, BC = 25, BD = 29. Длина стороны AC, представленная в виде десятичной дроби, содержит на первом месте после запятой цифру

$\boxed{1}$ 1 или 6 $\boxed{2}$ 2 или 7 $\boxed{3}$ 3 или 8 $\boxed{4}$ 4 или 9 $\boxed{5}$ 5 или 0

Ответ **3**♦ $x = 34,8$; $x = c\sqrt{a/b}$. $AD = a$; $BC = b$; $BD = c$.

Решение. Вписанные углы $\angle ACD$ и $\angle CBD$, рис. 15b, опираются на дугу CDM, поэтому они равны. Вписанные углы $\angle ACD$ и $\angle CBD$ опираются на дугу CDM, поэтому они равны. Аналогично устанавливаем, что $\angle BDC = \angle DAC$, поэтому $\triangle BCD \propto \triangle CDA$. Следовательно, $\frac{y}{36} = \frac{25}{y} = \frac{29}{x}$. ■

14.2.8. Площадь окружности и ее частей

a02-1. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найдите отношение площадей вписанного круга и сектора.

1 2/3 **2** 3/4 **3** 1/2 **4** 2/5 **5** $1/\sqrt{2}$

Ответ **1**♦ 2/3

a02-2. Около квадрата со стороной a описана окружность. В один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Найдите отношение площади большего квадрата к площади меньшего.

1 12.5 **2** $15\sqrt{2}$ **3** $12.5\sqrt{3}$ **4** $4\pi\sqrt{3}$ **5** 25

Ответ **5**♦ 25

a02-3. В ромб вписана окружность, в которую вписан квадрат. Найдите острый угол ромба, если площадь квадрата в 6 раз меньше площади ромба.♦ $\alpha = \arcsin(1/3)$.

14.3. Четырехугольники

14.3.1. Теоретические сведения

Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ (вершины четырехугольника перечисляются в порядке следования вдоль границы) d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними, S — площадь. Тогда $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$.

Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°.

Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы протовоположных внутренних углов равны 180°.

Если существует окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, то суммы длин противоположных сторон равны: $AB + CD = BC + AD$.

14.3.1.1. Параллелограмм

a и b — смежные стороны, α — угол между ними, h_a — высота, проведенная к стороне a, h_b — высота, проведенная к стороне b.

$S = ah_a = bh_b = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$.

14.3.1.2. Ромб

Площадь ромба равна $S = ah_a = a^2\sin\alpha = 0,5d_1d_2$.

14.3.1.3. Трапеция

Обозначения: a; b — основания, h — высота, l — средняя линия.

$l = \dfrac{a+b}{2}$; $\quad S = l \cdot h$

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, выражается формулой $S = h^2$.

Боковая сторона равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна средней линии.

14.3.2. Четырехугольник общего вида

a02-1. В выпуклом четырехугольнике два угла относятся как 3 : 4, третий равен их сумме, а четвертый меньше третьего на 39°. Меньший угол равен

1 45° **2** 54° **3** 57° **4** 68° **5** 37°

Ответ **3**♦ 57.

a02-2. На сторонах выпуклого четырехугольника ABCD, площадь которого равна 1, взяты точки K на AB, L на BC, M на CD, N на AD. При этом AK/KB=2, BL/LC=1/3, CM/MD=1, DN/NA=1/5. Найдите площадь шестиугольника AKLCMN.

a02-3. Докажите, что площадь четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

14.3.3. Параллелограмм

а02-1. Стороны параллелограмма равны 12 и 14, а разность диагоналей равна 8. Найдите величину большей диагонали параллелограмма.

$\boxed{1}$ 14 $\boxed{2}$ 24 $\boxed{3}$ 22 $\boxed{4}$ 28 $\boxed{5}$ 16

Ответ $\boxed{3}$♦ $d_1 = 14$, $d_2 = 22$.

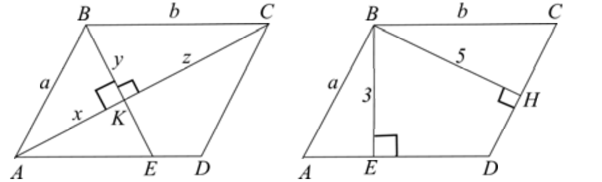
Решение. Пусть диагонали параллелограмма равны m, n. Как известно, сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон,
$(\star)$ $m^2 + n^2 = 2(12^2 + 14^2)$, и кроме того $(\star\star)$ $m - n = 8$.
Возведем $(\star\star)$ в квадрат, $m^2 + n^2 - 2mn = 8^2$. Используя $(\star)$, вычислим $(\star\star\star)$ $mn = 14 \cdot 22$. Решая виетовскую систему $(\star\star)$, $(\star\star\star)$, получим $(m;\ n) \in \{(-14;\ -22) \bigcup (22;\ 14)\}$. ■

а02-2. Пусть число S равно площади параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 6$, в котором диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с точкой E стороны AD, делящей отрезок AD в отношении $2 : 1$, считая от точки A. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $S \in (0;\ 1{,}1)$ $\boxed{2}$ $S \in [1{,}1;\ 2{,}2)$ $\boxed{3}$ $S \in [2{,}2;\ 3{,}3)$
$\boxed{4}$ $S \in [3{,}3;\ 4{,}4)$ $\boxed{5}$ $S \in [4{,}4;\ 999)$

Ответ $\boxed{4}$♦ $S = \sqrt{11} \in \{3{,}3;\ 4{,}4\}$.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$, рис. 16a, $AB = a$, $BC = b$, $AE : ED = \alpha : (1 - \alpha)$, $BE \perp AD$. Пусть K — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Обозначим длины отрезков $AK = x$, $BK = y$, $KC = z$. Применим теорему Пифагора к треугольникам $\triangle ABK$ и $\triangle BKC$, $(\star)$ $x^2 + y^2 = a^2$, $(\star\star)$ $y^2 + z^2 = b^2$. Найдем на чертеже пару подобных треугольников, $\triangle AKE \propto \triangle BKC$, и из соотношений сторон в подобных треугольниках получим
$(\ddagger)$ $AK : KC = AE : BC = \alpha : 1 = \alpha$, так что $x = \alpha z$. Вычтем уравнения $(\star\star)$ и $(\star)$ почленно, $z^2(1 - \alpha^2) = b^2 - a^2$, откуда $z = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{1-\alpha^2}}$. Учитывая $(\ddagger)$, получим $x = \alpha\sqrt{\frac{b^2-a^2}{1-\alpha^2}}$. Теперь из $(\star)$



(a) (b)

Рис. 16. Параллелограмм

вычислим $y = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \alpha^2\frac{b^2-a^2}{1-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{a^2-a^2\alpha^2-\alpha^2b^2+\alpha^2a^2}{1-\alpha^2}}$.
Упрощение этого выражения приводит к следующему выражению: $y = \sqrt{\frac{a^2-\alpha^2b^2}{1-\alpha^2}}$. Учитывая, что BK — высота треугольника ABC, и что площадь параллелограмма в два раза больше площади упомянутого треугольника, получим
$S_{ABCD} = y(x + z)$, $S_{ABCD} = \sqrt{\frac{a^2-\alpha^2b^2}{1-\alpha^2}} \cdot (1 + \alpha)\sqrt{\frac{b^2-a^2}{1-\alpha^2}}$,
$S_{ABCD} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{(a^2 - \alpha^2b^2)(b^2 - a^2)}$,
$S_{ABCD} = (1 - \alpha)\sqrt{(a^2 - \alpha^2b^2)(b^2 - a^2)}$. Подставим числовые данные, $a = 5$, $b = 6$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{(5^2 - \frac{4}{9}6^2)(6^2 - 5^2)}$,
$S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{(25 - 16)(36 - 25)}$, $S_{ABCD} = \sqrt{11}$. ■

а02-3. Высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, равны 3 и 5, а синус угла между ними равен $0,6$. Найдите длину большей диагонаоли параллелограмма.

