Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

А.А.Быков

Решение задач ЕГЭ по математике

Алгебра

Для учащихся 10-х и 11-х классов

Москва 2012

Содержание

Предисловие.

Пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ и к олимпиаде ГУ ВШЭ по математике. Программа подготовки состоит из 4-х учебных модулей, основные темы которых **(1)** алгебраические уравнения и неравенства, **(2)** текстовые задачи, тригонометрия, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, **(3)** задачи с параметром, применение производной и интеграла, **(4)** специфические задачи ЕГЭ. Планиметрия присутствует в виде последней темы каждого модуля. Подготовка к ЕГЭ по математике по нашему мнению должна включать три этапа,
(1) планомерное изучение курса математики в школе на протяжении всех лет учебы,
(2) повторение и углубленное изучение основных типов базисных задач школьной математики, которые являются как бы кирпичиками, из которых строится затем решение всех сложных задач и большинства задач средней сложности,
(3) изучение методов решения сложных задач, каждая из которых состоит из последовательности базисных задач.
Данное пособие предназначено для достижения второй и третьей из поставленных целей. Пособие содержит изложение основных базисных задач школьной математики. Большое внимание мы уделяем форме записи решения, методике обоснования, которая гарантирует получение максимального балла за решенную задачу и исключает возможность придирок со стороны проверяющего.
В некоторых случаях в формулировке и решении некоторых задач используются некоторые понятия, которые впоследствии рассматриваются более подробно. Например, в главах про уравнения и системы в отдельных задачах применяется понятие логарифма. При чтении книги следует учитывать, что применение союзов "и", "или" в быту и в математике отличается. В математических текстах "и" всегда означает одновременное выполнение двух условий, "или" всегда означает выполнение одного из двух условий (а также двух условий одновременно). В бытовых текстах принято опускать некоторые части речи, и при чтении их приходится восстанавливать в соответствии с некоторыми соглашениями, смысл которых иногда не вполне ясен и к тому же меняется со временем. Для большей ясности мы широко используем математические синонимы упомянутых слов, а именно, $\bigcup$ вместо

"или", $\bigcap$ вместо "и". Например, для того, чтобы перечислить те случаи, в которых выполнено условие
$(\star)\ \ f(x)\cdot g(x)\geqslant 0,$
мы используем запись
$(\star\star)\ \ \{f(x)\geqslant 0\bigcap g(x)\geqslant 0\}\bigcup\{f(x)\leqslant 0\bigcap g(x)\leqslant 0\}$
Условие
$x\neq 0,\ x\neq 9,\ x\neq 18$
равносильно условию
$x\neq 0\bigcap x\neq 9\bigcap x\neq 18.$
В пределах одной задачи и ее решения мы используем символы $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ и т.д. для нумерации уравнений. Для ссылки на эти уравнения используются те же символы, например, уравнение $(\star)$ $(p-3)x^2-(2p+3)x+p-2$ при $p=3$ является линейным и имеет единственный корень, а при $p\neq 3$ уравнение $(\star)$ является квадратным и имеет единственный корень при условии нулевого дискриминанта, и т.д. После формулировки задачи сразу приводится ответ, а затем решение. В конце решения окончательный ответ не повторяется. Решение завершается символом $\blacksquare$.
Для обозначения множества значений функции мы используем символ $\Subset$. Например, $x^2-6x+5\Subset[-4;+\infty)$. Отношение $f(x)\Subset Y$ означает, что выполнены одновременно два условия, **(1)** для всех допустимых значений x будет верно $f(x)\in Y$, **(2)** для любого $y\in Y$ найдется такое допустимое x, что $f(x)=y$. Обратим внимание на то, что формула $f(x)\in Y$ означает только, что для всех допустимых x будет верно $f(x)\in Y$. Формула $f(x)\in Y$ не означает, что для всех $y\in Y$ найдется допустимое x, для которого будет верно $f(x)=Y$. Например, формула $x^2-6x+5\in[-5;+\infty)$ верна, а формула $x^2-6x+5\Subset[-5;+\infty)$ неверна. Если множество допустимых x не оговорено в условии задачи, то оно считается совпадающим с естественно областью определения функции $f(x)$. В некоторых задачах явно указывается множество допустимых значений, которое не совпадает с естественной областью определения. В этом случае все функции считаются определенными на этой, более узкой, области, даже если их можно вычислить и при каких-то других значениях переменной.
Для записи упорядоченной пары чисел (например, координат точки на плоскости) мы используем запись (x,y). По внешнему виду эта запись совпадает с записью скалярного произведения

двух векторов, различать эти две операции следует по типу величин в скобках (числа или векторы). Однако, если мы записываем числовые координаты точки, используется запись типа (3,7; 2,4), разделителем является точка с запятой. Это связано с тем, что для записи вещественного числа в России принято использовать запятую для отделения дробной части.

Мы рассчитываем на активное участие читателя, которое предполагает самостоятельное выполнение некоторых выкладок. Как правило, решение сложной задачи состоит в выполнении последовательности более простых операций. Именно планирование такой последовательности и является наиболее важной частью решения. В этом случае мы перечисляем все операции в должном порядке и приводим ответ для каждого этапа, но выполнение простых операций в том случае, если эта операция была подробно описана раньше, предоставляем читателю.

Многие классы задач могут быть решены несколькими способами. Если априорно сделать выбор между несколькими планами решения сделать затруднительно, мы приводим несколько различных решений. Мы делаем это и в тех случаях, когда хотим продемонстрировать преимущество какого-то одного способа решения.

Для организации работы в аудитории и для самостоятельной работы можно использовать также сборники задач "Тематические тесты по математике для учащихся 10 класса", "Тематические тесты по математике для учащихся 11 класса", "Сборник задач по математике для поступающих в вузы, часть 1", "Сборник задач по математике для поступающих в вузы, часть 2". Дополнительные задания расположены в конце каждого модуля. Они разделены на две группы, первую из которых можно использовать в аудитории, вторую — для самостоятельной работы.

Для самостоятельной работы можно также использовать учебные пособия

1) Шабунин М.И. Математика дня поступающих в вузы. Москва, Лаборатория базовых знаний, 1999.

2) Сборник задач по математике для поступающих во втузы под редакцией М.И.Сканави. Москва, Высшая школа, 1994.

3) Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями. Москва. АСТ, 2001.

4) А.П.Иванов. Тесты и контрольные работы по математике. Изд-во Пермского университета, 2000.

Большинство задач, которые использованы в этом пособии для иллюстрации методов решения, в разные годы давались на вступительных экзаменах и олипиадах в Государственном университете — Высшей школе экономики или встречались в вариантах ЕГЭ.

Автор благодарен преподавателям факультета довузовской подготовки ГУ ВШЭ за полезные обсуждения.

Тема 1. Функции и графики

1.1. Преобразование графиков

1.1.1. Понятие графика функции

Определение 1.1. Функция $f(x)$ — это правило, которое позволяет для каждого числового значения переменной $x \in X$ вычислить некоторое числовое значение, которое называется значением функции при данном значении x. Числовое множество X называется областью определения.

Определение 1.2. Множеством значений функции $f(x)$, определенной на множестве X, называется числовое множество Y такое, что

(1) для всех $x \in X$ верно включение $f(x) \in Y$,

(2) для всех $y \in Y$ найдется такое $x \in X$, что $f(x) = Y$.

Определение 1.3. Графиком функции $f(x)$, $x \in X$, называется множество D точек на плоскости (x, y) состоящее из всех точек (x, y) таких, что **(1)** $x \in X$, **(2)** $y = f(x)$.

Замечание. Имена переменных x и y могут быть изменены на любые другие. Например, сложная функция определяется как функция $y = F(t)$, $t \in T$, причем $x = \varphi(t)$, $t \in T$, $y = f(x)$. Имя функции f, напротив, в пределах одной задачи изменено быть не может. Разные функции обозначаются разными буквами, и для каждой функции задается своя область определения и свое множество значений.

Например, область определения функции
$f(x) = 2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ совпадает с отрезком $[1;\ 5]$, множество значений совпадает с отрезком $[2;\ 4]$, графиком является верхняя половина окружности с центром в точке $O(3;\ 0)$ и радиусом $R = 2$.

1.1.2. Сводная таблица преобразований графиков

Теоретические сведения Перечислим основные преобразования, которые можно использовать для построения графиков сложных функций. Пусть множество точек D на плоскости $(x,\, y)$ — график функции $y = f(x)$. Тогда

1.1.3. Преобразование переноса

$y = f(x - a)$	$a > 0$	Параллельный перенос множества D вдоль оси x вправо на расстояние a.
$y = f(x + a)$	$a > 0$	Параллельный перенос множества D вдоль оси x влево на расстояние a.
$y = f(x) + a$	$a > 0$	Параллельный перенос вдоль оси y вверх на расстояние a.
$y = f(x) - a$	$a > 0$	Параллельный перенос вдоль оси y вниз на расстояние a.

1.1.4. Преобразование растяжения

$y = f(x \cdot a)$	$a > 1$	Сжатие вдоль оси x в a раз.
$y = f\left(\frac{x}{a}\right)$	$a > 1$	Растяжение вдоль оси x в a раз.
$y = a \cdot f(x)$	$a > 1$	Растяжение вдоль оси y в a раз.
$y = \frac{f(x)}{a}$	$a > 1$	Сжатие вдоль оси y в a раз.

1.1.5. Преобразование отражения

$y = -f(x)$	Зеркальное отражение относительно оси Ox.
$y = 2q - f(x)$	Зеркальное отражение относительно прямой $y = q$.
$y = f(-x)$	Зеркальное отражение относительно оси Oy.
$y = f(2p - x)$	Зеркальное отражение относительно прямой $x = p$.

1.1.6. Преобразование симметрии

$y = -f(-x)$	Центральная симметрия относительно начала координат.
$y = 2q - f(2p - x)$	Центральная симметрия относительно точки (p, q).
$x = f(y)$	Зеркальное отражение относительно линии $y = x$. Это преобразование можно рассматривать также как переход к обратной функции по отношению к функции $y = f(x)$, если выполнены достаточные условия существования обратной функции, например, $y = f(x)$ монотонна на всей своей области определения. Вообще говоря, рассматриваемый в данном и трех последующих пунктах геометрический образ не всегда можно представить как график некоторой функции.

1.1.7. Преобразование поворота

$x = -f(y)$	Поворот на 90° против часовой стрелки относительно начала координат.
$x = f(-y)$	Поворот на 90° по часовой стрелке относительно начала координат.
$x = -f(-y)$	Зеркальное отражение относительно линии $y + x = 0$.

1.1.8. Преобразования переноса и отражения

1. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом вправо на 2 единицы и вниз на 3 единицы. Функция $g(x)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x-2)+3$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x+2)+3$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2f(3x)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x-2)-3$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x+2)-3$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $g(x) = f(x-2) - 3$.

Решение. Сначала выполним перенос вправо на 2 единицы и получим в качестве промежуточного результата функцию $g_1(x) = f(x-2)$. Теперь перенесем график $g_1(x)$ вниз на 3 единицы и получим $g(x) = g_1(x) - 3 = f(x-2) - 3$. ■

2. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом вправо на 3 единицы и сжатием вдоль оси абсцисс в 2 раза, при котором начало кординат не смещается. Функция $g(x)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f\left(\frac{x-6}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $f\left(\frac{x+6}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $f\big(2x-6\big)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $f\left(\frac{x-3}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $f\big(2x-3\big)$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $g(x) = f(2x-3)$.

Решение. Сначала выполним перенос вправо на 3 единицы и получим $g_1(x) = f(x-3)$. Теперь выполним сжатие графика $g_1(x)$ вдоль оси Oy в 2 раза и получим окончательно $g(x) = f(2x-3)$, рис. 1a, буквами $(a), (b), (c)$ показаны три этапа последовательного преобразования графика. ■

3. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ сжатием вдоль оси абсцисс в 2 раза, при котором начало кординат не смещается, и затем параллельным переносом вправо на 3 единицы. Функция $g(x)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f\left(\frac{x-6}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $f\left(\frac{x+6}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $f\big(2x-6\big)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $f\left(\frac{x-3}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $f\big(2x-3\big)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $g(x) = f(2x-6)$.

Решение. Сначала выполним сжатие в 2 раза и получим $g_1(x) = f(2x)$. Теперь выполним перенос графика $g_1(x)$ вправо на 3 единицы и получим окончательно $g(x) = f(2(x-3)) = f(2x-6)$, рис. 1b. ■

Замечание. Эти два примера показывают, что порядок выполнения преобразований сдвига и растяжения вдоль одной оси важен, при перемене порядка результат меняется.

1.1.9. Преобразование наименьших и наибольших значений

Определение 1.4. Наименьшим значением функции $f(x)$, $x \in X$, называется такое число m, что

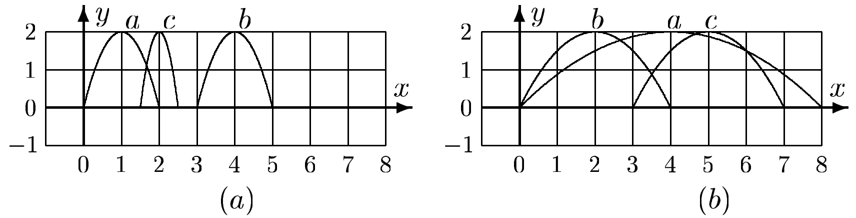


Рис. 1. Композиция преобразований сдвига и сжатия

(1) для всех $x \in X$ верно неравенство $f(x) \geqslant m$,
(2) найдется такое $x_1 \in X$, что $f(x_1) = m$.
Наибольшим значением функции $f(x)$, $x \in X$, называется такое число M, что
(1) для всех $x \in X$ верно неравенство $f(x) \leqslant M$,
(2) найдется такое $x_2 \in X$, что $f(x_2) = M$.

Теоретические сведения Если число M равно наибольшему значению функции $f(x)$ на множестве X и $k > 0$, то наибольшее значение функции $g(x) = kf(x) + b$ на множестве X существует и равно $kM + b$.
Если число M равно наибольшему значению функции $f(x)$ на множестве X и $k < 0$, то наименьшее значение функции $g(x) = kf(x) + b$ на множестве X существует и равно $kM + b$. Иначе говоря, при преобразовании сдвига и растяжения вдоль оси Oy наибольшее значение функции изменяется. То же верно для наименьшего значения.
Если число M равно наибольшему значению функции $f(x)$ на множестве $[x_1; x_2]$ и $k > 0$, то наибольшее значение функции $g(x) = f(kx + b)$ на множестве $\left[\dfrac{x_1 - b}{k}; \dfrac{x_1 - b}{k}\right]$ существует и равно M. Иначе говоря, при преобразовании сдвига и растяжения вдоль оси Ox наибольшее значение функции не изменяется. То же верно для наименьшего значения.

Замечание. Не всякая функция имеет наименьшее значение. Не всякая функция имеет наибольшее значение. Например,

(1) функция $f(x) = x$, $x \in [0;\ 1)$, не имеет наибольшего значения, но имеет наименьшее значение,
(2) функция $f(x) = -1/x$, $x \in (0;\ 1]$, не имеет наименьшего значения, но имеет наибольшее значение,
(3) функция $f(x) = 1/x$, $x \in (0;\ 1)$, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений,
(4) функция $f(x) = 1/x$, $x \in [1;\ 2]$, имеет наименьшее и наибольшее значения.

4. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и достигает своего наименьшего значения $f_{\min} = 6$ в единственной точке $x^* = 9$. В какой точке достигает своего наименьшего значения функция $(\star)$ $g(x) = 2f(4x - 7) - 5$?
⧫ 4.

Решение 1. Функция $(\star)$ получается из $f(x)$ выполнением следующих преобразований: **(1)** сдвиг вправо на 7 единиц, $g_1(x) = f(x - 7)$, **(2)** сжатие вдоль оси x в 4 раза, $g_2(x) = f(4x - 7)$, **(3)** растяжение вдоль оси y в 2 раза, $g_2(x) = 2f(4x - 7)$, **(4)** сдвиг вдоль оси y на 5 единиц. Чтобы получить ответ, достаточно проследить за тем, как перемещается точка $(9;\ 6)$. В даном случае достаточно даже проследить за перемещением точки $x = 9$ на оси абсцисс, точка $x = 9$ перемещается сначала в точку $x = 9 + 7 = 16$, затем в точку $\frac{16}{4} = 4$, и затем уже не меняется. ■
Решение 2. Искомую кординату можно найти из уравнения $4x - 7 = 9$. ■

5. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и достигает своего наименьшего значения $f_{\min} = 6$ в единственной точке $x^* = 9$. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 2f(4x - 7) - 5$.
⧫ 7.

Решение. Используем решение предыдущей задачи и проследим за перемещением точки $(9;\ 6)$ в вертикальном направлении, сначала $y = 6$, затем $y = 2 \cdot 6 = 12$, и в конце концов $y = 12 - 5 = 7$. ■

1.2. Линейная функция

1.2.1. Уравнение прямой на плоскости

Определение 1.5. Прямая на плоскости — множество всех точек (x, y), для которых $ax + by = c$, причем $a^2 + b^2 > 0$, т.е. параметры a и b не могут быть равны нулю одновременно. Любая прямая на плоскости, которая не параллельна оси ординат, может быть задана как множество всех точек (x, y), для которых $y = kx + b$. В этом случае число k называется угловым коэффициентом прямой. Уравнения $ax + by = c$ и $pax + pby = pc$ при $p \neq 0$ определяют одну и ту же прямую.

Замечание. Прямая, параллельная оси ординат, может быть задана уравнением $x = a$. Прямая, параллельная оси абсцисс, может быть задана уравнением $y = b$. Прямая $y - x = p$ параллельна биссектрисе первой и третьей четвертей координатной плоскости. Прямая $y + x = q$ параллельна биссектрисе второй и четвертой четвертей координатной плоскости.

6. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки (0; 0) и (3; 4).

♦ $-4x + 3y = 0$.

Решение. Данная задача заведомо имеет бесконечно много решений. Найдем одно из них. Запишем уравнение прямой в виде $ax + by = c$. Так как прямая проходит через точку (0; 0), то $a \cdot 0 + b \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$. Так как прямая проходит через точку (3; 4), то $3a + 4b = 0$. Одно из возможных решений $a = -4$, $b = 3$. Все решения этой задачи можно записать в виде $-4px + 3py = 0$ при $p \in (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$. ■

7. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $\mathcal{A}\,(7; 6)$ и $\mathcal{B}\,(3; 4)$.

♦ $x - 2y = -5$.

Решение 1. Запишем уравнение прямой $ax + by = c$. Из условий задачи следует, что $(\star)\ \begin{cases} 7a + 6b = c, \\ 3a + 4b = c. \end{cases}$ Предположим, что величина c известна и найдем a. Для этого умножим первое уравнение $(\star)$ на 2, второе уравнение умножим на 3, $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 14a + 12b = 2c, \\ 9a + 12b = 3c \end{cases}$

$\Rightarrow 5a = -c$. Аналогично $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 21a + 18b = 3c, \\ 21a + 28b = 7c \end{cases} \Rightarrow 10b = 4c$. Поэтому $\begin{cases} c = -5a, \\ b = -2a \end{cases}$ при условии $a \in (-\infty;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$. Все решения задачи можно записать в виде $ax - 2ay = -5a$ при $a \neq 0$. Одно из решений $x - 2y = -5$. ■

Решение 2. Если пройти отрезок $[\mathcal{B}, \mathcal{A}]$, то координата x прирастет на $7 - 3 = 4$ единицы, координата y прирастет на $6 - 4 = 2$ единицы, поэтому угловой коэффициент прямой равен $k = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, уравнение прямой можно записать в виде $y = \dfrac{1}{2}x + b$. Данная прямая проходит через точку $\mathcal{A}$ при условии $6 = \dfrac{1}{2} \cdot 7 + b$, $12 = 7 + 2b$, $5 = 2b$, $b = \dfrac{5}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 5$. ■

8. Найдите значение параметра t, при котором точки M_1, M_2, M_3 на плоскости $(x;\ y)$ с координатами $(0;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(2t - 6;\ 3t - 7)$ лежат на одной прямой.

♦ $t = 5$.

Решение. Если точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой, то угловые коэффициенты прямых, содержащих отрезки $[M_1; M_2]$ и $[M_1; M_3]$ равны. Поэтому $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$. Для вычисления t получится линейное уравнение, которое имеет единственное решение. Решите его самостоятельно. ■

1.2.2. Множество значений линейной функции

9. Известно, что множество значений линейной функции
$(\star)\ \ f(x) = ax + b$
на отрезке $x \in [3;\ 8]$ совпадает с отрезком $[1;\ 6]$. Какое из указанных значений может принимать эта функция в точке $x = 5$?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 7 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 8 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $f(5) \in \{3;\ 4\}$.

Решение. Линейная функция (отличная от константы) может быть возрастающей или убывающей. В зависимости от этого получим для определения коэффициентов уравнения ($\star$) системы

(1) $\begin{cases} 3a + b = 1, \\ 8a + b = 6, \end{cases}$ откуда $a = 1$, $b = -2$, и тогда $f(5) = 3$, и

(2) $\begin{cases} 8a + b = 1, \\ 3a + b = 6, \end{cases}$ откуда $a = -1$, $b = 9$, и тогда $f(5) = 4$. ■

1.2.3. Расстояние от точки до начала координат

Теоретические сведения Расстояние от точки (x, y) на плоскости до начала координат равно $\sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Найдите расстояние от точки (10; 24) до начала координат.
⧫ 26.
Решение. Расстояние равно $\sqrt{10^2 + 24^2} = 2\sqrt{5^2 + 12^2} = 2 \cdot 13$. ■

1.2.4. Расстояние между двумя точками на плоскости

Теоретические сведения Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на плоскости равно $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

11. Найдите расстояние между точками $(-5; -6)$ и $(10; 30)$.
⧫ 39.
Решение. Расстояние равно
$\sqrt{(10 - (-5))^2 + (30 - (-6))^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} =$
$= \sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 12^2} = 3\sqrt{5^2 + 12^2} = 3 \cdot 13 = 39.$ ■

12. Найдите площадь квадрата на плоскости (x, y), две противоположные вершины которого находятся в точках, координаты которых (x_1, y_1) и (x_2, y_2) являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 16. \end{cases}$
⧫ 17.

Решение. Система $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$ называется виетовской. Для ее решения следует составить и решить квадратное уравнение

($\star$) $x^2 - px + q = 0$,
$x = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, причем соответствующие значения y можно найти по формуле $y = \dfrac{p \pm \left(-\sqrt{p^2-4q}\right)}{2}$. Эти формулы справедливы при условии положительного дискриминанта $D = p^2 - 4q$ квадратного уравнения ($\star$). Если дискриминант равен нулю, то единственная точка имеет координаты $x = y = \dfrac{p}{2}$. Если дискриминант меньше нуля, то решений нет.
Теперь найдем расстояние между точками — решениями, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$. В нашем случае $\Delta x = \sqrt{p^2 - 4q}$, $\Delta y = -\sqrt{p^2 - 4q}$, поэтому $\rho = \sqrt{2}\sqrt{p^2 - 4q}$. Две полученные точки лежат на концах диагонали квадрата. Площадь квадрата равна половине квадрата диагонали, так что $S = p^2 - 4q$ (при условии $p^2 - 4q > 0$). Таким образом, площадь такого квадрата равна дискриминанту квадратного уравнения ($\star$). ■

1.2.5. Расстояние от прямой до начала координат

Теоретические сведения Расстояние от прямой $ax + by = c$, $a^2 + b^2 > 0$, до начала координат равно $\rho = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

13. Найдите расстояние от прямой $\sqrt{17}x + \sqrt{19}y = 24$ до начала координат.
⧫ 4.
Решение. Расстояние равно $\frac{24}{\sqrt{17+19}} = 4$. ■

1.2.6. Неравенство треугольника

Теоретические сведения Если три точки M, N, K не лежат на одной прямой, то
(1) $\rho(M, N) < \rho(M, K) + \rho(K, N)$,

(2) $\rho(M,K) < \rho(M,N) + \rho(N,K)$,
(3) $\rho(N,K) < \rho(N,M) + \rho(M,K)$.
Три точки M, N, K лежат на одной прямой и попарно не совпадают в том и только том случае, когда верно ровно одно из трех равенств
(1) $\rho(M,N) = \rho(M,K) + \rho(K,N)$,
(2) $\rho(M,K) = \rho(M,N) + \rho(N,K)$,
(3) $\rho(N,K) = \rho(N,M) + \rho(M,K)$.
В первом случае K лежит между M и N, аналогичные условия соответствуют второму и третьему равенствам.

Если верно более одного из указанных трех равенств, то две точки по крайней мере одной из пар совпадают (и тогда все три точки, естественно, лежат на одной прямой). Если верны все три указанных равенства, то все три точки совпадают.

14. Найдите все пары чисел (x, y) такие, что
$(\star)$ $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = 5$.
⧫ $x \in [0;\ 4]$, $y = \frac{3}{4}x$.
Решение. Пусть $M(0;\ 0)$, $N(4;\ 3)$, $K(x,\ y)$. Равенство $(\star)$ равносильно равенству $\rho(M,N) = \rho(M,K) + \rho(K,N)$, поэтому точки лежат на одной прямой. Так как M и N не совпадают, то возможны три случая,
(1) K совпадает с M,
(2) K лежит строго между M и N на отрезке MN,
(3) K совпадает с N.
Иначе говоря, K лежит на отрезке MN (включая концы). Все точки прямой, содержащей отрезок MN, можно задать равенством $y = \dfrac{3}{4}x$. Все точки отрезка MN можно задать системой
$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x, \\ x \in [0;\ 4]. \end{cases} \quad \blacksquare$$

1.2.7. Расстояние от точки до прямой

Теоретические сведения Расстояние от точки $(x_0,\ y_0)$ до прямой $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$, равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

15. Найдите расстояние от прямой $10x + 24y = 39 \cdot 26$ до точки $(52; 78)$.
⧫ 53.

Решение. Расстояние равно $\dfrac{|39 \cdot 26 - (10 \cdot 52 + 24 \cdot 78)|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} =$
$= \dfrac{|39 \cdot 26 - (10 \cdot 2 \cdot 26 + 24 \cdot 3 \cdot 26)|}{26} =$
$= |39 - (10 \cdot 2 + 24 \cdot 3)| = |39 - 92| = 53.$ ∎

1.2.8. Расположение двух прямых на плоскости

Теоретические сведения Две прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны. Если прямые заданы уравнениями $ax + by = c$ и $px + qy = r$, где $a^2 + b^2 > 0$, $p^2 + q^2 > 0$, то они параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда $aq - bp = 0$.

Расстояние между параллельными прямыми $ax + by = c$ и $ax + by = d$ равно $\dfrac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Чтобы вычислить расстояние между параллельными прямыми $a\,x + b\,y = c$ и $A\,x + B\,y = C$, где $aB = Ab$, нужно преобразовать второе уравнение к виду $ax + by = d$.

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$. Если прямые заданы уравнениями $ax + by = c$ и $px + qy = r$, причем $a^2 + b^2 > 0$, $p^2 + q^2 > 0$, то они перпендикулярны тогда и только тогда, когда $ap + bq = 0$. Напомним, что те же прямые параллельны (или совпадают) тогда и только тогда, когда $aq - bp = 0$.

Если две прямые заданы в форме $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, и не являются перпендикулярными, т.е. $k_1 \cdot k_1 \neq -1$, то острый угол α между ними можно найти по формуле $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$. Заметим, что аналогичная формула без модуля, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, дает угол, лежащий в пределах $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

16. Прямая, проходящая через точку (2; 3), параллельная прямой ($\star$) $3x+4y=12$, совпадает с графиком функции

$\boxed{\textbf{1}}$ $y=-0{,}75\cdot(x-3)+2$ $\boxed{\textbf{2}}$ $y=0{,}75\cdot(x-2)+3$
$\boxed{\textbf{3}}$ $y=1{,}(3)\cdot(x-3)+2$ $\boxed{\textbf{4}}$ $y=-0{,}75\cdot(x-2)+3$
$\boxed{\textbf{5}}$ $y=-1{,}(3)\cdot(x-2)+3$

Ответ $\boxed{\textbf{4}}$ ♦ $y=-0{,}75\cdot(x-2)+3$.

Решение 1. Уравнение ($\star$) можно преобразовать к виду $y=-\frac{3}{4}x+3$, так что угловой коэффициент искомой прямой равен $-\frac{3}{4}$. Все такие прямые можно задать уравнением $y=-\frac{3}{4}x+p$, значение параметра можно найти из условия $y(2)=3$, что дает $p=\dfrac{9}{2}$. Уравнение $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$ можно записать в также виде $y=-\frac{3}{4}(x-2)+3$. ■

Решение 2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0,y_0), имеет вид $y=k(x-x_0)+y_0$, для заданных в задаче параметров $x_0=(2;3)$ и $y=-\frac{3}{4}(x-2)+3$. ■

Решение 3. Все прямые, параллельные прямой ($\star$), можно задать уравнением ($\star$) $3x+4y=q$, где q — любое вещественное число. Мы найдем его из условия $3\,x_0+4\,y_0=q \Leftrightarrow 3\cdot 2+4\cdot 3=q$ $\Leftrightarrow q=18$. ■

17. Укажите уравнение прямой, перпендикулярной прямой ($\star$) $y=\frac{7}{5}x-11$.

$\boxed{\textbf{1}}$ $y=\dfrac{5}{7}x$ $\boxed{\textbf{2}}$ $y=-\dfrac{5}{7}x$ $\boxed{\textbf{3}}$ $y=\dfrac{7}{5}x$ $\boxed{\textbf{4}}$ $y=-\dfrac{7}{5}x$ $\boxed{\textbf{5}}$ $y=-\dfrac{11}{12}x$

Ответ $\boxed{\textbf{2}}$ ♦ Это — прямая $y=-\dfrac{5}{7}x$.

Решение. Угловой коэффициент прямой ($\star$) равен $\dfrac{7}{5}$, угловой коэффициент перпендикулярной прямой должен быть равен $-\dfrac{5}{7}$. ■

18. Укажите уравнение прямой, перпендикулярной прямой ($\star$) $7x+9y=0$.

$\boxed{\textbf{1}}$ $7x+9y=0$ $\boxed{\textbf{2}}$ $9x-7y=0$ $\boxed{\textbf{3}}$ $7x-9y=0$ $\boxed{\textbf{4}}$ $9x+7y=0$
$\boxed{\textbf{5}}$ $49x-81y=0$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ Это уравнение $9x - 7y = 0$.

Решение. Заметим, что прямые $(\star)$ $ax + by = c$ и $-bx + ay = d$ перпендикулярны для любых значений параметров, если только $a^2 + b^2 > 0$. Поэтому для того, чтобы получить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $(\star)$, нужно поменять местами коэффициенты перед x и y, и изменить знак одного из этих коэффициентов на противоположный. Заметим, что все прямые, перпендикулярные прямой $(\star)$, можно задать уравнением $9x - 7y = p$, где параметр p может принимать любое вещественное значение. Все прямые, параллельные прямой $(\star)$, можно задать уравнением $7x + 9y = q$, где параметр q может принимать любое вещественное значение кроме $q = 0$. ■

1.2.9. Однородные и приводящиеся к однородным уравнения второго порядка

19. Все точки на плоскости, абсцисса и ордината которых удовлетворяют условию $(\star)$ $9x^2 - 19xy - 9y^2 = 0$, образуют

$\boxed{\mathbf{1}}$ пару параллельных прямых

$\boxed{\mathbf{2}}$ пару перпендикулярных прямых

$\boxed{\mathbf{3}}$ пару прямых, симметричных относительно прямой $y = x$

$\boxed{\mathbf{4}}$ пару прямых, симметричных относительно оси абсцисс

$\boxed{\mathbf{5}}$ пару прямых, симметричных относительно оси ординат

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ Пару перпендикулярных прямых.

Решение. Если $y = 0$ и выполнено $(\star)$, то $x = 0$. Пусть $y \neq 0$. Разделим обе части уравнения $(\star)$ на y^2 и выполним замену $k = y/x$. Получится квадратное уравнение $9 - 19k - 9k^2 = 0$, имеющее два различных корня, произведение которых равно -1. Поэтому равенство $(\star)$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} y = k_1 x, \\ y = k_2 x, \end{array}\right.$ определяющей пару перпендикулярных прямых, рис. 2а. Начало координат также принадлежит множеству всех решений. ■

20. Все точки на плоскости, абсцисса и ордината которых удовлетворяют условиям $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$, образуют

$\boxed{\mathbf{1}}$ пару параллельных прямых

$\boxed{\mathbf{2}}$ пару перпендикулярных прямых

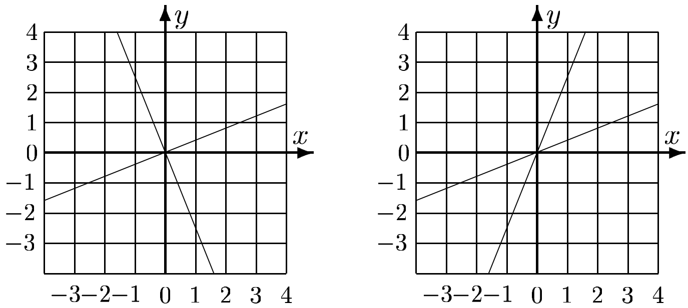


Рис. 2. Однородное уравнение второго порядка

3 пару прямых, симметричных относительно прямой $y = x$

4 пару прямых, симметричных относительно оси абсцисс

5 пару прямых, симметричных относительно оси ординат

Ответ **3** ♦ Пару прямых, расположенных симметрично относительно прямой $y = x$.

Решение. Рассуждая аналогично, придем к совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} y = k_1 x, \\ y = k_2 x, \end{array}\right.$ причем $k_1 \cdot k_2 = 1$. Ту же совокупность можно записать в равносильном виде $\left[\begin{array}{l} y = k_1 x, \\ x = k_1 y, \end{array}\right.$ и теперь ответ очевиден, рис. 2b. ■

21. Все точки на плоскости, абсцисса и ордината которых удовлетворяют условию $(\star)$ $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 25$, образуют

1 пару параллельных прямых

2 пару перпендикулярных прямых

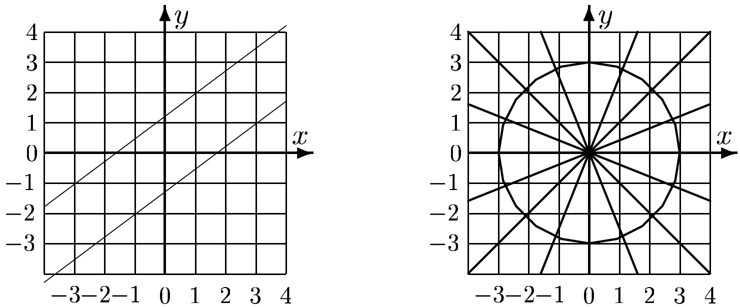
3 пару прямых, симметричных относительно прямой $y = x$

4 пару прямых, симметричных относительно оси абсцисс

5 пару прямых, симметричных относительно оси ординат

Ответ **1** ♦ Пару параллельных прямых.