$\boxed{1}$ $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ $\boxed{3}$ $\frac{5\sqrt{58}}{3}$ $\boxed{4}$ $\frac{5\sqrt{58}}{4}$ $\boxed{5}$ 6

Ответ $\boxed{3}$♦ $\frac{5\sqrt{58}}{3}$.

Решение. Острый угол при вершине параллелограмма равен углу между указанными высотами, рис. 16b. Наиболее эффективный способ найти большую диагональ —

использовать теорему косинусов в применении к треугольнику, образованному двумя сторонами параллелограмма с тупым углом между ними. Стороны параллелограмма можно найти из прямоугольных треугольников, образованных сторонами и диагоналями. ■

14.3.4. Прямоугольник

a02-1. Найдите максимальную возможную площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиуса 1 так, что все вершины прямоугольника находятся на границе полугруга.

1 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **2** $0,5$ **3** $\frac{\pi}{3}$ **4** 1 **5** $\frac{\pi}{4}$

Ответ **4** ♦ 1

14.3.5. Трапеция

14.3.5.1. Диагонали трапеции

a02-1. В трапеции, имеющей прямой угол, основания равны 5 и 11, а большая диагональ равна $\sqrt{185}$. Площадь трапеции равна

1 64 **2** 60 **3** 56 **4** 62 **5** 68

Ответ **1** ♦ 64.

Решение. Большая диагональ и большее основание являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, другим катетом которого является высота трапеции. По теореме Пифагора, высота трапеции равна $h = \sqrt{185 - 11^2} = 8$. Поэтому площадь трапеции равна $S = 8 \cdot \frac{5+11}{2} = 64$. ■

a02-2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 4$ и $BC = 3$ площадь треугольника ABD равна 28. Площадь треугольника ABC равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1** ♦ $S = 21$.

Решение. Треугольники $\triangle ABC$ с основанием $BC = 3$ и $\triangle ADC$ с основанием $AD = 4$ имеют равные высоты, которые

равны также высоте трапеции $ABCD$, рис. 18а. Поэтому $S_{ABC} : S_{ABD} = BC : AD = 3 : 4$, $S_{ABC} = S_{ABD} \cdot \frac{3}{4} = 21$. ■

a02-3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Основания AD и BC равны соответственно 7,5 и 2,5, диагональ BD равна 12. Найдите длину отрезка BO.

1 5 **2** 4 **3** $3,37$ **4** $2,25$ **5** 3

Ответ **3** ♦ 3.

Решение. Треугольники $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ подобны по трем углам, рис. 18а. Поэтому $BO : OD = BC : AD = 2{,}5 : 7{,}5 = 1 : 3$. Поэтому $BO = \frac{1}{4} \cdot 12$. ■

a02-4. Диагонали трапеции ABCD с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если площади треугольников BCO и AOD равны соответственно 8 и 2.♦ 18.

a02-5. Основания трапеции a и b. Найдите длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям трапеции с концами на боковых сторонах трапеции.

♦ $l = \frac{2ab}{a+b}$.

a02-6. Диагонали трапеции KLMN, в которой $LM||KN$, пересекаются в точке A. Известно, что $LM = m$, $KN = n$. Найдите отношение площади треугольника AMN к площади трапеции KLMN.♦ $mn/(m+n)^2$.

a02-7. Найдите площадь трапеции с основаниями 6 и 7 и диагоналями 5 и 12.

1 24 **2** 36 **3** 30 **4** 32 **5** 37

Ответ **3** ♦ $S = 30$.

Решение. Проведем через вершину B трапеции $ABCD$ прямую, параллельную диагонали AC до пересечения с продолжением основания AD в точке E, рис. 17а. Треугольник ABE равновелик треугольнику BCD, поэтому треугольник EBD равновелик трапеции $ABCD$. В треугольнике EBD известны все стороны, $AB = CA = 12$, $BD = 5$,

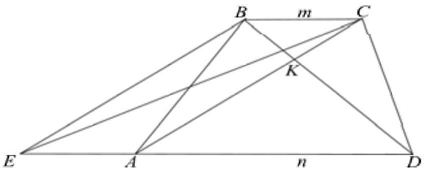


Рис. 17. Трапеция-1

$ED = EA + AD = BC + AD = 6 + 7 = 13$, поэтому $\triangle ABD$ прямоугольный с катетами 5 и 12. ■

a02-8. Средняя линия трапеции с основаниями 7 и 5 делит площадь трапеции в отношении

1 7 : 5 **2** 7 : 6 **3** 13 : 12 **4** 6 : 5 **5** 13 : 11

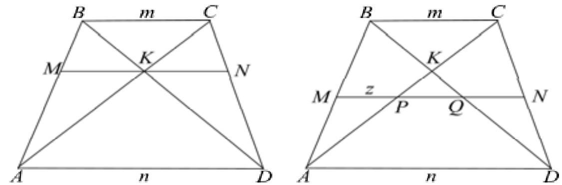
Ответ **5**♦ 13 : 11.

a02-9. Длины оснований трапеции равны 130 и 70. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основанию. Длина отрезка этой прямой между точками ее пересечения с боковыми сторонами равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1**♦ 91.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ длины отрезков $AD = n$, $BC = m$, AC и BD — диагонали, K — точка пересечения диагоналей, $MN||AD$, $K \in MN$, рис. 18. Тогда $\triangle AKD \propto \triangle BKC$ (по трем углам), $AK : KC = AD : BC = n : m$, $\triangle AMK \propto \triangle ABC$ (по трем углам), $MK : BC = AK : AC = n : (n+m)$, $MK = \frac{nm}{n+m}$. Совершенно так же установим, что $KN = \frac{nm}{n+m}$. Поэтому $MN = \frac{2nm}{n+m} = \frac{2 \cdot 130 \cdot 70}{130+70} = 91$. ■



(a) (b)

Рис. 18. Трапеция-2

14.3.5.2. Площадь части трапеции

a02-10. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 28$ и $BC = 12$ проведена прямая MN, параллельная основанию, $M \in AB$, $N \in CD$. Диагонали AC и BD пересекают MN в точках P и Q, причем P между M и Q, $PQ : MP = 2 : 1$. Длина отрезка MN равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1**♦ $MN = 21$.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ даны длины отрезков $AD = n = 28$, $BC = m = 12$, AC и BD — диагонали, K — точка пересечения диагоналей, $MN||AD||BC$, $P \in NM$, $Q \in NM$, рис. 18b. Обозначим $MP = z$. Тогда по условию задачи $PQ = qz$, где $q = 2$. $\triangle AMP \propto \triangle ABC$ (по трем углам), $AP : AC = z : m$, $AP = AC \cdot \frac{z}{m}$. Совершенно так же установим, что $AK = AC \cdot \frac{n}{n+m}$. Поэтому $PK = AC(\frac{n}{n+m} - \frac{z}{m})$. $\triangle AKD \propto \triangle PKQ$, $PQ = AD \cdot \frac{PK}{AK}$, $PQ = n \cdot \frac{\frac{n}{n+m} - \frac{z}{m}}{\frac{n}{n+m}}$,

$\begin{cases} PQ = \frac{nm - z(n+m)}{m}; \\ PQ = qz, \end{cases}$ $nm - z(n+m) = qzm$, $z = \frac{mn}{n+m+qm}$,

$QN = MP = z$, $MN = MP + PQ + QN = z(2+q)$,

$MN = \frac{mn(2+q)}{n+m+qm}$, $MN = \frac{28 \cdot 12(2+2)}{28+12+2 \cdot 12}$, $MN = \frac{28 \cdot 12 \cdot 4}{64} = 21$. ■

а02-11. Основания трапеции равны AD = 11 и BC = 3. Боковые стороны трапеции отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 7. Найдите отношение площади трапеции AMND к площади трапеции MBCN.

1 19 : 10 **2** 24 : 10 **3** 16 : 10 **4** 18 : 10 **5** 17 : 10

Ответ **4**♦ 18 : 10.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями $AD||BC$, рис. 21b, задано $AD = a = 11$, $BD = b = 3$, $MN||AD$, $M \in AB$, $N \in CD$, $MN = m = 7$. Проведем отрезки $CR||AB$ и $NT||CR$. Тогда $MP = AR = b$, $PN = m - b$, $RD = a - b$, $RT = m - b$, $TD = a - m$, $h_{AMND} : h_{MBCN} = PR : CP = NT : CR = TD : PN = (a - m) : (m - b)$,
$S_{AMND} : S_{MBCN} = \big(h_{AMND} \cdot (AD + MN)\big) : \big(h_{MBCN} \cdot (MN_BC)\big) = \big((a - m) \cdot (a + m) : \big((m - b) \cdot (m + b)\big) = (a^2 - m^2) : (m^2 - b^2) = (11^2 - 7^2) : (7^2 - 3^2) = (18 \cdot 4) : (10 \cdot 4) = 18 : 10.$ ■

а02-12. Площадь трапеции равна 245, длины оснований относятся как 2 : 3. Прямая, непараллельная основанию, делит боковые стороны в отношении 5 : 2. Площадь большего четырехугольника равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **2**♦ Площади четырехугольников $108 + 137 = 245$.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ задано отношение длин нижнего и верхнего оснований $AD : BC = 3 : 2$, рис. 20a, известна величина площади $S_{ABCD} = 245$, проведен отрезок MN, $M \in AB$, $N \in CD$, так, что $AM : MB = 2 : 5$, $DN : NC = 5 : 2$. Требуется найти величину большей из площадей четырехугольников S_{AMND} или S_{MBCN}. Проведем отрезки $ML||AD$, $L \in CD$, $KN||AD$, $K \in AB$, $CE||AB$, $E \in AD$. Тогда $AK : KB = DN : NC = 5 : 2$, $AM : MB = 2 : 5$, поэтому $AM : MK : KB = 2 : 3 : 2$. Пусть $AB = 7x$. Тогда $AM = 2x$, $MK = 3x$, $KB = 2x$. Пусть $CD = 7y$.

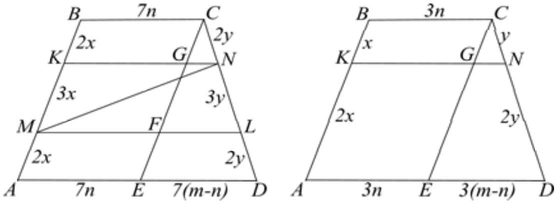
Аналогично получим $DL = 2y$, $LN = 3y$, $NC = 2y$. Пусть верхнее основание трапеции равно $7n$, нижнее основание равно $7m$. Тогда $AE = BC = 7n$, $ED = 7m - 7n$. Из подобия $\triangle CED \propto \triangle CFL \propto \triangle CGN$ найдем $FL = 5m - 5n$, $GN = 2m - 2n$. Поэтому
$ML = MF + FL = 7n + 5m - 5n = 2n + 5m$,
$KN = KG + GN = 7n + 2m - 2n = 5n + 2m$. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна $7h$. Тогда высота трапеции $AMLD$ равна $2h$, высота трапеции $MKNL$ равна $3h$, такая же высота $\triangle MNL$, такая же высота $\triangle MKN$, высота трапеции $KBCN$ равна $2h$. Теперь вычислим площади искомых четырехугольников,
$S_{AMLD} = 2h\frac{AD+ML}{2} = 2h\frac{7m+2n+5m}{2} = 2h\frac{12m+2n}{2}$,
$S_{MNL} = 3h\frac{ML}{2} = 3h\frac{2n+5m}{2}$, $S_{MKN} = 3h\frac{KN}{2} = 3h\frac{5n+2m}{2}$,
$S_{KBCN} = 2h\frac{BC+KN}{2} = 2h\frac{7n+5n+2m}{2} = 2h\frac{12n+2m}{2}$,
$S_{AMND} = 2h\frac{12m+2n}{2} + 3h\frac{2n+5m}{2} = h\frac{24m+4n}{2} + h\frac{6n+15m}{2}$,
$S_{AMND} = h\frac{39m+10n}{2}$,
$S_{MBCN} = 3h\frac{5n+2m}{2} + 2h\frac{12n+2m}{2} = h\frac{15n+6m}{2} + h\frac{24n+4m}{2}$,
$S_{MBCN} = h\frac{39n+10m}{2}$, $m = 3a$, $n = 2a$, $S_{AMND} = ha\frac{39\cdot3+10\cdot2}{2} = ha\frac{137}{2}$,
$S_{MBCN} = ha\frac{39\cdot2+10\cdot3}{2} = ha\frac{108}{2}$. Теперь очевидно, что большая площадь будет у трапеции $AMND$. Используем теперь то, что величина площади трапеции $ABCD$ задана и равна 245,
$S_{AMND} + S_{MBCN} = ha\frac{137}{2} + ha\frac{108}{2} = 245$, $ha\frac{245}{2} = 245$, $ha = 2$,
$S_{AMND} = 137$, $S_{MBCN} = 108$. ■