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения $(\star)$ как квадратный трехчлен относительно переменной x и выделим полный



(a) $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 25$ **(b)** $xy(x-y)(x+y)\cdot$
$\cdot(x-2y)(x+2y)\cdot$
$\cdot(2x-y)(2x+y) = 0$

Рис. 3. Уравнения, разлагающиеся на множители

квадрат,
$(3x - 4y)^2 = 25$. Получилось квадратное уравнение $t^2 = 25$ относительно переменной $t = 3x - 4y$, имеющее два корня, $t = \pm 5$. Поэтому $(\star)$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{aligned}&3x - 4y = 5,\\&3x - 4y = -5,\end{aligned}\right.$ определяющей пару несовпадающих прямых с одинаковыми угловыми коэффициентами, т.е. пару параллельных прямых, рис. 3a. ■

22. Сколько решений имеет система
$(\star)$ $\begin{cases} xy(x^2 - y^2)(4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^2) = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$?

♦ 16.

Решение. Разложим левую часть первого уравнения $(\star)$ на множители,
$xy(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)(2x+y)(2x-y) = 0$.
Все точки на плоскости, определяемые этим уравнением, лежат на восьми прямых, все проходят через начало координат. Второе уравнение определяет окружность с центром в начале координат. Всего, таким образом, имеется 16 решений, рис. 3b. ■

23. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми, определяемыми уравнением $(\ddagger)$ $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 1$.

⧫ 0,4.

Решение 1. Равенство (‡) равносильно $(3x-4y)^2=1$ и равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}3x-4y=1,\\3x-4y=-1.\end{array}\right.$ Расстояние между прямыми $3x-4y=1$ и $3x-4y=-1$ равно $\dfrac{|1-(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{2}{5}$.

■

Решение 2. Расстояние от прямой (⋆) $3x-4y=1$ до начала координат равно $1/5$. Расстояние от прямой (⋆⋆) $3x-4y=-1$ до начала координат также равно $1/5$. Параллельные прямые (⋆) и (⋆⋆) расположены по разные стороны от начала координат, поэтому расстояние между ними равно сумме расстояний от каждой из них до начала координат. ■

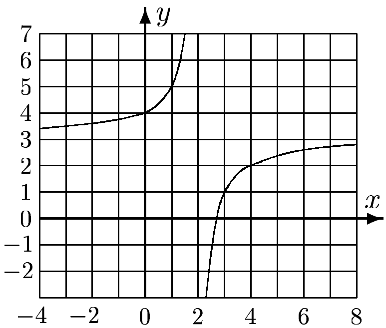
24. Найдите тангенс острого угла между прямыми $y=4x$ и $y=0{,}25x$.

⧫ 1,875.

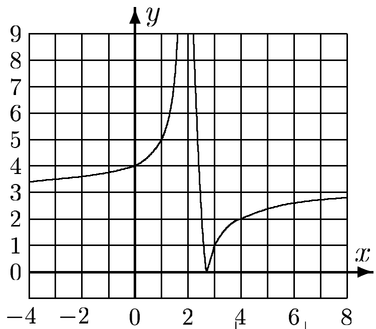
Решение. Острые углы между каждой из указанных двух прямых и осью абсцисс равны $\varphi_1=\operatorname{arctg}4$ и $\varphi_2=\operatorname{arctg}0{,}25$. Угол между прямыми равен $\varphi_2-\varphi_1$. Найдем его тангенс, $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}=\dfrac{15}{8}$. ■

1.3. Гипербола

Теоретические сведения Функция $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ при условиях $\begin{cases}ad-bc\neq 0,\\c\neq 0,\end{cases}$ называется дробно-линейной (т.е. дробь, или частное от деления, двух линейных функций). Гиперболой называется график дробно-линейной функции. Область определения дробно-линейной функции представляет обьединение двух промежутков, $x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)\bigcup\left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$. Множество значений дробно-линейной функции представляет обьединение двух промежутков, $y\in\left(-\infty;\ \dfrac{a}{c}\right)\bigcup\left(\dfrac{a}{c};\ +\infty\right)$. Вертикальная асимптота



(a) $y = \frac{3x-8}{x-2}$



(b) $y = \left|\frac{3x-8}{x-2}\right|$

Рис. 4. Графики гиперболы и гиперболы с модулем

гиперболы имеет вид $x = -\dfrac{d}{c}$. Горизонтальная асимптота гиперболы имеет вид $y = \dfrac{a}{c}$. Гипербола имеет центр симметрии, который расположен в точке пересечения асимптот, $x_0 = -\dfrac{d}{c}$, $y_0 = \dfrac{a}{c}$. Гипербола имеет две оси симметрии, каждая из которых проходит через центр симметрии. Одна из осей симметрии имеет угловой коэффициент $k = 1$, другая $k = -1$. Дробно-линейная функция монотонна на каждом из двух промежутков, $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)$ и $x \in \left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$ (но не на их обьединении). Если $ad - bc > 0$, то на указанных промежутках дробно-линейная функция возрастает, а если $ad - bc < 0$, то убывает.

1.3.1. График гиперболы

25. Нарисуйте график функции $y = \dfrac{3x-8}{x-2}$.

♦ График показан на рис. 4a.

Решение. Горизонтальная асимптота определяется уравнением $y = 3$, вертикальная асимптота – уравнением $x = 2$, центр симметрии (2; 3), отметим еще две пробные точки на графике, (0; 4) и $(\frac{8}{3}; 0)$ Так как $3(-2) - 1(-8) > 0$, то функция $(\star)$ возрастает на двух промежутках, слева и справа от вертикальной асимптоты. ■

1.3.2. График гиперболы с модулем

26. Нарисуйте график функции $y = \left|\dfrac{3x-8}{x-2}\right|$.

♦ График показан на рис. 4b.

Решение. В соответствии с общими принципами построения графиков с модулями, следует сначала построить график функции $y = \dfrac{3x-8}{x-2}$, рис. 4a, а затем зеркально отразить относительно оси абсцисс нижнюю часть графика (расположенную ниже оси абсцисс). ■

27. Нарисуйте график функции $y = \dfrac{3|x|-8}{|x|-2}$.

♦ График показан на рис. 5a.

Решение. В соответствии с общими принципами построения графиков с модулями, следует сначала построить график функции $y = \dfrac{3x-8}{x-2}$, рис. 4a, а затем зеркально отразить относительно оси ординат правую часть графика (расположенную правее оси ординат). ■

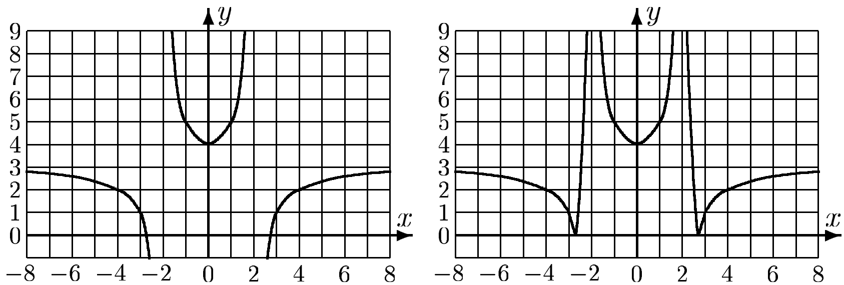
28. Нарисуйте график функции $y = \left|\dfrac{3|x|-8}{|x|-2}\right|$.

♦ График показан на рис. 5b.

Решение 1. Часть графика функции $y = \dfrac{3|x|-8}{|x|-2}$, рис. 5a, расположенную ниже оси абсцисс, зеркально отразить относительно оси абсцисс на верхнюю полуплоскость. ■

Решение 2. Часть графика функции $y = \left|\dfrac{3x-8}{x-2}\right|$, рис. 4b, расположенную правее оси ординат, зеркально отразить относительно оси ординат на левую полуплоскость. ■

29. Нарисуйте на плоскости (x, y) все точки, для которых **(1)** $|xy| = 4$, **(2)** $x|y| = 4$.



(a) График $y = \dfrac{3|x| - 8}{|x| - 2}$ **(a)** График $y = \left|\dfrac{3|x| - 8}{|x| - 2}\right|$

Рис. 5. Графики гиперболы с двумя модулями

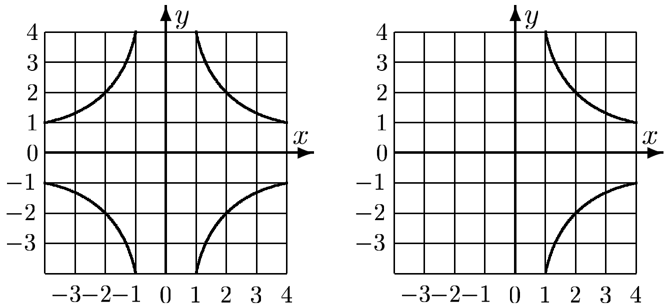
⧫ См. рис. 6a, b.

Решение. (1) Заметим, что $|xy| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 4, \\ xy = -4. \end{array}\right.$ Первое уравнение определяет гиперболу, две ветви которой расположены в первой и третьей четвертях. Первое уравнение определяет гиперболу, две ветви которой расположены во второй и четвертой четвертях. Множество $|xy| = 4$ имеет центр симметрии, имеет ракже четыре оси симметрии. Найдите их самостоятельно.

(2) $x|y| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 4, \\ y > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -4, \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 4, \\ x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -4, \\ x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Таким образом, следует нарисовать ветвь гиперболы $xy = 4$, расположенную в первой четверти, и ветвь гиперболы $xy = -4$, расположенную в четвертой четверти. ■

Теоретические сведения Центр симметрии гиперболы $y = \dfrac{kx - a}{x - b}$ находится в точке пересечения вертикальной и горизонтальной асимптот, $x = b$, $y = k$.

30. Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = \dfrac{3x - 8}{x - 4}$.



(a) $|xy| = 4$ **(a)** $x|y| = 4$

Рис. 6. Множества, связанные с гиперболой

♦ (4; 3).

Решение. Вертикальная асимптота определяется уравнением $x = 4$, горизонтальная – уравнением $y = 3$, рис. 7. ■

31. Прямая l_1 касается графика функции $y = \dfrac{3x-8}{x-4}$ в точке M_1 с абсциссой $x_1 = 0$. Вторая прямая l_2 параллельна прямой l_1 и также касается графика той же функции в точке M_2. Найдите абсциссу точки касания второй прямой M_2.

♦ $x_2 = 8$.

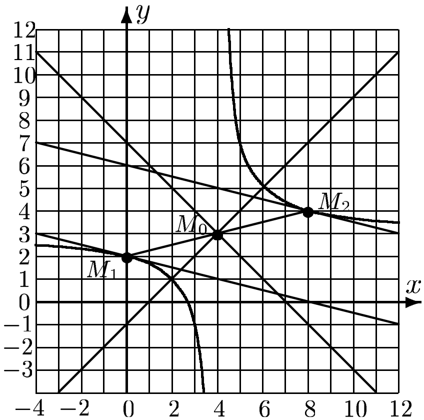
Решение. Мы уже значем, что центр симметрии графика функции $(\star)$ $y = \frac{3x-8}{x-4}$ находится в точке $M_0(4;\,3)$. Прямая l, которая получается преобразованием центральной симметрии прямой l_1 относительно точки M_0,

(1) касается графика функции $(\star)$,

(2) параллельна прямой l_1.

Поэтому прямая l является единственной прямой, которая удовлетворяет условиям задачи и совпадает, таким образом, с прямой l_2. Точка касания M_2 также может быть получена преобразованием центральной симметрии точки M_1 относительно центра M_0. Поэтому $x(M_2) - x(M_0) = x(M_0) - x(M_1)$, $x(M_2) = 2x(M_0) - x(M_1) = 2 \cdot 4 - 0 = 8$, рис. 7а. ■

32. Укажите все значения параметра b, при которых уравнение $\left|\dfrac{3x-8}{|x|-2}\right| = b$ имеет ровно два различных корня.



(a) $y = \dfrac{3x-8}{x-4}$

Рис. 7. Центр симметрии гиперболы.

♦ $b \in (0;\ 3) \bigcup (3;\ 4)$.

Решение. При $x \geqslant 0$ график совпадает с графиком функции $\left|\dfrac{3x-8}{x-2}\right|$, а при $x < 0$ — с графиком $\left|\dfrac{3x-8}{-x-2}\right|$, рис. 8a. Корней нет при $b \in (-\infty;\ 0)$, один корень при $b = 0$, два корня при $b \in (0;\ 3)$, один корень при $b = 3$, два корня при $b \in (3;\ 4)$, три корня при $b = 4$, четыре корня при $b \in (4;\ +\infty)$. ■

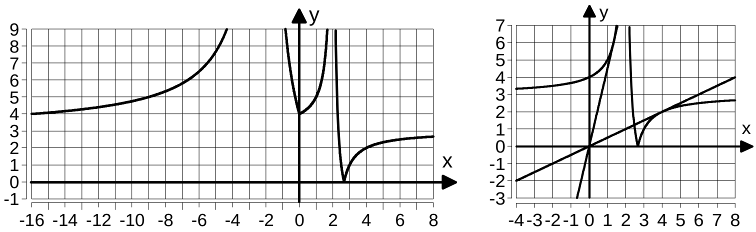
33. Укажите все значения параметра k, при которых уравнение

$(\star)\quad \left|\dfrac{3x-8}{x-2}\right| = kx$ имеет ровно два различных корня.

♦ $k \in \{0{,}5;\ 4{,}5\}$.

Решение. (1) График функции в левой части $(\star)$ показан на рис. 8b. Заметим, что число $x = 0$ не является корнем ни при каком значении k.

(2) Если $k > 0$ и уравнение $(\star)$ имеет по крайней мере один корень, то левая часть $(\star)$ является неотрицательной величиной, а правая часть является положительной величиной. Поэтому уравнение $(\star)$ будет иметь два корня в тех и только тех случаях, когда уравнение $\dfrac{3x-8}{x-2} = kx$ будет иметь единственный корень любого



(a) (b)

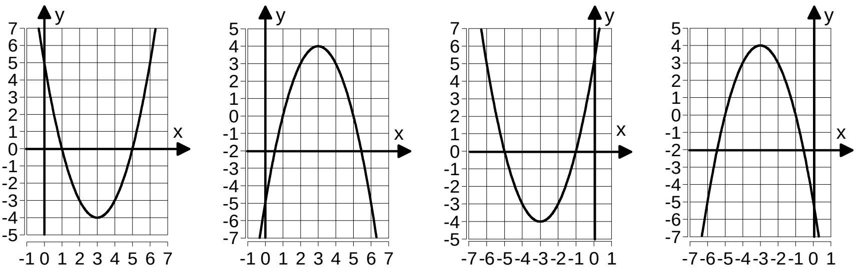
Рис. 8. График гиперболы с модулем

знака (мы уже знаем, что этот коренеь не равен нулю). Перенесем все в правую часть и приведем к общему знаменателю, $(\star\star)$ $\dfrac{kx^2-2kx-3x+8}{x-3}=0$. Заметим, что число $x=3$ не является корнем уравнения $(\star\star\star)$ $kx^2-2kx-3x+8=0$. ни при каких значениях k. Поэтому число корней уравнения $(\star\star)$ совпадает с числом корней уравнения $(\star\star\star)$ при всех значениях k. Уравнение $(\star\star\star)$ при $k\neq 0$ является квадратным. Его дискриминант $D=4k^2-20k+9$ равен нулю при $k\in\{0{,}5;\ 4{,}5\}$. Эти значения включаем в ответ и переходим к исследованию случая
(3) $k\leqslant 0$. При $k=0$ уравнение $(\star)$ имеет единственный корень $x=\dfrac{8}{3}$, при $k<0$ корни уравнения $(\star)$ совпадают с корнями уравнения $(\star\star)$, и уже проведенное исследование показывает наличие единственного корня. ■

1.4. Квадратный трехчлен, парабола

Теоретические сведения

Функция $(\star)$ $f(x)=ax^2+bx+c$ при условии $a\neq 0$ называется квадратным трехчленом. График квадратного трехчлена называется параболой. Область определения совпадает со всей числовой прямой, $x\in(-\infty;+\infty)$. Множество значений квадратного трехчлена при $a>0$ совпадает с промежутком $\left[c-\dfrac{b^2}{4a};\ +\infty\right)$, а при



(a) (b) (c) (d)

Рис. 9. График параболы

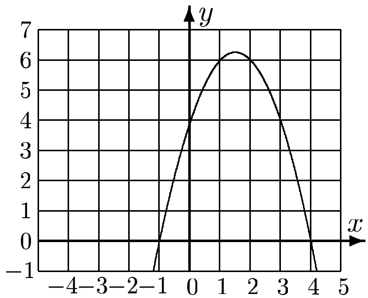
$a < 0$ совпадает с промежутком $\left(-\infty;\ c - \dfrac{b^2}{4a}\right]$. Парабола имеет вертикальную ось симметрии $x = -\dfrac{b}{2a}$. Квадратный трехчлен является монотонной функцией на каждом из двух промежутков, $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ и $x \in \left[-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$. Если $a < 0$, то на первом из них квадратный трехчлен возрастает, а на втором — убывает. Если $a > 0$, то на первом из них квадратный трехчлен убывает, а на втором — возрастает. Величина $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена ($\star$). Если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней. Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$. Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

1.4.1. Парабола

34. Нарисуйте графики функций **(1)** $y = x^2 - 5x + 6$, **(2)** $y = -x^2 + 5x - 6$, **(3)** $y = x^2 + 5x + 6$, **(4)** $y = -x^2 - 5x - 6$.

Решение. Графики показаны на рис. 9a, b, c, d. ■

35.