а02-13. Площадь трапеции равна 27, длины оснований относятся как 1 : 2. Прямая, параллельная основанию, делит боковые стороны в отношении 1 : 2, считая от меньшего основания. Площадь меньшего четырехугольника равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

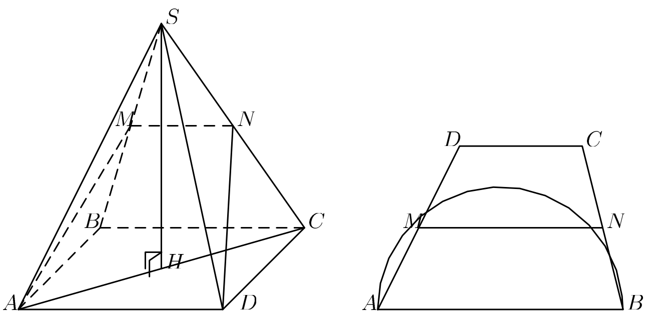
Ответ **2**♦ Площади относятся как $S_{KBCN} : S_{ABCD} = 7 : 27$.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ задано отношение длин нижнего и верхнего оснований $AD : BC = 2 : 1$, рис. 20b,



(a) (b)

Рис. 19. Трапеция-3



$V = \frac{1}{3}Sh$

(a) (b)

Рис. 20. Эксперимент включения eepic-файла

известна величина площади $S_{ABCD} = 27$, проведен отрезок $KN||AD$, $K \in AB$, $N \in CD$, так, что $AK : KB = 2 : 1$, $DN : NC = 2 : 1$. Требуется найти величину меньшей из площадей четырехугольников S_{AKND} или S_{KBCN}. Пусть $AB = 3x$. Тогда $AK = 2x$, $KB = x$. Пусть $CD = 3y$. Аналогично получим $DN = 2y$, $NC = y$. Пусть верхнее основание трапеции равно $3n$, нижнее основание равно $3m$. Тогда $AE = BC = 3n$, $ED = 3m - 3n$. Из подобия $\triangle CED \propto \triangle CGN$ найдем $GN = m - n$. Поэтому $KN = KG + GN = 3n + m - n = 2n + m$. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна $3h$. Тогда высота трапеции $AKND$ равна $2h$, высота трапеции $KBCN$ равна h. Теперь вычислим площади искомых четурехугольников,
$S_{KBCN} = h\frac{BC+KN}{2} = h\frac{3n+2n+m}{2} = h\frac{5n+m}{2}$,
$S_{AKND} = 2h\frac{AD+KN}{2} = 2h\frac{3m+2n+m}{2} = 2h\frac{2n+4m}{2}$, $m = 2a$, $n = a$,
$S_{KBCN} = h\frac{5n+m}{2}$, $S_{AKND} = 2h\frac{2n+4m}{2}$, $S_{KBCN} = h\frac{7}{2}$, $S_{AKND} = h\frac{20}{2}$,
Теперь очевидно, что большая площадь будет у трапеции $AMND$. Используем теперь то, что величина площади трапеции $ABCD$ задана и равна 27,
$S_{AKND} + S_{KBCN} = ha\frac{20}{2} + ha\frac{7}{2} = 27$, $ha\frac{27}{2} = 27$, $ha = 2$,
$S_{AKND} = 20$, $S_{KBCN} = 7$. ■

a02-14. В трапеции длина диагонали равна 60, высота равна 36, площадь равна 1350. Длина второй диагонали равна d, причем
$\boxed{\mathbf{1}}$ $d \in (0;\ 43)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $d \in [43;\ 46)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $d \in [46;\ 49)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $d \in [49;\ 53)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $d \in [53;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 45.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями $AD||BC$, рис. 21a, задано $AC = d = 60$, $CK \perp AD$, $K \in AD$, $CK = h = 36$, известна величина площади $S_{ABCD} = S = 1350$. Пусть $BC = y$, $KD = x$. Проведем отрезок $BE||CK$. Тогда $EK = y$, по теореме Пифагора для $\triangle ACK$ найдем катет $AK = m = \sqrt{d^2 - h^2}$, $S_{ABCD} = S = h\frac{y+m+x}{2}$. Отсюда $\frac{2S}{h} = y + m + x$, $(\star)$ $x + y = \frac{2S}{h} - m$, по теореме Пифагора для $\triangle BED$ найдем гипотенузу $BD = \sqrt{h^2 + (x+y)^2}$. Пордставим

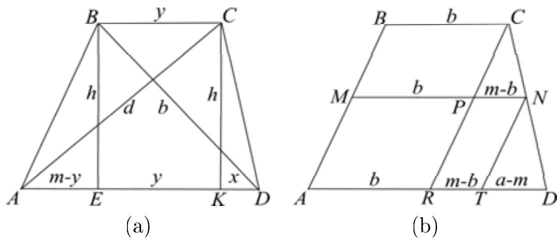


Рис. 21. Трапеция-4

значение $x+y$ из ($\star$), $BD=\sqrt{h^2+\left(\frac{2S}{h}-\sqrt{d^2-h^2}\right)^2}$. Теперь подставим числовые значения,

$BD=\sqrt{36^2+\left(\frac{2\cdot1350}{36}-\sqrt{60^2-36^2}\right)^2}=\sqrt{36^2+\left(75-48\right)^2}$
$=\sqrt{36^2+27^2}=9\sqrt{4^2+3^2}=45.$ ■

14.3.5.3. Равнобедренная трапеция

a02-15. Основания равнобедренной трапеции относятся как $3:7$, а диагональ делит острый угол пополам. Тангенс острого угла трапеции равен

$\boxed{1}$ $\frac{7}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{3}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\boxed{4}$ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ $\boxed{5}$ $\frac{4}{3}$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность. Условие равенства углов при вершине трапеции, на которые делит диагональ AC угол BAD, рис. 22a, влечет за собой равенство дуг, на которые опираются углы $\angle BAC$ и $\angle CAD$, вписанные в эту окружность. Таким образом, дуги AB, BC, CD равны, равны и хорды, опирающиеся на эти дуги. Эти хорды совпадают с боковыми сторонами трапеции AB, BC и ее меньшем основанием. Итак, в равнобедренной трапеции, у которой диагональ делит острый угол пополам,

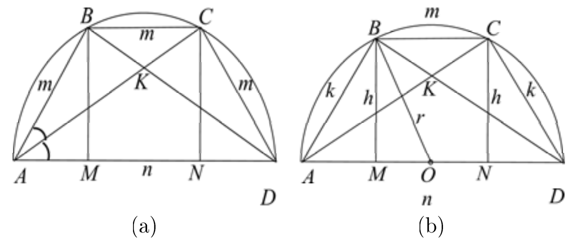


Рис. 22. |2020|Трапеция-6

меньшее основание равно боковой стороне. Опустим перпендикуляры $BM\perp AD$, $M\in AD$, $CN\perp AD$, $N\in AD$. Тогда $MN=BC=3$, $AM=ND=\frac{7-3}{2}=2$,
$BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\angle BAM=\frac{BM}{AM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ■

a02-16. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

$\boxed{1}$ 48 $\boxed{2}$ 96 $\boxed{3}$ 72 $\boxed{4}$ 108 $\boxed{5}$ 144

Ответ $\boxed{2}$♦ $S=96$.