На рисунке изображен график функции

$\boxed{1}$ $y = -x^2 + 3x + 4$ $\boxed{2}$ $y = -x^2 - 3x + 4$ $\boxed{3}$ $y = x^2 - 3x + 4$
$\boxed{4}$ $y = -x^2 - 6x + 4$ $\boxed{5}$ $y = -x^2 + 6x + 4$

Ответ $\boxed{1}$♦ $y = -x^2 + 3x + 4$

Решение. Так как ветви параболы направлены вниз, то годятся только варианты (1), (2), (4), (5). Вершина параболы имеет абсциссу $x = 1{,}5$, что соответствует только ответу (1). ■

1.4.2. Преобразования симметрии параболы

36. Парабола $y = x^2 - 8x + 15$ симметрична относительно прямой $x = 0$ параболе

$\boxed{1}$ $y = x^2 + 8x + 15$ $\boxed{2}$ $y = -x^2 - 8x - 15$ $\boxed{3}$ $y = -x^2 - 8x + 15$
$\boxed{4}$ $y = x^2 + 8x - 15$ $\boxed{5}$ $y = -x^2 + 8x - 15$

Ответ $\boxed{1}$♦ $y = x^2 + 8x + 15$.

Решение. Указанная в условии симметрия для функции $y = f(x)$ дает функцию $y = f(-x)$. ■

37. Укажите уравнение параболы, симметричной параболе $(\star)$ $y = x^2 - 6x + 5$ относительно начала координат.

$\boxed{1}$ $y = -x^2 + 6x + 5$ $\boxed{2}$ $y = -x^2 + 6x - 5$ $\boxed{3}$ $y = x^2 + 6x - 5$
$\boxed{4}$ $y = -x^2 - 6x - 5$ $\boxed{5}$ $y = x^2 - 6x - 5$

Ответ $\boxed{4}$♦ $y = -x^2 - 6x - 5$

Решение. Запишем уравнение $(\star)$ в виде $y = f(x)$. Уравнение параболы, симметричной параболе $(\star)$ относительно начала координат, имеет вид
$y = -f(-x)$, так что $y = -x^2 - 6x - 5$. ■

1.4.3. Сдвиг и растяжение параболы

38. Напишите приведенное квадратное уравнение, корни которого на 3 больше корней уравнения $x^2 - 7x + 1 = 0$.
♦ $x^2 - 13x + 31 = 0$.

Решение. Если график функции $y = f(x)$ сдвинуть вправо на 3 единицы, то получится график функции $y = f(x-3)$, поэтому каждый корень уравнения $f(x-3) = 0$ будет на 3 единицы больше некоторого корня уравнения $f(x) = 0$. Таким образом, нужное нам уравнение можно записать в виде
$(x-3)^2 - 7(x-3) + 1 = 0$. Осталось привести подобные. ■

39. Напишите приведенное квадратное уравнение, корни которого в три раза больше корней уравнения $x^2 - 7x + 1 = 0$.
♦ $x^2 - 21x + 9 = 0$.

Решение. Если график функции $y = f(x)$ растянуть в 3 раза вдоль оси x, то получится график функции $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$, поэтому каждый корень уравнения $f\left(\frac{x}{3}\right) = 0$ будет в 3 раза больше некоторого корня уравнения $f(x) = 0$. Таким образом, нужное нам уравнение можно записать в виде $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{7x}{3} + 1 = 0$. Осталось умножить все уравнение на 9. ■

40. Найдите расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до начала координат.
♦ $\sqrt{5}$.

Решение. Выделим полный квадрат, $y = (x-2)^2 + 1$, поэтому вершина находится в точке $(2;\ 1)$. ■

41. Найдите расстояние между вершинами парабол $y = x^2 - 2x$ и $y = x^2 - 4x + 5$.
♦ $\sqrt{5}$

Решение. Выделим полный квадрат в каждом из квадратных трехчленов, **(1)** $y = (x-1)^2 - 1$, и **(2)** $y = (x-2)^2 + 1$, поэтому вершины находится в точках $M(1;\ -1)$ и $N(2;\ 1)$, расстояние между которыми равно $\sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$. ■

1.5. Множество значений квадратного трехчлена

Теоретические сведения Лучший способ изучения множества значений квадратного трехчлена — выделение полного квадрата. Существует два основных способа выполнения этого преобразования, различающихся только деталями. Для любых $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Если $a > 0$, то

$$ax^2 + bx + c = \Big(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Если $a < 0$, то

$$ax^2 + bx + c = -\Big(\sqrt{-a}x + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Таким образом,

$$ax^2 + bx + c \Subset \Big[-\frac{b^2}{4a} + c;\ +\infty\Big)$$

при $a > 0$ и

$$ax^2 + bx + c \Subset \Big(-\infty;\ -\frac{b^2}{4a} + c\Big]$$

при $a < 0$.

Множество значений квадратного трехчлена на отрезке $x \in [m;\, n]$ является отрезком. Следует различать два случая, в которых вычисление множества значений производится по разным правилам.

Если вершина лежит на заданном отрезке, $-\dfrac{b}{2a} \in [m;\, n]$, и $a > 0$, то наименьшее значение квадратного трехчлена $f(x) = ax^2+bx+c$ на отрезке $x \in [m;\, n]$ совпадает с отрезком $[-\dfrac{b^2}{4a} + c;\ f(k)]$, где $k = m$, если точка $x = m$ удалена от вершины $x = -\dfrac{b}{2a}$ на большее расстояние, чем точка $x = n$, и $k = n$ в противном случае (т.е. если точка $x = n$ расположена на числовой оси ближе к вершине,

чем точка $x = m$). Иначе говоря, нужно вычислить значения заданного квадратного терхчлена в двух точках, а именно в вершине и на конце заданного отрезка, который наиболее удален от вершины. При $-\dfrac{b}{2a} \in [m;\, n]$ и $a < 0$ действует то же правило.
Если же вершина квадратного трехчлена не принадлежит заданному отрезку, $-\dfrac{b}{2a} \notin [m;\, n]$, то квадратный трехчлен на отрезке $[m;\, n]$ является возрастающей или убывающей функцией, поэтому множество значений совпадает с отрезком $[f(m);\, f(n)]$ при $f(m) < f(n)$ и с отрезком $[f(n);\, f(m)]$ при $f(m) > f(n)$.

1.5.1. Множество значений чистого квадратного трехчлена

42. Найдите множество значений функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ на промежутке $x \in [2;\, 6]$.
♦ $f(x) \in [-4;\, 5]$.
Решение. Выделим полный квадрат,
$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$.
Запишем серию равносильных включений,
$x \in [2;\, 6] \Rightarrow x - 3 \in [2-3;\, 6-3] \Rightarrow x - 3 \in [-1;\, 3]$
$\Rightarrow x - 3 \in [-1;\, 0) \bigcup [0;\, 3]$.
Так как на каждом из промежутков $[-1;\, 0)$ и $[0;\, 3]$ функция $F(t) = t^2$ является непрерывной и монотонной, то
$(x-3)^2 \in (0;\, 1] \bigcup [0;\, 9] = [0;\, 9] \Rightarrow (x-3)^2 - 4 \in [-4;\, 5]$.
Таким образом, $f(x) \in [-4;\, 5]$. ■

43. Найдите множество значений функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ на промежутке $x \in [6;\; 10]$.
♦ $f(x) \in [5;\; 45]$.
Решение. $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$, $x \in [6;\; 10]$
$\Rightarrow x - 3 \in [3;\; 7]$

Так как на промежутке $[3;\, 7]$ функция $F(t) = t^2$ является непрерывной и монотонной, то
$(x-3)^2 \in [3^2;\; 7^2] \Rightarrow (x-3)^2 \in [9;\; 49] \Rightarrow (x-3)^2 - 4 \in [9-4;\; 49-4]$
$\Rightarrow f(x) \in [5;\, 45]$. ■

1.5.2. Композиция двух квадратных трехчленов

44. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 25$.
♦ $f_{\min} = 9$.
Решение. Выполним замену переменной $t = x^2 \Subset [0;\ +\infty)$,
$\begin{cases} f(x) = t^2 - 8t + 25, \\ t = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = (t-4)^2 + 9, \\ t = x^2. \end{cases}$
Теперь запишем серию включений, в которой каждое последующее является следствием предыдущего,
$t \in [0;\ +\infty) \Rightarrow t - 4 \in [-4;\ +\infty) \Rightarrow t - 4 \in [-4;\ 0) \bigcup [0;\ +\infty)$
$\Rightarrow (t-4)^2 \in (0;\ 16] \bigcup [0;\ +\infty) \Rightarrow (t-4)^2 \in [0;\ +\infty)$
$\Rightarrow (t-4)^2 + 9 \in [9;\ +\infty)$,
поэтому $f(x) \in [9;\ +\infty)$. ■

45. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x^4 + 8x^2 + 25$.
♦ $f_{\min} = 25$.
Решение. Выполним замену переменной $t = x^2 \Subset [0;\ +\infty)$,
$f(x) = t^2 + 8t + 25$, $t \Subset [0;\ +\infty)$. Множество значений квадратного трехчлена $(t+4)^2 + 9$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ совпадает с промежутком $[25;\ +\infty)$. Типичная ошибка при решении этой задачи состоит в том, что вместо анализа множества значений квадратного трехчлена $t^2 + 8t + 25$ на промежутке проводится анализ множества значений на всей числовой прямой. В данном случае результаты будут различаться, так как вершина квадратного трехчлена не достигается. Множество аналогичных задач встретится нам при решении задач о множестве значений квадратного трехчлена с тригонометрической функцией и с показательной функцией. ■

46. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2 + 5(x^2 - 6x + 5) + 6$.
♦ $f_{\min} = -0{,}25$.
Решение. Выполним замену переменной $t = x^2 - 6x + 5 \Subset [-4;\ +\infty)$, $f(x) = g(t)$, $(\star)$ $g(t) = t^2 + 5t + 6 = (t+2{,}5)^2 - 0{,}25$. Так как вершина $t_0 = -2{,}5$ принадлежит промежутку $[-4;\ +\infty)$, то множество значений квадратного трехчлена $(\star)$ на промежутке $[-4;\ +\infty)$ совпадает с промежутком $[-0{,}25;\ +\infty)$. ■

47. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = (x^2 - 6x + 8)^2 + 6(x^2 - 6x + 8) + 5$.
♦ $f_{\min} = 0$.
Решение. Выполним замену переменной
$t = x^2 - 6x + 8 \in [-1;\ +\infty)$,
$f(x) = g(t)$, $(\star)$ $g(t) = t^2 + 6t + 5 = (t - 3)^2 - 4$. Так как вершина $t_0 = -3$ не принадлежит промежутку $[-1;\ +\infty)$, то множество значений квадратного трехчлена $(\star)$ на промежутке $[-1;\ +\infty)$ совпадает с промежутком $[g(-1);\ +\infty) = [0;\ +\infty]$. ■

1.5.3. Иррациональная функция и квадратный трехчлен

48. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = \sqrt{x^2 - 14x + 170}$.
♦ 11. ♦ $f(x) \in [11;\ +\infty)$.
Решение. Выделяя полный квадрат под знаком квадратного корня, получим $f(x) = \sqrt{(x-7)^2 - 49 + 170} = \sqrt{(x-7)^2 + 121}$.
Пусть $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Тогда $x - 7 \in (-\infty;\ +\infty)$
$\Rightarrow (x-7)^2 \in [0;\ +\infty) \Rightarrow (x-7)^2 + 121 \in [121;\ +\infty)$
$\Rightarrow \sqrt{(x-7)^2 + 121} \in [11;\ +\infty)$. ■

49. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 7 + \sqrt{x^2 - 14x + 49}$.
♦ 7. ♦ $f(x) \in [7;\ +\infty)$.
Решение. Выделяя полный квадрат под знаком квадратного корня, получим $f(x) = 7 + \sqrt{(x-7)^2} = 7 + |x - 7|$. Так как $|x - 7| \in [0;\ +\infty)$, то $7 + |x - 7| \in [7;\ +\infty)$. ■

50. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 7 + \sqrt{x^2 - 14|x| + 49}$.
♦ 7. ♦ $f(x) \in [7;\ +\infty)$.
Решение. Аналогично, $f(x) = 7 + \sqrt{(|x| - 7)^2} = 7 + ||x| - 7|$. Так как $|x| \in [0;\ +\infty)$, $|x| - 7 \in [-7;\ +\infty)$, $||x| - 7| \in [0;\ +\infty)$, то $7 + ||x| - 7| \in [7;\ +\infty)$. Таким образом, в данном случае внутренний модуль не повлиял на результат. ■

51. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 7 + \sqrt{x^2 + 14|x| + 49}$.
♦ 14. ♦ $f(x) \in [14;\ +\infty)$.

Решение 1. Аналогично, $f(x) = 7 + \sqrt{(|x|+7)^2} = 7 + ||x|+7|$. Так как $|x| \in [0;\ +\infty)$, $|x|+7 \in [7;\ +\infty)$, $||x|+7| \in [7;\ +\infty)$, то $7 + ||x|+7| \in [14;\ +\infty)$. В данном случае внутренний модуль повлиял на результат. ■

Решение 2. Пусть $t = |x| \in [0;\ +\infty)$. Тогда $\begin{cases} f(x) = 7 + \sqrt{t^2 + 14t + 49}, \\ t = |x|. \end{cases}$ Функция $g(t) = 7 + \sqrt{t^2 + 14t + 49}$ возрастает на промежутке $t \in [0;\ +\infty)$, поэтому наименьшее значение функция $g(t)$ принимает на левом конце области определения, т.е. в точке $t = 0$, $f_{\min} = g(0) = 14$. ■

52. Найдите наибольшее значение функции
$f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x + 33}$.
♦ 7 ♦ $f(x) \in [0;\ 7]$.

Решение. Выделяя полный квадрат под знаком квадратного корня, получим $f(x) = \sqrt{-(x-4)^2 + 49}$. Пусть $x \in (-\infty;\ +\infty)$.
Тогда $x - 4 \in (-\infty;\ +\infty) \Rightarrow (x-4)^2 \in [0;\ +\infty)$
$\Rightarrow -(x-4)^2 \in (-\infty;\ 0] \Rightarrow -(x-4)^2 + 49 \in (-\infty;\ 49]$.
Так как функция $g(x) = -(x-4)^2 + 49$ находится под знаком квадратного корня, то $g(x) \in [0;\ 49] \Rightarrow \sqrt{g(x)} \in [0;\ 7]$. ■

1.5.4. Квадратный трехчлен и иррациональная функция

53. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x - 12\sqrt{x} + 40$.
♦ 4 ♦ $f(x) \in [4;\ +\infty)$.

Решение. Выполним замену переменной $t = \sqrt{x} \Subset [0;\ +\infty)$, $f(x) = g(t)$, $g(t) = t^2 - 12t + 40 = (t-6)^2 + 4$. Множество значений квадратного трехчлена $(t-6)^2 + 4$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ совпадает с промежутком $[4;\ +\infty)$. ■

54. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x + 12\sqrt{x} + 40$.
♦ 40 ♦ $f(x) \in [40;\ +\infty)$.

Решение. Замена $t = \sqrt{x} \Subset [0;\ +\infty)$, приводит к функции $g(t) = t^2 + 12t + 40$. Эта функция возрастает на всей своей области определения, поэтому наименьшее значение она принимает на левом конце промежутка, $g(t) \Subset [g(0);\ +\infty)$. ■

55. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x - 12\sqrt{x-7} + 37$.
♦ 8 ♦ $f(x) \in [8;\ +\infty)$.
Решение. Выполним замену переменной $t = \sqrt{x-7} \Subset [0;\ +\infty)$,
$g(t) = t^2 - 12t + 44 = (t-6)^2 + 8$.
(1) $t \in [0;\ 6)$, функция $g(t)$ на этом промежутке убывает,
$g(t) = (t-6)^2 + 8 \Subset (8;\ 6^2 + 8]$.
(2) $t \in [6;\ +\infty)$, функция $g(t)$ на этом промежутке возрастает,
$g(t) = (t-6)^2 + 8 \Subset [8;\ +\infty)$. ■

56. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x + 12\sqrt{x-7} + 37$.
♦ 44 ♦ $f(x) \in [44;\ +\infty)$.
Решение. Выполним замену переменной $t = \sqrt{x-7} \Subset [0;\ +\infty)$,
$g(t) = t^2 + 12t + 44 = (t+6)^2 + 8$. На промежутке $t \in [0;\ +\infty)$ функция $g(t)$ возрастает, поэтому $g(t) \Subset [g(0);\ +\infty)$. ■

1.5.5. Квадратный трехчлен и тригонометрическая функция

57. Найдите наименьшее значение параметра p, при котором уравнение $4\cos^2 x + 3\cos x + 1 = p$ имеет хотя бы один корень.
♦ 0,4375 ♦ $p_{\min} = \dfrac{7}{16}$.
Решение. Выполним замену $t = \cos x \Subset [-1;\ 1]$,

$$\begin{cases} f(x) = 4t^2 + 3t + 1, \\ t = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (2t + 3/4)^2 + 7/16, \\ t = \cos x. \end{cases}$$

Теперь напишем серию включений, в которой каждое последующее следует из предыдущего.

$$t \in [-1;\ 1] \Rightarrow 2t \in [-2;\ 2] \Rightarrow 2t + \frac{3}{4} \in \left[-2 + \frac{3}{4};\ 2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$\Rightarrow 2t + \frac{3}{4} \in \left[-\frac{5}{4};\ \frac{11}{4}\right] \Rightarrow 2t + \frac{3}{4} \in \left[-\frac{5}{4};\ 0\right) \bigcup \left[0;\ \frac{11}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \left(2t + \frac{3}{4}\right)^2 \in \left(0;\ \frac{25}{16}\right] \bigcup \left[0;\ \frac{121}{16}\right] \Rightarrow \left(2t + \frac{3}{4}\right)^2 \in\left.\right] \bigcup \left[0;\ \frac{121}{16}\right]$$

$$\Rightarrow \left(2t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \in\left.\right] \bigcup \left[\frac{7}{16};\ \frac{121+7}{16}\right],$$

поэтому $f(x) \Subset \left[\dfrac{7}{16};\ 8\right]$. ■

1.5.6. Дробно-квадратные функции

Теоретические сведения Дробно-квадратной называют функцию $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + k}$ при условии $a^2 + m^2 > 0$ (т.е. эти величины не могут быть равны нулю одновременно), если $a = 0$, то $b \neq 0$, если $m = 0$, то $n \neq 0$. Детальное исследование свойств и графика возможно с помощью производной, и мы это сделаем с соответствующей главе. Сейчас для нас важно научиться определять множество значений дробно-квадратной функции без применения производной.