Решение. Так же как в предыдущей задаче, убедимсся в том, что диагональ, основание и боковая сторона образуют равнобедренный треугольник. Поэтому стороны трапеции равны 3; 13; 13; 13. Высота равна 12. ■

14.3.5.4. Вписанные и описанные многоугольники

a02-17. Периметры вписанного и описанного около окружности правильных шестиугольников относятся как

$\boxed{1}$ $1:2$ $\boxed{2}$ $2:3$ $\boxed{3}$ $3:4$ $\boxed{4}$ $4:5$ $\boxed{5}$ $\sqrt{3}:2$

Ответ $\boxed{5}$♦ $\sqrt{3}:2$.

Решение. Соединив отрезками центр вписанного круга (совпадает с центром описанного круга) со всеми вершинами правильного шестиугольника, получим шесть равных равносторонних треугольников. Радиус вписанного круга равен высоте треугольника, а радиус описанного круга равен стороне треугольника. Поэтому искомая величина равна косинусу половины внутреннего угла правильного треугольника, т.е. $\cos 30°$. ■

14.3.5.5. Окружность, описанная около равнобедренной трапеции

а02-18. Найдите диагональ равнобедренной трапеции с основаниями $20\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции. .

1 $20\sqrt{5}$ **2** 45 **3** $10\sqrt{5}$ **4** 25 **5** 40

Ответ **5**♦ 40.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$, рис. 22b, $AD = 20\sqrt{5}$, $BC = 12\sqrt{5}$. Тогда $AM = \frac{AD-BC}{2} = 4\sqrt{5}$. Так как AD — диаметр окружности, то ее радиус $r = \frac{AD}{2} = 10\sqrt{5}$. Используя теорему Пифагора для $\triangle BOM$, найдем высоту трапеции, $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{500-180} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$. Диагональ найдем с помощью теоремы Пифагора,
$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{16^2 \cdot 5 + 64 \cdot 5} = 40$. ■

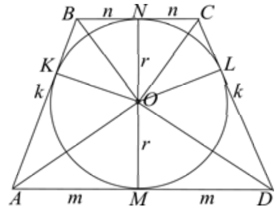
14.3.5.6. Трапеция, описанная около окружности

а02-19. Площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 20, острый угол при основании равен 30°. Боковая сторона трапеции равна

1 $\sqrt{40}$ **2** $\sqrt{80}$ **3** $\sqrt[4]{200}$ **4** $\sqrt[4]{60}$ **5** $\sqrt[4]{800}$

Ответ **1**♦ $b = \sqrt{40}$.

Решение. Пусть острый угол при основании трапеции $ABCD$, рис. 23a, равен 2α, радиус вписанного круга равен r. Тогда $AM = r \operatorname{ctg}\alpha$, $BN = r \operatorname{tg}\alpha$, $S_{AOM} = \frac{r^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, $S_{BON} = \frac{r^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $S_{ABCD} = 4(S_{AOM} + S_{BON})$, $S = \frac{4r^2}{\sin 2\alpha}$;
$AB = AK + KB = AM + BN = \frac{2r}{\sin 2\alpha}$, $AB = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{40}$. ■



(a) (b)

Рис. 23. ||Трапеция-7

а02-20. Если в описанной около круга равнобедренной трапеции радиус этого круга составляет 95% расстояния от центра этого круга до ближней вершины, то косинус острого угла трапеции равен

1 0, 805 **2** 0, 445 **3** 0, 125 **4** 0, 375 **5** 0, 925

Ответ **1**♦ 0,805.

Решение. Пусть острый угол при основании трапеции $ABCD$, рис. 23a, равен 2α, радиус вписанного круга равен r. Тогда $BO = z = \frac{r}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \frac{r}{z} = 0{,}95 = \frac{19}{20}$,
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 = 0{,}805$. ■

а02-21. Если в описанной около круга равнобедренной трапеции расстояние от центра этого круга до дальней вершины в 2 раза больше радиуса круга, то тангенс острого угла трапеции равен

1 0, 96 **2** $\sqrt{3}$ **3** $\dfrac{2}{3}$ **4** 0, 25 **5** 0, 75

Ответ **2**♦ $\sqrt{3}$

а02-22. В равнобедренную трапецию с основаниями 48 и 108 вписан круг. Его радиус равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ $\boxed{1}$♦ $r = 36$.

Решение. Если основания $a = 2m$ и $b = 2n$, и в трапецию можно вписать круг, рис. 23а, то боковая сторона $AB = m + n$. По теореме Пифагора $(2r)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, откуда после приведения подобных получим $r = \frac{\sqrt{ab}}{2} = 36$. ■

a02-23. В описанной около круга равнобедренной трапеции расстояние от центра этого круга до дальней вершины относится к радиусу круга как $\sqrt{5} : 1$, длина меньшего основания равна 7. Найдите большее основание трапеции и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{3}$♦ $b = 28$.

Решение. Если основания $a = 2m$ и $b = 2n$, и в трапецию можно вписать круг, рис. 23а, то боковая сторона $AB = m + n$. По условию задачи,
$OM : AO = 1 : \sqrt{5}$. Если $\angle OAM = \angle OAK = \alpha$, то $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AM : OM = \operatorname{ctg}\alpha$, $ON : BN = \operatorname{ctg}\alpha$,
$AM : BN = \operatorname{ctg}^2\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$, $\operatorname{ctg}^2\alpha = 4$,
поэтому $AD = 4BC = 28$. ■

14.4. Многоугольники

a02-24. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса острого угла BAD пересекает сторону BC в точке M такой, что $BM : MC = m : n$, угол MAD равен β. Найдите угол между отрезками AM и AC.

♦ $\angle MAC = \arcsin\left(\frac{n}{\sqrt{m^2+(m+n)^2+2m(m+n)\cos(2\beta)}}\sin\beta\right)$.