Теоретические сведения В этом разделе мы рассмотрим один

из наиболее эффективных методов исследования множества значений функции $f(x)$. Этот метод основан на следующем утверждении, которое равносильно определению понятия "множество значений"и поэтому не требует доказательства.

Теорема 1.1. Множество значений функции $f(x)$, определенной на множестве X, совпадает со множеством всех значений параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет по крайней мере один корень $x \in X$. Если в условиях задачи множество X не указано, то подразумевается естественная область определения, и тогда требуется исследовать разрешимость уравнения $f(x) = p$ на естественной области определения функции $f(x)$.

58. Найдите множество значений функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

♦ $f(x) \Subset (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$.

Решение. Рассмотрим уравнение $x + \dfrac{1}{x} = p$. Перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю,

$(\star)$ $\dfrac{x^2 - px + 1}{x} = 0.$

Число $x = 0$ не является корнем уравнения $x^2 - px + 1 = 0$ ни при каких значениях p, поэтому $(\star)$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение

$(\star\star)$ $x^2 - px + 1 = 0.$

Дискриминант этого квадратного уравнения с параметром равен $D = p^2 - 4$. По крайней мере один корень будет при условии $p^2 - 4 \geqslant 0$, откуда получим $p \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$. ■

59. Найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

♦ $f(x) \Subset [-1;\ 1]$.

Решение. Рассмотрим уравнение $\dfrac{2x}{1+x^2} = p$. Перенесем все в правую часть и приведем к общему знаменателю,

$(\star)$ $\dfrac{px^2 - 2x + p}{1+x^2} = 0$.

Знаменатель этого уравнения не обращается в нуль, поэтому оно равносильно уравнению

$(\star\star)$ $px^2 - 2x + p = 0$.

При $p = 0$ уравнение $(\star\star)$ является линейным и имеет корень $x = 0$. При $p \neq 0$ уравнение $(\star\star)$ является квадратным, его дискриминант равен $D = 4 - 4p^2$. По крайней мере один корень будет при условии $4 - 4p^2 \geqslant 0$, откуда получим $p \in [-1;\ 1]$. Значение $p = 0$ включено во множество значений. ■

60. Найдите множество значений функции $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

♦ $f(x) \Subset (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ +\infty)$.

Решение. Рассмотрим уравнение $\dfrac{1}{x^2-1} = p$. Перенесем все в правую часть и приведем к общему знаменателю,

$(\star)$ $\dfrac{px^2 - p - 1}{x^2-1} = 0$.

Одновременно рассмотрим уравнение

$(\star\star)$ $px^2 - p - 1 = 0$.

Число $x = 1$ не является корнем $(\star\star)$ ни при каких значениях p, то же самое верно для $x = -1$, поэтому заменяем $(\star)$ на $(\star\star)$. При $p = 0$ $(\star\star)$ корней не имеет, а при $p \neq 0$ является квадратным. Дискриминант уравнения $(\star\star)$ равен $D = 4p(p+1)$, по крайней мере один корень будет при условии $p \in (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ +\infty)$. Обратите внимание на то, что $p = 0$ исключено, хотя $D(0) = 0$. При этом значении уравнение $(\star\star)$ не является квадратным и знак дискриминанта, который формально можно вычислить, не дает информации о наличии или отсутствии корней. ■

61. Найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^2-x+1}$.

♦ $f(x) \in [2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}]$.

Решение. Рассмотрим уравнение $\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-x+1} = p$. Перенесем все в правую часть и приведем к общему знаменателю,

$(\star)\ \ \dfrac{(p-1)x^2-(p+2)x+p-4}{x^2-x+1} = 0.$

Знаменатель этого уравнения не обращается в нуль, поэтому оно равносильно уравнению

$(\star\star)\ \ (p-1)x^2-(p+2)x+p-4 = 0.$

При $p=1$ уравнение $(\star\star)$ является линейным и имеет корень. При $p \neq 1$ уравнение $(\star\star)$ является квадратным, его дискриминант равен $D = p^2+4p+4-4p^2+20p-16$. После приведения подобных получим $D = -3p^2+24p-12$, по крайней мере один корень будет при условии $p^2-8p+4 \leqslant 0 \bigcap p \neq 1$, откуда получим $p \in [2-\sqrt{3};1) \bigcup (1;\ 2+\sqrt{3}]$. Значение $p=1$ следует также включить в силу уже упомянутых соображений. ■

62. Сколько имеется целых положительных чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2+x+1}$?

♦ 9 ♦ $f(x) \in \left[0;\ \dfrac{28}{3}\right]$.

Решение. Применим аналогичный метод. Рассмотрим уравнение $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x+1} = p$, которое после приведения к общему знаменателю и приведения подобных примет вид

$$\frac{px^2+px+p-x^2+4x-4}{x^2+x+1} = 0$$

$\Leftrightarrow (\star)\ \ \dfrac{(p-1)x^2+(p+4)x+p-4}{x^2+x+1} = 0.$

При $p=1$ уравнение $(\star)$ имеет ровно один корень. Пусть $p \neq 1$. Исследуем дискриминант квадратного трехчлена в числителе уравнения $(\star)$, $D = (p+4)^2-4(p-1)(p-4)$. Уравнение $(\star)$ имеет по крайней мере один корень при условии $D \geqslant 0$, что равносильно неравенству $-3p^2+28p \geqslant 0$, множество решений которого

— промежуток $p \in [0; \dfrac{28}{3}]$. В это множество входят целые положительные числа $\{1; \ldots; 9\}$. ■

1.5.7. Применение неравенства Коши

Теоретические сведения

(1) Если $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ то $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

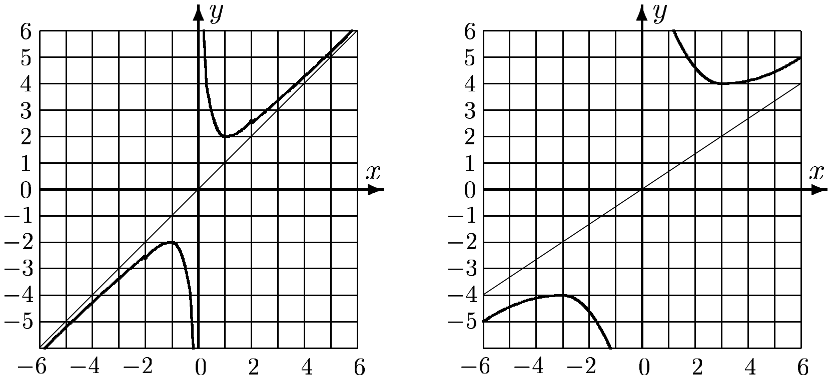
(2) Если $\begin{cases} a \leqslant 0, \\ b \leqslant 0, \end{cases}$ то $\dfrac{a+b}{2} \leqslant -\sqrt{ab}$, причем $\dfrac{a+b}{2} = -\sqrt{ab}$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

(3) На промежутке $x \in (0; 1]$ функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ убывает, на промежутке $x \in [1; +\infty)$ та же функция возрастает, наименьшее значение $f_{\min} = 2$ достигается в точке $x = 1$. Множество значений этой функции на промежутке $x \in (0; +\infty)$ совпадает с промежутком $[2; +\infty)$.

(4) На промежутке $x \in [-1; 0)$ функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ убывает, на промежутке $x \in (\infty; -1]$ та же функция возрастает, наибольшее значение $f_{\max} = -2$ достигается в точке $x = -1$. Множество значений этой функции на промежутке $x \in (-\infty; 0)$ совпадает с промежутком $(-\infty; -2]$.

(5) Множество значений функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на естественной области определения, $X = (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$, совпадает с объединением двух непересекающихся промежутков, $Y = (-\infty; -2] \bigcup [2; +\infty)$.

(6) Множество значений функции $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, где $a > 0$ и $b > 0$, на естественной области определения, $X = (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$, совпадает с объединением двух непересекающихся промежутков, $Y = (-\infty; -M] \bigcup [M; +\infty)$, где $M = 2\sqrt{ab}$.



(a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ **(b)** $y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{6}{x}$

Рис. 10. График функции $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$

63. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 100$ на промежутке $x \in (-\infty;\ 0)$.

♦ 98 ♦ $f(x) \in (-\infty;\ 98]$ при $x \in (-\infty;\ 0)$.

Решение. Функция $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ нечетная, $g(x) < 0$ при $x < 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$, поэтому наибольшее значение $g(x)$ на промежутке $x \in (-\infty;\ 0)$ равно наименьшему значению $g(x)$ на промежутке $x \in (0;\ +\infty)$. В соответствии с неравенством Коши, $x + \dfrac{1}{x} \leqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ на промежутке $x \in (0;\ +\infty)$, причем равенство достигается при $x = \dfrac{1}{x}$, т.е. при $x = 1$. Следовательно, наибольшее значение $g(x)$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ достигается в точке $x = -1$ и равно $g(-1) = -2$. Наконец, $f(x) = g(x) + 100$. ■

64. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 100$.

♦ 102 ♦ $f(x) \in [102;\ +\infty)$.

Решение. Из неравенства Коши следует, что $x^4 + \dfrac{1}{x^4} \geqslant 2\sqrt{x^4 \cdot \dfrac{1}{x^4}} = 2$, причем равенство имеет место при $x^4 = \dfrac{1}{x^4}$, т.е. при $x = \pm 1$. Итак, наименьшее значение функции $g(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ равно 2. ■

65. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 81 \operatorname{ctg}^2 x$.
♦ 18 ♦ $f(x) \in [18; +\infty)$.

Решение. Из неравенства Коши следует, что
$\operatorname{tg}^2 x + 81 \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot 81 \operatorname{ctg}^2 x} = 18$,
причем равенство имеет место при $\operatorname{tg}^2 x = 81 \operatorname{ctg}^2 x$, т.е. при $\operatorname{tg}^4 x = 81$, $\operatorname{tg} x = \pm 3$. Это уравнение имеет корни. ■

Теоретические сведения Наименьшее значение функции

$(\star)$ $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, $a > 0$; $b > 0$,
на промежутке $x \in (0; +\infty)$ равно
$(\star\star)$ $f_{\min} = 2\sqrt{ab}$,
достигается при
$(\star\star\star)$ $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

На практике часто выражение типа $(\star)$ получается после выполнения замены переменной $t = \varphi(x)$, после чего функция $f(x)$ приобретает вид (‡) $f(x) = at + \frac{b}{t}$. Прежде чем использовать формулу $(\star\star)$, проверьте, что значение, аналогичное $(\star\star\star)$, а именно, $t = \sqrt{\frac{b}{a}}$, принадлежит множеству значений функции $\varphi(x)$. Если это не так, то наименьшее значение функции (‡) не будет равно $(\star\star)$. Более точно, оно будет больше значения выражения $(\star\star)$. Суть этой проблемы будет пояснена в нескольких следующих примерах. В каждом из них мы будем выполнять замену переменной $t = \varphi(x)$ и проверять принадлежность критическрого значения t множеству значений $\varphi(x)$.

66. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 24x + \dfrac{6}{x}$ на промежутке $x \in (0;\ +\infty)$.
♦ 24, $f(x) \Subset [24;\ +\infty)$.
Решение. Используем неравенство Коши,
$24x + \dfrac{6}{x} \geqslant 2\sqrt{24x \cdot \dfrac{6}{x}} = 24$ при $x > 0$,
причем равенство имеет место при $24x = \dfrac{6}{x}$, т.е. при $x = 0{,}5$. ■

67. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 36\,\mathrm{tg}^2\,x + 49\cos^2 x$.
♦ 48, $f(x) \Subset [48;\ +\infty)$.
Решение. Преобразуем $f(x)$ к виду
$(\star)$ $f(x) = \dfrac{36}{\cos^2 x} - 36 + 49\cos^2 x$,
и выполним замену
$(\star\star)$ $t = \cos^2 x \Subset [0;\ 1]$.
Теперь $f(x) = \frac{36}{t} + 49t - 36$. Используем неравенство Коши, $49t + \frac{36}{t} \geqslant 2\sqrt{49t \cdot \frac{36}{t}} = 84$, причем равенство имеет место при $49t = \frac{36}{t}$, т.е. при $t = \frac{6}{7}$. Это значение принадлежит множеству значений функции $(\star\star)$, поэтому наименьшее значение функции $(\star)$ равно $84 - 36 = 48$. ■

68. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 49\,\mathrm{tg}^2\,x + 36\cos^2 x$.
♦ 36, $f(x) \Subset [36;\ +\infty)$.
Решение. Преобразуем $f(x)$ к виду
$(\star)$ $f(x) = \dfrac{49}{\cos^2 x} - 49 + 36\cos^2 x$,
и выполним замену
$(\star\star)$ $t = \cos^2 x \Subset [0;\ 1]$.
Теперь $g(t) = \dfrac{49}{t} + 36t - 49$. Используем неравенство Коши,
$36t + \dfrac{49}{t} \geqslant 2\sqrt{36t \cdot \dfrac{49}{t}} = 84$,
причем равенство имеет место при $36t = \dfrac{49}{t}$, т.е. при $t = \dfrac{7}{6}$. Это значение не принадлежит множеству значений функции $(\star\star)$.

Неравенство Коши справедливо, но теперь оно дает только ограничение на наименьшее значение, а именно, $f(x) \geqslant 84-49=35$, причем равенство заведомо не может иметь место. Для получения ответа проанализируем функцию $g(t)=\dfrac{49}{t}+36t-49$ на промежутке $t \in (0;\, 1]$ на монотонность. Это проще сделать с помощью производной (и будет сделано позднее, в соответствующей главе), $g(t)$ убывает на указанном промежутке. Поэтому наименьшее значение этой функции равно $g(1)=36$. ■

69. Найдите наименьшее значение функции
$(\star)$ $f(x)=x^2+4x+\frac{121}{x^2+4x+9}$.
⧫ $f_{\min}=13$, $f(x) \Subset [13;\, +\infty)$.
Решение 1. Выполним замену
$(\star\star)$ $t=x^2+4x+9$.
Заметим, что
$(\star\star)$ $x^2+4x+9=(x+2)^2+5 \Subset [5;\, +\infty)$
и
$\begin{cases} f(x)=t-9+\dfrac{121}{t}, \\ t=x^2+4x+9. \end{cases}$ Используем неравенство Коши,
$t+\dfrac{121}{t} \geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{121}{t}}=22$, причем равенство имеет место при $t=\dfrac{121}{t}$, т.е. при $t=11$ (учитываем, что $t>0$.) Это значение принадлежит множеству значений функции $(\star\star)$, поэтому наименьшее значение функции $(\star)$ равно $22-9=13$. ■
Решение 2. После выполнения замены переменной функцию $g(t)=t-9+\dfrac{121}{t}$ можно исследовать с помощью производной, $g'(t)=1-\dfrac{121}{t^2}=\dfrac{t^2-121}{t^2}$, поэтому $g(t)$ убывает на промежутке $t \in [5;\, 9]$ и возрастает на промежутке $t \in [9;\, +\infty)$, наименьшее значение достигается при $t=9$. Следует упомянуть о том, что точка $t=9$ принадлежит допустимому множеству $t \in [5;\, +\infty)$. ■

70. Найдите наименьшее значение функции
$(\star)$ $f(x)=x^2+4x+16+\dfrac{16}{x^2+4x+12}$.

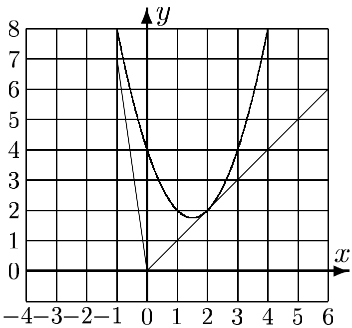


Рис. 11. 2884a5

Касание параболы и прямой

♦ $f_{\min} = 14$, $f(x) \Subset [14;\ +\infty)$.
Решение. Выполним замену $t = x^2 + 4x + 12 \Subset [8;\ +\infty)$. Теперь $\begin{cases} f(x) = t + 4 + \dfrac{16}{t}, \\ t = x^2 + 4x + 12. \end{cases}$ Используя неравенство Коши или производную, установим, что функция $g(t) = t + \dfrac{16}{t}$ возрастает на промежутке $t \in [4;\ +\infty)$, поэтому наименьшее значение функции $(\star)$ достигается при $t = 8$ и равно 14. ■

1.5.8. Касание параболы и линейной функции

71. Найдите все значения параметра k, при которых график функции $y = x^2 - 3x + 4$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = kx$.
♦ $k \in \{1;\ -7\}$. Соответствующие графики показаны на рис. 11.
Решение. Уравнение $x^2 - 3x + 4 = kx$ имеет единственный корень при условии равенства нулю дискриминанта, $(3 + k)^2 - 16 = 0$, $k = -3 \pm 4$, $k \in \{-7;\ 1\}$. ■

72. Найдите произведение всех различных значений параметра k, при которых график функции $(\star)$ $y = x^2 - 4x + 3$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $(\star\star)$ $y = kx$.
♦ $k_1 k_2 = 4$.

Решение 1. Уравнение $x^2-4x+3=kx$ запишем в виде $x^2-(4+k)x+3=0$. Это квадратное уравнение имеет ровно один корень, если и только если $(4+k)^2-12=0$, $4+k=\pm\sqrt{12}$, $k=-4\pm\sqrt{12}$. Произведение двух значений параметра можно установить неполсредственно с помощью формул сокращенного умножения. Более целесообразно использовать теорему Виета, в соответствии с которой произведение двух различных корней уравнения $(4+k)^2-12=0$ (с положительным дискриминантом) равно 4. Расположение двух прямых и параболы показано на рис. 12а. ■

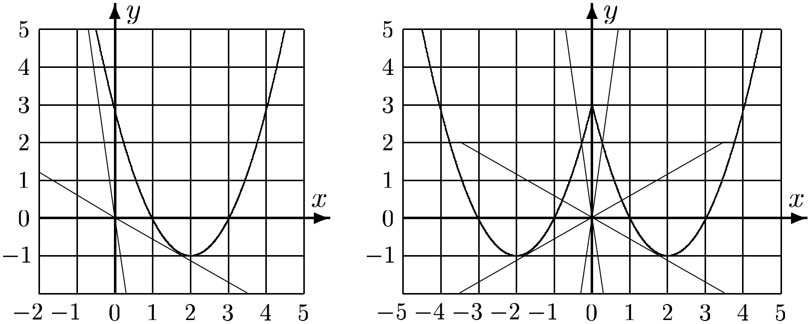
Решение 2. Уравнение $x^2-4x+3=kx$ имеет единственный корень, если и только если графики функций $(\star)$ и $(\star\star)$ касаются. В точке касания производные функций $(\star)$ и $(\star\star)$ равны, $\begin{cases} x^2-4x+3=kx, \\ 2x-4=k. \end{cases}$ Подставим выражение для k из второго уравнения системы в первое, $x^2-4x+3=2x^2-4x$, и приведем подобные, $x^2=3$, так что $x=\pm\sqrt{3}$, $k=-4\pm2\sqrt{3}$. ■

73. Найдите все значения параметра k, при которых график функции $y=x^2-4|x|+3$ имеет ровно три общих точки с графиком функции $y=kx$.

♦ $k=\pm\bigl(4+\sqrt{12}\bigr)$.

Решение. Так как $|x|=\begin{cases} x, \ x\geqslant 0, \\ -x, \ x<0, \end{cases}$ то

$x^2-4|x|+3=\begin{cases} x^2-4x+3, \ x\geqslant 0, \\ x^2-4x+3, \ x<0. \end{cases}$ Прямая и парабола могут иметь не больше двух общих точек, поэтому набрать три общих точки одной прямой и двух различных парабол можно тремя способами, **(1)** две и одна, **(2)** одна и две, **(3)** две и две, но одна пара общая для двух парабол. В данном случае последний вариант не возможен, так как общая точка парабол имеет координаты (0; 3) и через нее не может пройти прямая $y=kx$. **(1)** Прямая $y=kx$ имеет ровно одну общую точку с параболой $y=x^2+4x+3$ при $k_{1,2}=4\pm\sqrt{12}$. При $k=4-\sqrt{12}$. абсцисса этой общей точки $x=-\sqrt{3}$ (докажите это), а при $k=4+\sqrt{12}$. абсцисса общей точки $x=\sqrt{3}$ не удовлетворяет условию $x<0$. При любом $k>0$



(a) $y = x^2 - 4x + 3$ (b) $y = x^2 - 4|x| + 3$

Рис. 12. Касание параболы и прямой

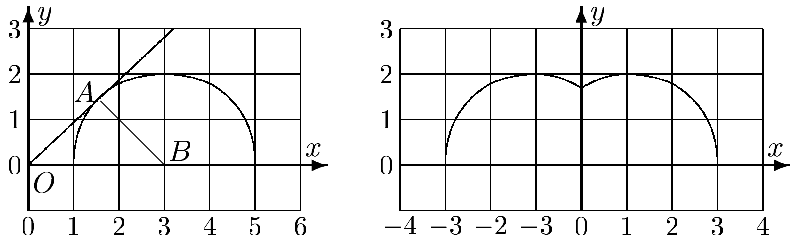
прямая $y = kx$ имеет ровно две различных общих точки с параболой $y = x^2 - 4x + 3$ (докажите это самостоятельно). Таким образом, получаем первый ответ, $k = 4 - \sqrt{12}$. Расположение двух прямых и параболы показано на рис. 12b. Посторонние решения $k = \pm(4 + \sqrt{12})$ также показаны. ■

1.6. Окружность и части окружности

Теоретические сведения Графиком функции

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2px - q}$

при условии $p^2 - q > 0$ является верхняя половина окружности $(x - p)^2 + y^2 = p^2 - q$, центр которой находится в точке $(p; 0)$, а радиус равен $\sqrt{p^2 - q}$. Если уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, то графиком функции $f(x) = \sqrt{-x^2 - bx - c}$ является верхняя половина окружности, центр которой находится в точке $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$, а радиус равен $\dfrac{|x_2 - x_1|}{2}$. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a > 1$, имеет два различных корня x_1 и x_2, то графиком функции $f(x) = \sqrt{-ax^2 - bx - c}$ является верхняя половина окружности, центр которой находится в точке $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$, а радиус равен



(a) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ (b) $y=\sqrt{-x^2+2|x|+3}$

Рис. 13. Дуги окружностей

$\dfrac{|x_2-x_1|}{2}$, растянутая в вертикальном направлении в $\sqrt{a}$ раз. При $a \in (0;\ 1)$ получается сжатая полуокружность. Заметим, что линия, которая получается растяжением окружности вдоль некоторой оси в определенное число раз, называется эллипсом.

74. Найдите значение параметра k, при котором уравнение $\sqrt{-x^2+5x-6}=\sqrt{k}\cdot x$ имеет ровно один корень.

♦ $k=\dfrac{4}{5}$.

Решение 1. График функции $\sqrt{-x^2+6x-5}$ — полуокружность с центром в точке $B(3;0)$ и радиусом 2, рис. 13a. Если прямая $y=\sqrt{k}\cdot x$ касается этой полуокружности в точке A, то $OB=3$, то $AB=2$, $OA \perp AB$, поэтому $\angle AOB=\arcsin(2/3)=\arccos(\sqrt{5}/3)=\operatorname{arctg}(2/\sqrt{5})$. Таким образом, $\sqrt{k}=\operatorname{tg}\angle AOB=2/\sqrt{5}$. ■

Решение 2. Уравнение $\sqrt{-x^2+6x-5}=\sqrt{k}\cdot x$ равносильно $-x^2+6x-5=kx^2$ с дополнительными условиями $k>0$, $x>0$. Это уравнение имеет единственный корень при условии нулевого дискриминанта, $4\big(9-5(k+1)\big)=0$, поэтому $5k=4$. ■

75. Нарисуйте график функции $f(x)=\sqrt{-x^2+4|x|-3}$.

♦ Это дуги двух окружностей, центр первой $x=2$, радиус 1, центр второй $x=-2$, радиус 1.

Решение. Рассмотрим сначала полуплоскость $x \geqslant 0$.
Тогда $y = f(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$, $(x-1)^2+y^2 = 1 \bigcap y \geqslant 0$. Мы получили первую часть ответа. Дальше можно рассмотреть аналогично полуплоскость $x \leqslant 0$, но быстрее использовать симметрию графика относительно оси ординат, наличие которой вытекает из того, что уравнение, определяющее график, имеет вид $y = g(|x|)$, где $g(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$. ■

76. Найдите значение параметра p, при котором уравнение $\sqrt{-x^2+2|x|+3} = \sqrt{p}$ имеет ровно три различных корня.
♦ 3
Решение. График функции $f(x) = \sqrt{-x^2+2|x|+3}$ состоит из двух дуг окружностей, с центром $(1;\,0)$ и радиусом 2 при $x \geqslant 0$, с центром $(-1;\,0)$ и радиусом 2 при $x \leqslant 0$. Их общая точка $(0;\,\sqrt{3})$ дает решение, рис. 13b. ■

1.7. Функции с модулями

1.7.1. Линейная функция с модулем

77. Нарисуйте график функции $f(x) = |x+1| + |x-1|$.
Решение. Функция четная. Выражение для $f(x)$ имеет вид **(1)** $f(x) = 2x$ при $x \geqslant 1$, **(2)** $f(x) = 2$ при $x \in [-1;\,1]$, **(3)** $f(x) = -2x$ при $x \leqslant -1$. График показан на рис. 14a. ■

78. Нарисуйте график функции $f(x) = |x+1| - |x-1|$.
Решение. Функция нечетная. Выражение для $f(x)$ имеет вид **(1)** $f(x) = 2$ при $x \geqslant 1$, **(2)** $f(x) = 2x$ при $x \in [-1;\,1]$, **(3)** $f(x) = -2$ при $x \leqslant -1$. График показан на рис. 14b. ■

79. Нарисуйте график функции $f(x) = ||x-3|-2|-1$.
Решение. В даном случае раскрывать модуль нецелесообразно. Лучше всего использовать преобразование графиков. **(1)** Нарисуем график $f_1(x) = |x|$. **(2)** Сдвинем график $y = f_1(x)$ вправо на 3 единицы и получим график $f_2(x) = |x-3|$. **(3)** Сдвинем график $y = f_2(x)$ вниз на 2 единицы и получим график $f_3(x) = |x-3|-2$. **(4)** Зеркально отразим нижнюю часть (ниже

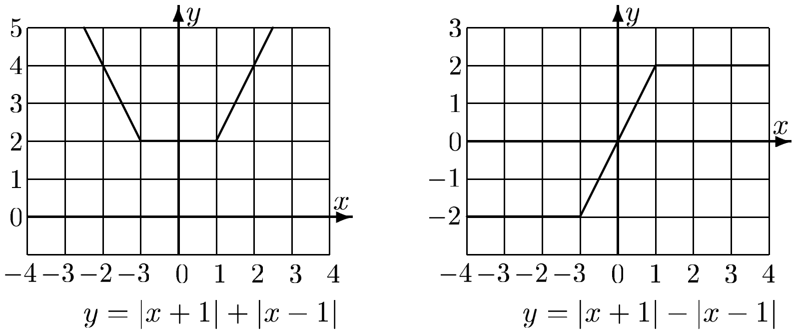


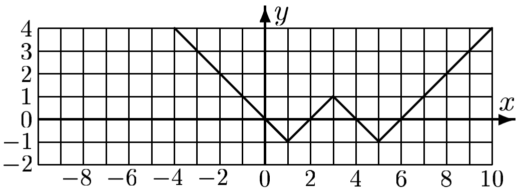
Рис. 14. Линейная функция с модулем

оси абсцисс) графика $y = f_3(x)$ относительно оси абсцисс и получим график $f_4(x) = ||x-3|-2|$. **(5)** Сдвинем график $y = f_4(x)$ вниз на 1 единицу и получим график $f_5(x) = ||x-3|-2|-1$. Результат показан на рис. 15a. ■

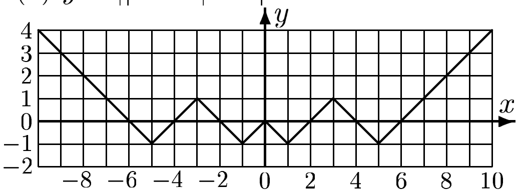
80. Нарисуйте график функции $f(x) = |||x|-3|-2|-1$.
Решение. Используем результат решения предыдущей задачи, а именно, график $f_5(x) = ||x-3|-2|-1$ (рис. 15a). Сотрем всю левую (левее оси ординат) часть графика. Правую часть отобразим зеркально налево относительно оси ординат. Результат показан на рис. 15b. ■

81. Нарисуйте график функции $(\star)$ $f(x) = |x-2| - |2x+2|$.
Решение. Функция $(\star)$ имеет две точки ветвления, $x \in \{-1; 2\}$, поэтому следует написать три выражения $f(x)$ для трех промежутков, **(1)** $f(x) = x+4$ при $x \in (-\infty; -1]$, **(2)** $f(x) = -3x$ при $x \in [-1; 2]$, **(3)** $f(x) = -x-4$ при $x \in [2; +\infty)$. Общие точки промежутков можно включить дважды, так как разрывов график не имеет. Результат показан на рис. 16a. ■

82. Нарисуйте функции $(\star)$ $f(x) = |x-2| - |2x+2| + |2x-2|$.
Решение. Функция $(\star)$ имеет три точки ветвления, $x \in \{-1; 1; 2\}$, поэтому следует написать три выражения $f(x)$ для четырех промежутков, **(1)** $f(x) = -x+6$ при $x \in (-\infty; -1]$, **(2)** $f(x) = -5x+2$ при $x \in [-1; 1]$, **(3)** $f(x) = -x-2$ при $x \in [1; 2]$, **(4)** $f(x) = x-6$ при $x \in [2; +\infty)$. Результат показан на рис. 16b. ■

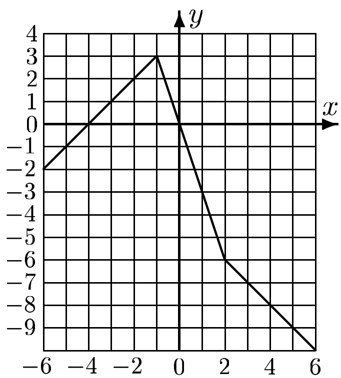


(a) $y = ||x-3|-2|-1$

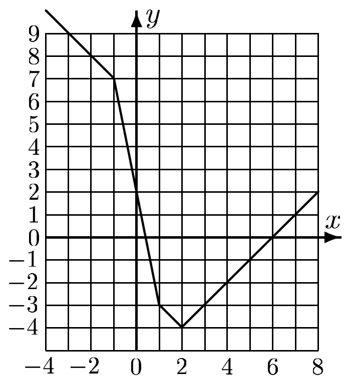


(b) $y = |||x|-3|-2|-1$

Рис. 15. Линейная функция с модулем



(a) $y = |x-2| - |2x+2|$



(b) $y = |x-2| - |2x+2| + |2x-2|$

Рис. 16. Линейная функция с модулем

83. Нарисуйте график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
Решение. Совпадает с графиком $f(x) = |x - 2|$. Нужно нарисовать график модуля, $f_1(x) = |x|$, и сдвинуть его вправо на 2 единицы. ■

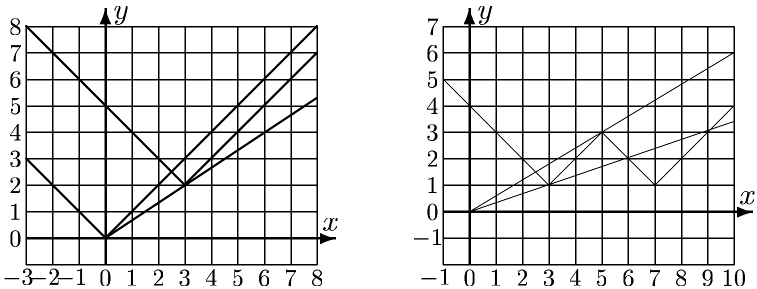
84. Нарисуйте график $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.
Решение. Совпадает с графиком $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$. Функция четная. Выражение для $f(x)$ имеет вид **(1)** $f(x) = 2x$ при $x \geqslant 2$, **(2)** $f(x) = 4$ при $x \in [-2; 2]$, **(3)** $f(x) = -2x$ при $x \leqslant -2$. График похож на рис. 14a, но основание перевернутой трапеции шире и расположено выше. ■

85. Найдите все значения параметра k, при котором уравнение $|x - 3| + 2 = kx$ имеет единственный корень.
♦ $k \in (-\infty; -1) \bigcup \{\dfrac{2}{3}\} \bigcup [1; +\infty)$.
Решение. Нарисовав график, рис. 17a, увидим, что возможны три случая,
(1) Прямая $y = kx$ имеет единственную общую точку с полупрямой $\begin{cases} y = -x + 5, \\ x < 0, \end{cases}$ это будет при $x \in (-\infty; -1)$.
(2) Прямая $y = kx$ проходит через точку $(3; 2)$.
(3) Прямая $y = kx$ имеет единственную общую точку с полупрямой $\begin{cases} y = -x + 5, \\ 0 < x < 3, \end{cases}$ это будет при $x \in (1; +\infty;)$. ■

86. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение $||x - 5| - 2| + 1 = kx$ имеет ровно три различных корня.
♦ $k \in \{\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\}$.
Решение. Нарисовав график, рис. 17b, увидим, что прямая $y = kx$ должна проходить через точку $(3; 1)$ или через точку $(5; 3)$. ■

1.7.2. Квадратный трехчлен с модулем

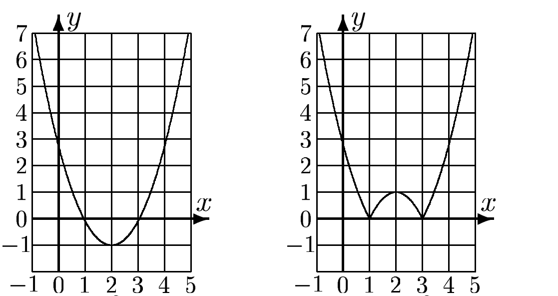
87. Определите промежутки монотонности, минимумы, максимумы, корни, множество значений, нарисуйте графики функций **(1)** $y = x^2 - 4x + 3$, **(2)** $y = x^2 - 4|x| + 3$, **(3)** $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$, **(4)** $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$,
Решение. См. рис. 18a, b, рис. 19a, b. ■



$y = |x - 3| + 2$ $\qquad$ $y = ||x - 5| - 2| + 1$

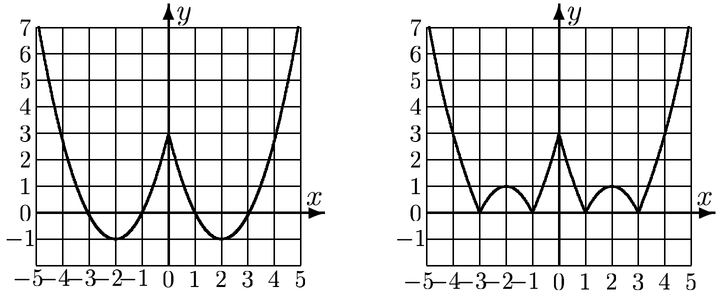
Рис. 17. ytrelx

Линейная функция с модулями



$y = x^2 - 4x + 3$ $\qquad$ $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

Рис. 18. Квадратный трехчлен с модулями, линейная функция с модулями



(a) $y = x^2 - 4|x| + 3$ (b) $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$

Рис. 19. Квадратный трехчлен с модулями

88. Найдите все значения параметра k, при которых график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = kx - 22$.