Решение 1 (теорема косинусов). Пусть $BM = m$, $MC = n$. рис. 24 $\angle BAM = \angle MAD = \beta$, $\angle BMA = \angle MAD = \beta$, поэтому $AB = BM = m$. $\angle ABC = \pi - 2\beta$, по теореме косинусов
$AM^2 = m^2 + m^2 + 2m^2\cos(2\beta)$,

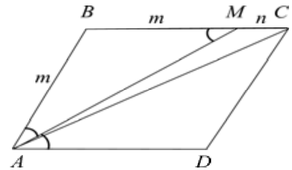


Рис. 24. 3468

$AC^2 = m^2 + (m+n)^2 + 2m(m+n)\cos(2\beta)$,
$\cos\angle MAC = \frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2AM\cdot AC}$;
$\cos\angle MAC = \frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2AM\cdot AC}$; ■

Решение 2 (теорема синусов). По теореме синусов
$\frac{MC}{\sin\angle MAC} = \frac{AC}{\sin\angle AMC}$;
$\angle AMC = \pi - \beta$,
$\sin\angle MAC = \frac{MC}{AC}\sin\angle AMC$,
$\sin\angle MAC = \frac{n}{\sqrt{m^2+(m+n)^2+2m(m+n)\cos(2\beta)}}\sin\beta$. ■

Тема 21. Применение векторной алгебры

21.1. Теоретические сведения

21.1.1. Определение вектора

Вектором называется пара вещественных чисел $(x;\, y)$. Векторы $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$ называются равными, если и только если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Порядок чисел существенен, так что при $x \neq y$ векторы $(x;\, y)$ и $(y;\, x)$ различны. Если вектору $(x;\, y)$ сопоставить точку на плоскости с декартовыми координатами x и y, то каждому вектору будет сопоставлена единственная точка и каждой точке плоскости будет сопоставлен единственный вектор, т.е. это отображение будет взаимно-однозначным. Каждой точке на плоскости можно сопоставить отрезок, начинающийся в начале координат и оканчивающийся в этой точке. Такой отрезок называют направленным отрезком. К направленному отрезку можно применить преобразование параллельного переноса. При этом получится отрезок, параллельный первоначальному, имеющий ту же длину и направление. Такой отрезок называют свободным вектором. Он считается равным первоначальному вектору.
Два вектора $\overrightarrow{a} = (x_1;\, y_1)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2;\, y_2)$ можно сложить по правилу $(x_1;\, y_1) + (x_2;\, y_2) = (x_1 + x_2;\, y_1 + y_2)$.
Вектор $\overrightarrow{a} = (x;\, y)$ можно умножить на число m по правилу $m(x;\, y) = (mx;\, my)$.
Операции сложения векторов и умножения вектора на число подчиняются правилам
(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$,
(2) $m(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = m\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}$,
(3) $m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{a} = (m + n)\overrightarrow{a}$.

Длиной вектора $\overrightarrow{a} = (x;\, y)$ называется число $\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

21.1.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется число, равное $\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.
Для вычисления этого угла следует построить плоскость, содержащую оба вектора, параллельным переносом переместить их так, чтобы они начинались в начале декартовой системы координат, один из них располагался вдоль оси абсцисс, а второй вектор был направлен в верхнюю полуплоскость. Тогда угол на тригонометрическом круге, отсчитываемый от первого вектора к второму, равен α. Для параллельных сонаправленных векторов этот угол равен нулю, для параллельных противонаправленных векторов этот угол равен π.
Для обозначения скалярного произведения вектора $\overrightarrow{a}$ и вектора $\overrightarrow{b}$ используется символ $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$. Для той же цели можно использовать и символ $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}$, если только этот символ не будет взаимодействовать с окружающими элементами формулы, в которой он присутствует. Например, можно написать $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)$, но нельзя записать $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$, так как порядок выполнения операций умножения с участием векторов существенен. Но можно написать $\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})^2 = \overrightarrow{b}^2 - 2\overrightarrow{b}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}^2$. В частности, $\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\right)} = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}$.
Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a} = (x_1;\, y_1)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2;\, y_2)$ можно вычислить по формуле $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.
Векторы $\overrightarrow{a} = (x_1;\, y_1) \neq (0;\, 0)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2;\, y_2) \neq (0;\, 0)$ называются параллельными, если и только если найдется такое

вещественное число m, что $\begin{cases} x_2 = mx_2 \\ y_2 = my_1. \end{cases}$ Эти два условия равносильны условию $(x_2; y_2) = m(x_1; y_1)$. Нулевой вектор (0; 0) считается параллельным любому другому вектору. В частности, нулевой вектор параллелен самому себе. Таким образом, любой вектор параллелен самому себе. Векторы $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2)$ параллельны, если и только если $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.
Обратим внимание на то, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ не являются параллельными, если и только если система линейных уравнений $(\star)$ $\begin{cases} x_1 \cdot m + x_2 \cdot n = x_3 \\ y_1 \cdot m + y_2 \cdot n = y_3 \end{cases}$ имеет единственное решение $(m; n)$ для любой пары вещественных чисел x_3 и y_3. Заметим также, что если эта система имеет единственное решение для некоторой пары вещественных чисел x_3 и y_3, то система имеет единственное решение для любой другой пары вещественных чисел x_4 и y_4.
Если векторы $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2)$ не являются параллельными, то для любого вектора $\overrightarrow{c} = (x_3; y_3)$ найдутся такие действительные числа $(m; n)$, что $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$. Для вычисления этих чисел требуется решить систему $(\star)$, которая, как мы только что отметили, имеет единственное решение. Вычисление таких чисел $(m; n)$ называется разложением вектора $\overrightarrow{c}$ по паре векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$. Иногда этот процесс называется разложением вектора $\overrightarrow{c}$ по паре неколинеарных векторов. Колинеарные векторы — это то же самое, что параллельные векторы, только английское слово записано русскими буквами.
Векторы $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1) \neq (0; 0)$ и $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2) \neq (0; 0)$ называются перпендикулярными, если и только если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Это условие равносильно условию $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 0$, и равносильно условию $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Нулевой

вектор (0; 0) считается перпендикулярным любому другому вектору.

21.2. Свойства векторов

a02-1. Укажите вектор, перпендикулярный прямой $3x + 4y = 25$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ (3; 4) $\boxed{\mathbf{2}}$ (4; 3) $\boxed{\mathbf{3}}$ (3; −4) $\boxed{\mathbf{4}}$ (−4; 3) $\boxed{\mathbf{5}}$ (9; 16)
Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ (3; 4).

Решение. Пусть две различные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат на прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{a} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ параллелен прямой l. Так как $3x_1 + 4y_1 = 25$, $3x_2 + 4y_2 = 25$, то $3(x_1 - x_2) + 4(y_1 - y_2) = 0$, а это означает, что вектор $\overrightarrow{b} = (3; 4)$ перпендикулятен вектору $\overrightarrow{a} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ и поэтому он перпендикулярен прямой l. ■

a02-2. Укажите вектор, параллельный прямой $3x + 4y = 25$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ (3; 4) $\boxed{\mathbf{2}}$ (4; 3) $\boxed{\mathbf{3}}$ (3; −4) $\boxed{\mathbf{4}}$ (−4; 3) $\boxed{\mathbf{5}}$ (9; 16)
Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ (−4; 3).

Решение. Пусть две различные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат на прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{a} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ параллелен прямой l. Так как $3x_1 + 4y_1 = 25$, $3x_2 + 4y_2 = 25$, то $3(x_1 - x_2) + 4(y_1 - y_2) = 0$, а это означает, что вектор $\overrightarrow{c} = (-4; 3)$ параллелен вектору $\overrightarrow{a} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ и поэтому он параллелен прямой l. Обратите внимание на то, что вектор $\overrightarrow{c} = (-4; 3)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{b} = (3; 4)$. ■

a02-3. Пусть $\overrightarrow{a} = (1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (3; 4)$, $\overrightarrow{c} = (11; 16)$, числа m и n выбраны так, что $(\star)$ $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$. Значение величины $m^2 + n^2$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0
Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $m = 2$, $n = 3$.

Решение. Равенство $(\star)$ означает, что равны первые компоненты векторов $\overrightarrow{c}$ и $m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$ равны их вторые компоненты. Решим систему $\begin{cases}1\cdot m+3\cdot n=11,\\ 2\cdot m+4\cdot n=16.\end{cases}$ Умножим первое уравнение на 2, получим $\begin{cases}2\cdot m+6\cdot n=22,\\ 2\cdot m+4\cdot n=16,\end{cases}$ вычтем уравнения, $2n=6$, $n=3$. Умножим первое уравнение на 4, умножим второе уравнение на 3, получим $\begin{cases}4\cdot m+12\cdot n=44,\\ 6\cdot m+12\cdot n=48,\end{cases}$ вычтем уравнения, $2m=4$, $m=2$. ■

21.3. Векторы в треугольнике

a02-4. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, Найдите все пары чисел $(m;\,n)$ такие, что что точка K такая, что $\overrightarrow{CK}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$, лежит на отрезке AB.

$\boxed{1}$ $m=\sqrt{1-n^2}$, $n\in[-1;\,1]$ $\boxed{2}$ $m=\sqrt{1-n^2}$, $n\in[0;\,1]$
$\boxed{3}$ $m=1-n$, $n\in(-\infty;\,+\infty)$ $\boxed{4}$ $m=1-n$, $n\in[-1;\,1]$
$\boxed{5}$ $m=1-n$, $n\in[0;\,1]$

Ответ $\boxed{5}$♦ $m=1-n$, $n\in[0;\,1]$.

Решение. $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{a}+n(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$, $n\in[0;\,1]$, $\overrightarrow{CK}=(1-n)\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$, $n\in[0;\,1]$. ■

a02-5. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, M — основание медианы, опущенной из вершины C на сторону AB. Найдите такую пару чисел m, n, что $\overrightarrow{CM}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$.

$\boxed{1}$ $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$ $\boxed{2}$ $m=\frac{\overrightarrow{b}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})^2}, n=\frac{-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})^2}$

$\boxed{3}$ $m=\frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}, n=\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}$ $\boxed{4}$ $m=\frac{\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})^2}, n=\frac{\overrightarrow{b}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})^2}$

$\boxed{5}$ $m=\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}, n=\frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|}$

Ответ $\boxed{1}$♦ $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$.

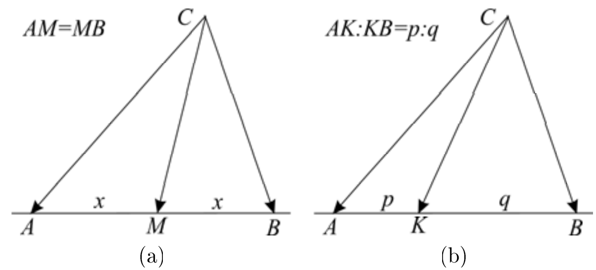


Рис. 25. Вычисление (a) медианы как вектора

Решение. $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, рис. 25a. ■

a02-6. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, точка K лежит на отрезке AB, причем $AK:KB=p:q$. Найдите пару чисел $(m;\,n)$ такую, что $\overrightarrow{CK}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$.

$\boxed{1}$ $m=\frac{q}{p^2+q^2}$, $n=\frac{p}{p^2+q^2}$ $\boxed{2}$ $m=\frac{p}{2}$, $n=\frac{q}{2}$ $\boxed{3}$ $m=\frac{p}{p+q}$, $n=\frac{q}{p+q}$
$\boxed{4}$ $m=\frac{q}{p+q}$, $n=\frac{p}{p+q}$ $\boxed{5}$ $m=\frac{p}{p^2+q^2}$, $n=\frac{q^2}{p^2+q^2}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $m=\frac{q}{p+q}$, $n=\frac{p}{p+q}$.

Решение. Пусть (рис. 25b) $AK:KB=p:q$. Тогда $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{a}+\frac{p}{p+q}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$, $\overrightarrow{CK}=\frac{q}{p+q}\overrightarrow{a}+\frac{p}{p+q}\overrightarrow{b}$. ■

a02-7. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, точка K лежит на отрезке AB, причем $AK:KB=3:4$. Найдите пару чисел $(m;\,n)$ такую, что $\overrightarrow{CK}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$.

$\boxed{1}$ $m=\frac{4}{3}$, $n=\frac{3}{4}$ $\boxed{2}$ $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{4}{2}$ $\boxed{3}$ $m=\frac{9}{25}$, $n=\frac{16}{25}$
$\boxed{4}$ $m=\frac{4}{7}$, $n=\frac{3}{7}$ $\boxed{5}$ $m=\frac{3}{7}$, $n=\frac{4}{7}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $m=\frac{4}{7}$, $n=\frac{3}{7}$.

Решение. $\overrightarrow{CK} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{CK} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$, рис. 25b, $p = 3, q = 4$. ■

a02-8. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, L — основание биссектрисы, опущенной из вершины C на сторону AB или ее продолжение. Найдите такую пару чисел m, n, что $\overrightarrow{CH} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$\boxed{1}$ $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ $\boxed{2}$ $m = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{-\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$

$\boxed{3}$ $m = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ $\boxed{4}$ $m = \frac{\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$

$\boxed{5}$ $m = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

Ответ $\boxed{5}$♦ $m = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$.

Решение. $\overrightarrow{CK} = \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a})$,

$\overrightarrow{CK} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$.

Решение можно также записать в более ясном виде,

$\overrightarrow{CK} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$,

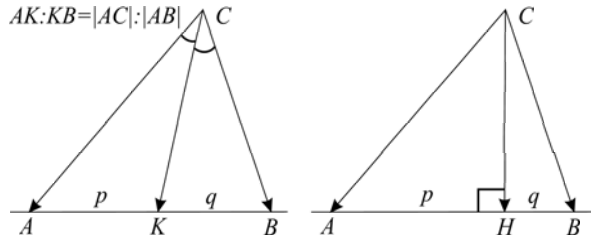
$\overrightarrow{CK} = \left(|\vec{a}|^{-1} + |\vec{b}|^{-1}\right)^{-1}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$. ■

a02-9. В треугольнике ABC известно, что $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB или ее продолжение. Найдите такую пару чисел m, n, что $\overrightarrow{CH} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$\boxed{1}$ $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ $\boxed{2}$ $m = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{-\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$

$\boxed{3}$ $m = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ $\boxed{4}$ $m = \frac{\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$

$\boxed{5}$ $m = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$



(a) (b)

Рис. 26. Вычисление (a) биссектрисы и (b) высоты как вектора

Ответ $\boxed{4}$♦ $m = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{-\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$.