♦ $k = \pm 6$.

Решение График функции $x^2 - 4|x| + 3$, стоящей в левой части уравнения, показан на рис. 19а. Парабола $y = x^2 - 4x + 3$, $x \geqslant 0$, касается прямой $y = kx - 22$ при выполнении условия $(k+4)^2 - 100 = 0$, $k \in \{-14;\ 6\}$. Нас устраивает только точка $x \geqslant 0$, поэтому $k = 6$. Второе значение $k = -6$ определяется аналогично. Можно использовать также зеркальную симметрию графика относительно прямой $y = 0$. ■

89. Сколько корней имеет уравнение $(\star)$ $\left|x^2 - 4|x| + 3\right| = 3$?

♦ Три

Решение. График левой части уравнения $(\star)$ показан на рис. 20. Имеется корень $x = 0$, все остальные корни образуют пары вида $\pm x_k$, так как неизвестная величина x входит в уранвение $(\star)$ только в виде $|x|$. На промежутках $(0; 1)$ и $[1; 3]$ корней нет, на промежутке $[3;\ +\infty)$ иметсся единственый корень. ■

90. Нарисуйте график функции $f(x) = x^2 - 4|x - 1| + 5$.

♦ см.рис. 21а.

Решение. При $x \geqslant 1$ модуль раскрывается "с плюсом", $|x - 1| = x - 1$, так что $f(x) = x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$, вершина этой параболы расположена в точке (2; 5), а при $x \leqslant 1$ модуль раскрывается "с минусом", $|x - 1| = -x + 1$, так что

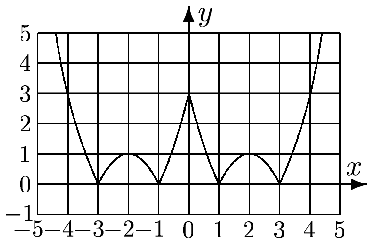
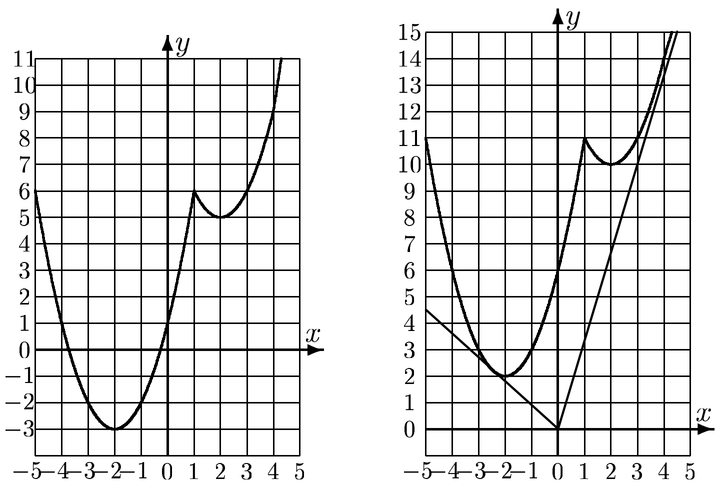


Рис. 20. Квадратный трехчлен с модулем 1503



$y = x^2 - 4|x-1| + 5$ $y = x^2 - 4|x-1| + 10$

Рис. 21. Квадратный трехчлен с модулями

$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$, вершина в точке $(-2;\ -3)$. Общая точка двух графиков $\big(1;\ f(1)\big) = (1;\ 6)$. ■

91. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(\star)$ $x^2 - 4|x - 1| + 5 = p$ имеет ровно три различных корня.
⧫ $p \in \{5;\ 6\}$.
Решение. Лучший путь решения этой задачи — исследование возрастания и убывания заданной функции, и в этом поможет график рис. 21a. Используя явные выражения функции при $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$, убедимся в том, что функция $f(x) = x^2 - 4|x - 1| + 5$ убывает при $x \leqslant -2$, возрастает при $x \in [-2;\ 1]$, убывает при $x \in [1;\ 2]$ и возрастает при $x > 2$. Уравнение $(\star)$ не имеет корней при $p < -3$, имеет единственный корень при $p = -3$, два корня при $p \in (-3;\ 5) \bigcup (6;\ +\infty)$, три корня при $p \in \{5;\ 6\}$, четыре корня при $p \in (5;\ 6)$. ■

92. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение $(\star)$ $y = x^2 - 4|x - 1| + 10 = kx$ имеет единственный корень.
⧫ $k \in \{-4 + 2\sqrt{14};\ 4 - 2\sqrt{6}\}$.
Решение. График рис. 21b, явное выражение для левой части уравнения $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 14 \text{ при } x \geqslant 1, \\ x^2 + 4x + 6 \text{ при } x \leqslant 1, \end{cases}$ Уравнение $x^2 - 4x + 14 = kx$ имеет единственный корень $x = -\sqrt{14}$ при $k = k_1 = -4 - 2\sqrt{14}$ и имеет единственный корень $x = \sqrt{14}$ при $k = k_2 = -4 + 2\sqrt{14}$. Условию $x \geqslant 1$ удовлетворяет только k_2. Уравнение $x^2 + 4x + 6 = kx$ имеет единственный корень $x = -\sqrt{6}$ при $k = k_3 = 4 - 2\sqrt{6}$ и имеет единственный корень $x = \sqrt{6}$ при $k = k_4 = 4 + 2\sqrt{6}$. Условию $x \leqslant 1$ удовлетворяет только k_3. ■

93. Нарисуйте графики функций
(1) $f(x) = |x - 1|(x - 3)$, **(2)** $f(x) = (x - 1)|x - 3|$,
(3) $f(x) = |x + 1|(x - 3)$, **(4)** $f(x) = (x + 1)|x - 3|$,
⧫ рис. 22a
Решение. Например, график $y = |x + 1|(x - 3)$ совпадает с параболой $y = (x + 1)(x - 3)$ при $x \geqslant -1$, а при $x < -1$ зеркально симметричен той же параболе относительно оси абсцисс. ■

94. Сколько различных корней имеет уравнение
$(x - 3) \cdot |x - 1| = -1$?
⧫ два.

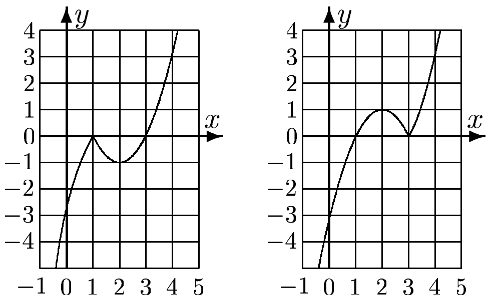


Рис. 22. Квадратный трехчлен с модулем

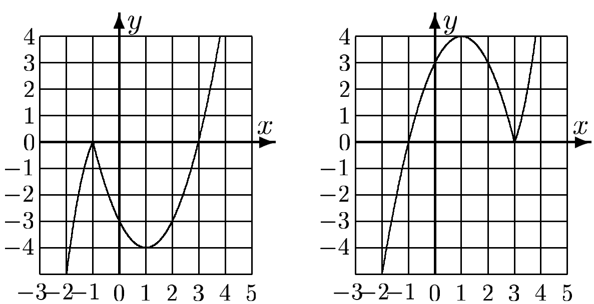


Рис. 23. Квадратный трехчлен с модулем

Решение. См. рис. 22a ■

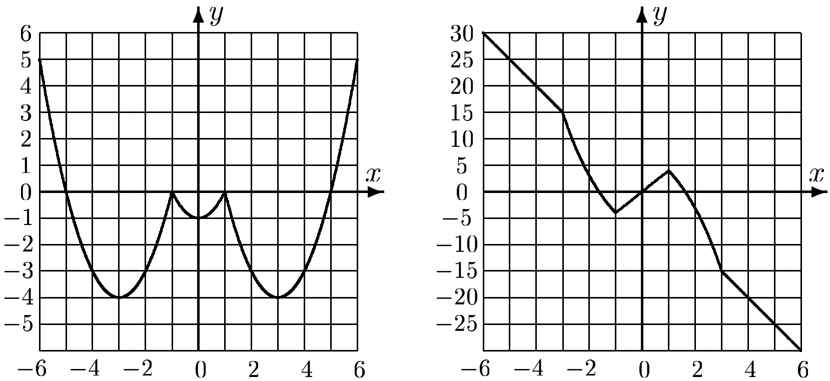
95. Сколько различных корней имеет уравнение
$(x-1)\cdot|x-3| = -1$?
♦ Один
Решение. См. рис. 23b ■

96. Нарисуйте график $(\star)$ $f(x) = x^2 - 3|x-1| - 3|x+1| + 5$.
Решение. Функция $(\star)$ имеет две точки ветвления, $x \in \{-1;\,1\}$, поэтому следует написать три выражения $f(x)$ для трех промежутков,
(1) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ при $x \in (-\infty;\,-1]$,
(2) $f(x) = x^2 - 1$ при $x \in [-1;\,1]$,
(3) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ при $x \in [1;\,+\infty)$. Результат показан на рис. 24a. ■

97. Нарисуйте график функции
$(\star)$ $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right| - \left|x^2 + 2x - 3\right|$.
Решение. Функция $(\star)$ имеет четыре точки ветвления, $x \in \{-3;\,-1;\,1;\,3\}$, поэтому следует написать пять выражений $f(x)$. Заметим, однако, что $f(x)$ — нечетная функция, поэтому достаточно будет трех промежутков,
(1) $f(x) = 4x$ при $x \in [0;\,1]$,
(2) $f(x) = 6 - 2x^2$ при $x \in [1;\,3]$,
(3) $f(x) = -4x$ при $x \in [3;\,+\infty)$. Результат показан на рис. 24b. Любопытно, что на двух полубесконечных промежутках и на отрезке график совпадает с линейной функцией. ■

1.7.3. Множества точек на плоскости

В некоторых классах задач при изучении зависимости одной величины (например, y) от другой (например, x) нельзя ограничиться только понятием функции, так как некоторым значениям x может соответствовать больше одного значения y. Например, множество точек на плоскости $(x,\,y)$, для которых $x^2 + y^2 = 1$, совпадает с окружностью, центр которой расположен в начале координат, а радиус равен 1. Для всех $x \in (-1;\,1)$ найдется ровно два значения y, $y_1 = \sqrt{1-x^2}$, $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$, поэтому или нужно допустить возможность нескольких значений y, или оставить для функции обычное определение, но рассматривать также множества точек, которые не могут быть заданы одной функцией



(a) $x^2 - 3|x-1| - 3|x+1| + 5$ (b) $\left|x^2 - 2x - 3\right| - \left|x^2 + 2x - 3\right|$

Рис. 24. Квадратный трехчлен с модулем

$y = f(x)$. В этой главе мы рассмотрим простейшие множества, которые задаются уравнениями вида $f(|x|, y) = 0$, $f(|x|, |y|) = 0$, $f(x, |y|) = 0$.

Теоретические сведения

(1) Уравнение $f(|x|,\, y) = c$ определяет множество точек D на плоскости, для которого ось ординат является осью симметрии. Это означает, что если точка $M_1(x;\, y)$ принадлежит D, то и точка $M_2(-x;\, y)$ принадлежит D.

(2) Уравнение $f(x,\, |y|) = c$ определяет множество, для которого ось абсцисс является осью симметрии.

(3) Уравнение $f(|x|,\, |y|) = c$ определяет множество точек, для которого обе кординатные оси являются осями симметрии.

(4) Если множество D определяется уравнением $f(x, y) = 0$, причем $f(x, y) = f(y, x)$ (имеется в виду тождественное равенство на всей области определения), то множество симметрично относительно прямой $y = x$.

(5) Если множество D определяется уравнением $f(x, y) = 0$, причем $f(x, y) = f(-y, -x)$, то множество симметрично относительно прямой $x + y = 0$.

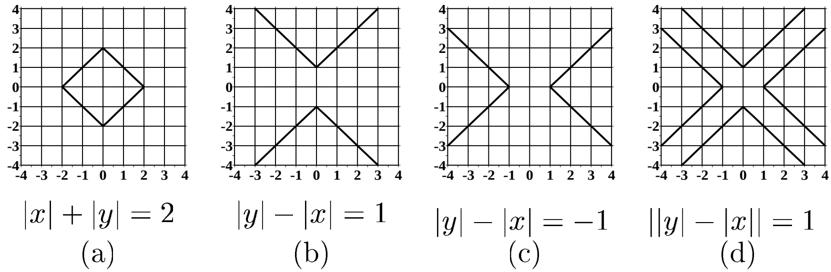


Рис. 25. Линейная функция с одним и двумя модулями на плоскости

98. Все точки на плоскости $(x; y)$, для которых $|x| + |y| \leqslant 2$ образуют многоугольник. Найдите его площадь.
⧫ 8 ⧫ Квадрат со стороной $2\sqrt{2}$.

Решение. Множество D имеет две оси симметрии, $x = 0$ и $y = 0$. Рассмотрим только I четверть координатной плоскости, $\{x \geqslant 0 \bigcap y \geqslant 0\}$, в которой заданное неравенство равносильно $x + y \leqslant 2$. Таким образом, в I четверти наше множество совпадает с прямоугольным треугольником $\{x \geqslant 0 \bigcap y \geqslant 0 \bigcap x + y \leqslant 2\}$, площадь которого равна 2. Площадь всей фигуры в 4 раза больше (рис. 25a). ■

99. Нарисуйте на плоскости $(x; y)$, множества точек, для которых
(1) $|y| - |x| = 1$, **(2)** $|y| - |x| = -1$, **(3)** $||y| - |x|| = 1$.
⧫ Ответы показаны на рис. рис. 25b, c, d.

Решение. В I четверти координатной плоскости, $\{x \geqslant 0 \bigcap y \geqslant 0\}$, заданные уравнения эквивалентны соответственно уравнениям $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = x \pm 1$. Первые два определяют прямые линии, третье — пару прямых. Следует взять только часть этих прямых, лежащую в первой четверти, и отразить зеркально относительно оси ординат. Получившееся множество отразить зеркально относительно оси абсцисс. ■

100. Нарисуйте на плоскости $(x; y)$, множества точек, для которых
(1) $(|x| - 3)^2 - (|y| - 3)^2 = 4$, **(2)** $(|x| - 2)^2 - (|y| - 2)^2 = 5$,

(3) $(|x|-2{,}5)^2-(|y|-2{,}5)^2=6{,}25$, **(4)** $(|x|-2)^2-(|y|-2)^2=8$.
♦ Ответы показаны на рис. рис. 26a — d.

Решение 1. В I четверти координатной плоскости, $\{x\geqslant 0\bigcap y\geqslant 0\}$, уравнение (1) равносильно уравнению $(x-3)^2-(y-3)^2=4$, которое описывает окружность с центром в точке (3; 3) и радиусом 2. Вся эта окружность целиком расположена в первой четверти, поэтому ответ получается зеркальным отражением этой окружности сначала во вторую четверть и затем пары полученных таким образом окружностей — в третью и четвертую четверть. Все четыре окружности не имеют общих точек. ■

Решение 2. В I четверти координатной плоскости, уравнение (2) равносильно уравнению $(\star)$ $(x-2)^2-(y-2)^2=5$, которое описывает окружность с центром в точке (2; 2) и радиусом $\sqrt{5}$. Расстояние от центра до осей абсцисс и ординат меньше радиуса, расстояние от центра до начала координат больше радиуса, поэтому две дуги окружности, расположенные во второй и четвертой четвертях, должны быть исключены. Положив $y=0$ в уравнении $(\star)$, получим корни $x\in\{1;\,3\}$, поэтому в первой четверти останутся дуги с координатами концов (1; 0), (0; 1), а также (3; 0), (0; 3). Несложно вычислить центральные углы, на которы опираются эти дуги. Меньшая дуга, например, опирается на угол $\frac{\pi}{2}-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}=\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$. Ответ получается зеркальным отражением этих двух дуг сначала во вторую четверть и затем — в третью и четвертую четверть. В результате получится две линии, составленных из дуг окружностей. ■

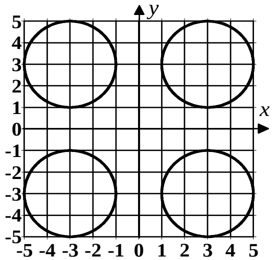
Решение 3. Рассуждая аналогично, получим четыре окружности, касающиеся друг друга. ■

Решение 4. Множество состоит из четырех полуокружностей с общими концами. Важно заметить, что начало координат также удовлетворяет уравнению и должно быть включено в ответ. ■

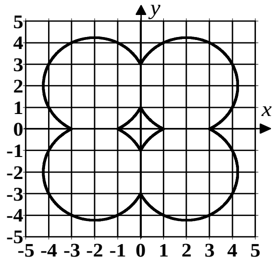
1.8. Задачи для самостоятельного решения

1.8.1. Элементарные функции и графики, 1

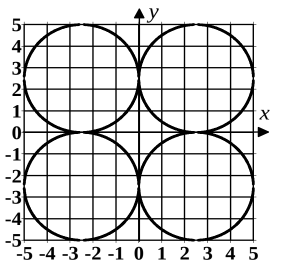
Если задание не указано особо, постройте график функции.