Решение. В предыдущей задаче было показано, что при любом расположении точки H на прямой AB (т.е. на отрезке AB или на его продолжении) найдется такое число m, что $\overrightarrow{CH} = m\vec{a} + (1-m)\vec{b}$. Найдем такое m, что (рис. 26d)

$\left(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$. $\left(m\vec{a} + (1-m)\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}\right) = 0$,

$\left(\vec{b} - m(\vec{b} - \vec{a}), \vec{b} - \vec{a}\right) = 0$,

$\vec{b}(\vec{b} - \vec{a}) - m(\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{a}) = 0$, $m = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2} = 0$,

$1 - m = \frac{\vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{b}\vec{a}}{(\vec{b}-\vec{a})^2} = 0$, $1 - m = \frac{\vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a}}{(\vec{b}-\vec{a})^2} = 0$,

$1 - m = \frac{-\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2} = 0$, ■

a02-10. На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $CM : MA = m : n$. На стороне BC взята точка N так, что $CN : NB = p : q$. Отрезки AN и BM пересекаются в точке K. Найдите $KM : KB$.

$\boxed{1}$ $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ $\boxed{2}$ $m = \frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n = \frac{-\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$

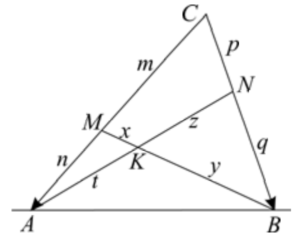
$\boxed{3}$ $m=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ $\boxed{4}$ $m=\frac{\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}, n=\frac{\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a})^2}$
$\boxed{5}$ $m=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

Ответ $\boxed{5}$♦ $m=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}, n=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$. Пусть $MK:KB=x:(1-x)$, $NK:KA=y:(1-y)$, рис. 27а. Тогда
$\overrightarrow{CM}=\frac{m}{m+n}\vec{a}$, $\overrightarrow{MA}=\frac{n}{m+n}\vec{a}$,
$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}-\frac{m}{m+n}\vec{a}$,
$\overrightarrow{MK}=x\overrightarrow{MB}=x\left(\vec{b}-\frac{m}{m+n}\vec{a}\right)$,
$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MK}=\frac{m}{m+n}\vec{a}+x\left(\vec{b}-\frac{m}{m+n}\vec{a}\right)$,
$\overrightarrow{CN}=\frac{p}{p+q}\vec{b}$, $\overrightarrow{NB}=\frac{q}{p+q}\vec{b}$,
$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}=\frac{q}{p+q}\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-\frac{p}{p+q}\vec{b}$,
$\overrightarrow{NK}=y\overrightarrow{MB}=y\left(\vec{a}-\frac{p}{p+q}\vec{b}\right)$,
$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NK}=\frac{p}{p+q}\vec{b}+y\left(\vec{a}-\frac{p}{p+q}\vec{b}\right)$, поэтому
$\frac{m}{m+n}\vec{a}+x\left(\vec{b}-\frac{m}{m+n}\vec{a}\right)=\frac{p}{p+q}\vec{b}+y\left(\vec{a}-\frac{p}{p+q}\vec{b}\right)$,
$(1-x)\frac{m}{m+n}\vec{a}+x\vec{b}=(1-y)\frac{p}{p+q}\vec{b}+y\vec{a}$,
$\begin{cases}(1-x)\frac{m}{m+n}=y,\\ x=(1-y)\frac{p}{p+q},\end{cases}$ $\begin{cases}x\frac{m}{m+n}+y=1,\\ x+y\frac{p}{p+q}=1.\end{cases}$ Решим эту систему методом алгебраических преобразований, $\begin{cases}x\frac{m}{m+n}\frac{p}{p+q}+y\frac{p}{p+q}=\frac{p}{p+q},\\ x+y\frac{p}{p+q}=1.\end{cases}$
Вычтем первое уравнение из второго, $x-x\frac{m}{m+n}\frac{p}{p+q}=1-\frac{p}{p+q}$,
$x\frac{(m+n)(p+q)-mp}{(m+n)(p+q)}=\frac{q}{p+q}$, $x\frac{(m+n)(p+q)-mp}{(m+n)}=q$. ■

21.4. Применение векторов для решения задач с параметрами

а02-11. Все значения параметра $p>0$, при которых система



(a) (b)

Рис. 27.

уравнений $\begin{cases}(|x|-14)^2+(|y|-12)^2=13^2,\\ 12x+5y=p,\end{cases}$ имеет ровно три различных решения, образуют множество
$\boxed{1}$ $(6-3\sqrt{2};\ 3)\bigcup(3;\ 3\sqrt{2})$ $\boxed{2}$ $(3\sqrt{0,5};\ 3)\bigcup(3;\ 3\sqrt{2})$
$\boxed{3}$ $(3\sqrt{0,5};\ 3\sqrt{2})$ $\boxed{4}$ $\{6-3\sqrt{2};\ 3;\ 3\sqrt{2}\}$ $\boxed{5}$ $\{3\sqrt{0,5};\ 3;\ 3\sqrt{2}\}$

Ответ $\boxed{1}$♦ $b\in(6-3\sqrt{2};\ 3)\bigcup(3;\ 3\sqrt{2})$.

Решение. Первое уравнение определяет четыре окружности с центрами $(\pm14;\ \pm12)$, Радиусы всех окружностей равны 13. Второе уравнение определяет прямую. Ровно три решения будут иметь место при условии двукратного пересечения окружностей A, B, D, крайние положения соответствуют касанию окружности A в точке $x=y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и одновременному касанию B, D. Наиболее эффективен способ решения, основанный на понятии вектора, рис. 28. Вектор OM начинается в точке $(0;\ 0)$ и оканчивается в точке $(14;\ -12)$. Вектор MN начинается в точке $(14;\ -12)$ и оканчивается в точке касания. Так как этот вектор направлен в точку касания, то он перпендикулярен касательной, так что его угловой коэффициент равен $k=-\frac{12}{5}$. Его длина равна радиусу круга,

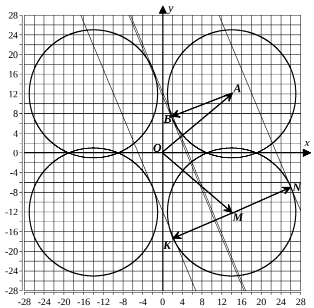


Рис. 28. Графическая иллюстрация решения систем уравнений с двумя переменными

так что $\overrightarrow{MN} = (12;\, 5)$. Наконец, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$,
$\overrightarrow{ON} = (14 + 12;\, -12 + 5) = (26;\, -7)$. Иначе говоря, точка M имеет координаты $x = 26$, $y = -7$. Чтобы определить p, используем уравнение $12x + 5y = p$, $p = 12 \cdot 26 + 5 \cdot (-7) = 277$, Аналогично определяется и второе граничное значение параметра b, для этого придется использовать векторы
$\overrightarrow{OK} = (14 - 12;\, -12 - 5) = (2;\, -17)$, $p = 12 \cdot 2 + 5 \cdot (-17) = -61$,
и $\overrightarrow{OB} = (14 - 12;\, 12 - 5) = (2;\, 7)$, $p = 12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 = 59$,
$p = 229, 108$ ■