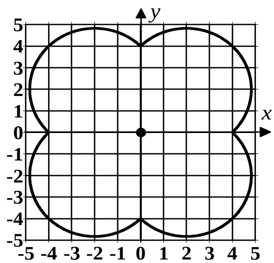
$(|x|-3)^2+(|y|-3)^2=4$



$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=5$



$(|x|-\frac{5}{2})^2+(|y|-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$



$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=8$

Рис. 26. Семейство дуг окружностей на плоскости

101. **(1)** $f(x)=x$. **(2)** $f(x)=x-2$. **(3)** $f(x)=|x|$.
(4) $f(x)=|x|-2$. **(5)** $f(x)=|x-2|$. **(6)** $f(x)=|x-2|-1$.
(7) $f(x)=||x-2|-1|$. **(8)** $f(x)=||x-2|-1|-1$.

102. **(1)** $f(x)=x^2-4x+3$. **(2)** $f(x)=-x^2+4x-3$.
(3) $f(x)=x^2+4x+3$. **(4)** $f(x)=x^2-4|x|+3$.
(5) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$. **(6)** $f(x)=\left|x^2-4|x|+3\right|$.
(7) $f(x)=\left|x^2-4|x|+3\right|-1$. **(8)** $f(x)=\left|\left|x^2-4|x|+3\right|-1\right|$.
(9) $f(x)=x^2-4|x-1|-1$. **(10)** $f(x)=x^2-4||x|-1|-1$.
(11) $f(x)=x^2-2|x|-2x+3$.
(12) $f(x)=x^2-2|x-1|-2|x+1|+3$.

103. Пусть $g(x)=x^2-4x+3$, $x\in[2;+\infty)$.Постройте график функции **(1)** $f(x)=g(|x|)$. **(2)** $f(x)=|g(x)|$. **(3)** $f(x)=|g(|x|)|$.
(4) $f(x)=g(-x)$. **(5)** $f(x)=-g(x)$. **(6)** $f(x)=-g(-x)$.
(7) $f(x)=g(x+2)$. **(8)** $f(x)=g(|x|+2)$. **(9)** $f(x)=g(2x)$.

(10) $f(x) = g(x/3)$. **(11)** $f(x) = 2g(x)$. **(12)** $f(x) = g(x)/3$.
(13) $f(x) = 2g(x/2)$. **(14)** $f(x) = g(2x)/2$.

104. Пусть $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in [2;\ +\infty)$. Постройте множество точек на плоскости $(x;\ y)$, для которых **(1)** $x = f(y)$. **(2)** $-x = f(y)$. **(3)** $x = f(-y)$. **(4)** $-x = f(-y)$.

105. **(1)** $f(x) = \frac{2x-9}{x-3}$. **(2)** $f(x) = \frac{2|x|-9}{|x|-3}$. **(3)** $f(x) = \left|\frac{2x-9}{x-3}\right|$.
(4) $f(x) = \left|\frac{2|x|-9}{|x|-3}\right|$. **(5)** $f(x) = \frac{2x-9}{|x|-3}$. **(6)** $f(x) = \frac{2|x|-9}{x-3}$.

106. **(1)** $f(x) = \sqrt{x^2}$. **(2)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
(3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4}$. **(4)** $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 4|x-2| + 4}$.

107. **(1)** $f(x) = \frac{|x|}{x}$. **(2)** $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$. **(3)** $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$.
(4) $f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$. **(5)** $f(x) = \frac{|x^2-4x+3|}{x^2-4x+3}$. **(6)** $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{|x^2-4x+3|}$.

108. **(1)** $f(x) = x \cdot |x|$. **(2)** $f(x) = (x-1) \cdot |x-1|$.
(3) $f(x) = (x-1) \cdot |x-3|$. **(4)** $f(x) = (x-3) \cdot |x-1|$.

109. **(1)** $f(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)(x-5)}$. **(2)** $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$.
(3) $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)|x-5|}$. **(4)** $f(x) = \frac{|x-3|(x-5)}{(x-3)|x-5|}$.

110. **(1)** $f(x) = x + |x|$. **(2)** $f(x) = |x-5| + |x+5|$.
(3) $f(x) = |x-5| - |x+5|$. **(4)** $f(x) = |x-5| + |x+1|$.
(5) $f(x) = |x-5| - |x+1|$.

111. **(1)** $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. **(2)** $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$.
(3) $f(x) = \sqrt{10|x| - x^2}$. **(4)** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$.
(5) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10|x| - 21}$. **(6)** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 21}$.
(7) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4|x| + 21}$. **(8)** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8|x-1| - 7}$.
(9) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8|x-1| + 1}$.
(10) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8|x-1| + 8}$.

1.8.2. Элементарные функции и графики, 2

Если задание не указано особо, постройте график функции.

112. **(1)** $f(x) = x$. **(2)** $f(x) = x + 3$. **(3)** $f(x) = |x+3|$.
(4) $f(x) = |x| + 3$. **(5)** $f(x) = |x+3| - 2$. **(6)** $f(x) = ||x+3| - 2|$.
(7) $f(x) = ||x+3| - 2| - 1$.

113. **(1)** $f(x) = x^2 - 8x + 15$. **(2)** $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.
(3) $f(x) = x^2 + 8x + 15$. **(4)** $f(x) = x^2 - 8|x| + 15$.
(5) $f(x) = \left|x^2 - 8x + 15\right|$. **(6)** $f(x) = \left|x^2 - 8|x| + 15\right|$.
(7) $f(x) = x^2 + 8|x| + 15$. **(8)** $f(x) = \left|x^2 + 8x + 15\right|$.
(9) $f(x) = \left|x^2 + 8|x| + 15\right|$. **(10)** $f(x) = x^2 - 8|x - 1| + 7$.
(11) $f(x) = x^2 - 8||x| - 1| + 7$.
(12) $f(x) = x^2 - 4|x - 1| - 4|x + 1| + 7$.

114. Пусть $g(x) = x^2 - 8x + 15$, $x \in (-\infty; 4]$. Постройте график функции **(1)** $f(x) = g(|x|)$. **(2)** $f(x) = |g(x)|$. **(3)** $f(x) = |g(|x|)|$.
(4) $f(x) = g(-x)$. **(5)** $f(x) = -g(x)$. **(6)** $f(x) = -g(-x)$.
(7) $f(x) = g(x + 4)$. **(8)** $f(x) = g(|x| + 4)$. **(9)** $f(x) = g(4x)$.
(10) $f(x) = g(x/3)$. **(11)** $f(x) = 2g(x)$. **(12)** $f(x) = g(x)/2$.
(13) $f(x) = 3g(x/3)$. **(14)** $f(x) = g(4x)/4$.

115. Пусть $f(x) = x^2 - 8x + 15$, $x \in (-\infty; 4]$. Постройте множество точек на плоскости $(x;\ y)$, для которых **(1)** $x = f(y)$.
(2) $-x = f(y)$. **(3)** $x = f(-y)$. **(4)** $-x = f(-y)$.

116. **(1)** $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$. **(2)** $f(x) = \frac{3|x|-4}{|x|-2}$. **(3)** $f(x) = \left|\frac{3x-4}{x-2}\right|$.
(4) $f(x) = \left|\frac{3|x|-4}{|x|-2}\right|$. **(5)** $f(x) = \frac{3x-4}{|x|-2}$. **(6)** $f(x) = \frac{3|x|-4}{x-2}$.

117. **(1)** $f(x) = \sqrt[4]{x^4}$. **(2)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.
(3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6|x| + 9}$.

118. **(1)** $f(x) = \frac{x}{|x|}$. **(2)** $f(x) = \frac{x+3}{|x+3|}$. **(3)** $f(x) = \frac{x+3}{|x|+3}$.
(4) $f(x) = \frac{x^2-8x+7}{|x^2-8x+7|}$. **(5)** $f(x) = \frac{(x^2-8x+7)\left|x^2-8x+12\right|}{(x^2-8x+12)|x^2-8x+7|}$.

119. **(1)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2}$. **(2)** $f(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.
(3) $f(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
(4) $f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.

120. **(1)** $f(x) = x - |x|$. **(2)** $f(x) = |x - 4| + |x + 4|$.
(3) $f(x) = |x - 4| - |x + 4|$. **(4)** $f(x) = |x - 1| + 2x + |x + 1|$.
(5) $f(x) = |x - 1| + 2x - |x + 1|$. **(6)** $f(x) = |x - 1| + |x| + |x + 1|$.

121. **(1)** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. **(2)** $f(x) = \sqrt{-8x - x^2}$.
(3) $f(x) = \sqrt{8|x| - x^2}$. **(4)** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 14x - 33}$.

(5) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 14|x| - 33}$. **(6)** $f(x) = \sqrt{-x^2 - 8x + 33}$.
(7) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8|x| + 33}$. **(8)** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 14|x-2| - 5}$.
(9) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 14|x-2| + 4}$.
(10) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 14|x-2| + 15}$.

1.8.3. Многоугольники на плоскости, 1

Нарисуйте на плоскости (x, y) множество точек, для которых

122. **(1)** $|x| + |y| = 4$, **(2)** $|x| + |y| < 4$, найдите площадь.

123. **(1)** $|x| - y = 4$, **(2)** $|y| - x = 4$, **(3)** $|y| - x \leqslant 4$.

124. **(1)** $|x| - |y| = 4$, **(2)** $|x| - |y| < 4$, **(3)** $|y| - |x| = 4$.

125. **(1)** $||y| - |x|| = 4$, **(2)** $||y| - 2|x|| = 4$.

126. **(1)** $|x-2| + |y| = 4$, **(2)** $|x| + |y-1| = 4$, **(3)** $|x-2| + |y-1| = 4$.

127. **(1)** $||x| - 2| + |y-1| = 4$, **(2)** $|x-2| + ||y| - 1| = 4$, **(3)** $||x| - 2| + ||y| - 1| = 4$, **(4)** $||x| - 2| + ||y| - 1| \leqslant 4$, найдите площадь.

128. Более сложное задание, **(1)** $|x+y| + |x-y| = 4$, **(2)** $|x+y| + |x-y| \leqslant 4$, найдите площадь, **(3)** $|x+y| - |x-y| = 4$.

129. **(1)** $x^2 - y^2 = 0$, **(2)** $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$, **(3)** $5x^2 - 26xy + 5y^2 = 0$.

130. **(1)** $x^2 + y^2 + 2xy = 4$, **(2)** $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant 4$.

131. **(1)** $9x^2 - 12xy + 4y^2 = 36$, **(2)** $9x^2 + 12xy + 4y^2 \leqslant 36$.

132. **(1)** $xy(x-y) = 0$, **(2)** $xy(x^2 - y^2) = 0$, **(3)** $xy(x^2 + y^2 - 4) = 0$,
(4) $(x^2 - 3xy + 2y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$,
(5) $xy(x^2 - y^2)(x^2 - 3y^2)(3x^2 - y^2) = 0$, **(6)** $xy(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$.

133. **(1)** $(y - x^2)(x - y^2) = 0$, **(2)** $xy + x^2y^2 = x^3 + y^3$,
(3) $(y^2 - x^4)(x^2 - y^4) = 0$, **(4)** $(y^2 - x^4)(x^2 - y^4)(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

134. **(1)** $|y| = x^2 - 6x + 5$, **(2)** $|y| = x^2 - 6|x| + 5$, **(3)** $|y| = \left|x^2 - 6x + 5\right|$, **(4)** $|y| = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$, **(5)** $|y - 4| = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$,
(6) $||y| - 4| = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$.

135. **(1)** $x^2 + y^2 + 2|xy| \leqslant 4$, **(2)** $x^2 + y^2 - 2|xy| \leqslant 4$.

136. **(1)** $x^2 + y^2 = 4$, **(2)** $x^2 + y^2 = 4x$, **(3)** $x^2 + y^2 = 4x + 4y$.

137. **(1)** $x^2 + y^2 = 4|x|$, **(2)** $x^2 + y^2 \leqslant 4|x|$, **(3)** $x^2 + y^2 = 4|x| + 4|y|$.

138. **(1)** $x^2 + y^2 = 2x + 3$, **(2)** $x^2 + y^2 = 2|x| + 3$.

139. Более сложное задание, **(1)** $x^2 + y^2 = 8x + 6y$, **(2)** $x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y|$, **(3)** $x^2 + y^2 = 8x + 6y + 25$, **(4)** $x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y| + 25$.

140. **(1)** $\begin{cases} y \leqslant 4 - |x|, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} y \geqslant ||x| - 1| - 2, \\ y \leqslant 0, \end{cases}$
(3) $\begin{cases} y \geqslant ||x - 3| - 2| - 1, \\ y \leqslant \frac{2}{3}x. \end{cases}$

141. **(1)** $\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 4, \\ x \geqslant 2, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 4, \\ |x| \leqslant 2, \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 7, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$

142. **(1)** $3|x| + 4|y| = 12$, **(2)** $3|x - 4| + 4|y - 3| = 12$, **(3)** $3||x| - 4| + 4|y - 3| = 12$. **(4)** $3||x| - 4| + 4||y| - 3| = 12$.

143. Нарисуйте на одном чертеже
(1) $x^2 + y^2 = 16$ и $y = x^2 - 4$, **(2)** $|x| + |y| = 4$ и $y = x^2 - 4$,
(3) $|x| - y = 0$ и $2y = x^2 + 1$, **(4)** $|x| + |y| = 4\sqrt{2}$ и $x^2 + y^2 = 4$,
(5) $|x| + |y| = 4$ и $2y = x^2 - 7$, **(6)** $|x| + |y| = 4$ и $x^2 + y^2 = 2|x|$.

1.8.4. Многоугольники на плоскости, 2

Нарисуйте на плоскости (x, y) множество точек, для которых

144. **(1)** $|x| + |y| = 6$, **(2)** $|x| + |y| < 6$, найдите площадь.

145. **(1)** $|x| - y = 6$, **(2)** $|y| - x = 6$, **(3)** $|y| - x \leqslant 6$.

146. **(1)** $|x| - |y| = 6$, **(2)** $|x| - |y| < 6$, **(3)** $|y| - |x| = 6$.

147. **(1)** $||y| - |x|| = 6$, **(2)** $|2|y| - 3|x|| = 6$.

148. **(1)** $|x - 5| + |y| = 6$, **(2)** $|x| + |y - 3| = 6$, **(3)** $|x - 5| + |y - 3| = 6$.

149. **(1)** $||x| - 5| + |y - 3| = 6$, **(2)** $|x - 5| + ||y| - 3| = 6$, **(3)** $||x| - 5| + ||y| - 3| = 6$, **(4)** $||x| - 5| + ||y| - 3| \leqslant 6$, найдите площадь.

150. Более сложное задание, **(1)** $|x+y|+|x-y|=6$, **(2)** $|x+y|+|x-y|\leqslant 6$, найдите площадь, **(3)** $|x+y|-|x-y|=6$.

151. **(1)** $4x^2-9y^2=0$, **(2)** $x^2-5xy+6y^2=0$, **(3)** $2x^2-5xy+2y^2=0$.

152. **(1)** $x^2+y^2-2xy=9$, **(2)** $x^2+y^2-2xy\leqslant 9$.

153. **(1)** $9x^2-24xy+16y^2=144$, **(2)** $9x^2+24xy+16y^2\leqslant 144$.

154. **(1)** $x^2y+xy^2=0$, **(2)** $(x^2-1)(y^2-1)(x^2-y^2)=0$, **(3)** $(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-2)=0$, **(4)** $(6x^2-5xy+y^2)(x^2+y^2-9)=0$, **(5)** $(x^4-y^4)(x^2+y^2-2)(|x|+|y|-2)=0$.

155. **(1)** $(y-x^3)(x-y^3)=0$, **(2)** $xy+x^3y^3=x^4+y^4$, **(3)** $(y^2-x^6)(x^2-y^6)=0$.

156. **(1)** $|y|=x^2-5x+6$, **(2)** $|y|=x^2-5|x|+6$, **(3)** $|y|=\left|x^2-5x+6\right|$, **(4)** $|y|=\left|x^2-5|x|+6\right|$, **(5)** $|y-6|=\left|x^2-5|x|+6\right|$, **(6)** $||y|-6|=\left|x^2-5|x|+6\right|$.

157. **(1)** $4x^2+9y^2+12|xy|\leqslant 144$, **(2)** $4x^2+9y^2-12|xy|\leqslant 144$.

158. **(1)** $x^2+y^2=6$, **(2)** $x^2+y^2=6x$, **(3)** $x^2+y^2=6x+6y$.

159. **(1)** $x^2+y^2=6|y|$, **(2)** $x^2+y^2\leqslant 6|y|$, **(3)** $x^2+y^2=6|x|+6|y|$.

160. **(1)** $x^2+y^2=24x+25$, **(2)** $x^2+y^2=24|x|+25$.

161. **(1)** $x^2+y^2=24x+10y$, **(2)** $x^2+y^2=24x+10|y|$, **(3)** $x^2+y^2=24|x|+10y$, **(4)** $x^2+y^2=24|x|+10|y|$.

162. **(1)** $|y|\leqslant 6-|x|$, **(2)** $0\leqslant y\leqslant 6-|x|$, **(3)** $||x-1|-2|-3\leqslant y\leqslant 0$, **(4)** $||x-5|-4|-1\leqslant y\leqslant \frac{3}{5}x$.

163. **(1)** $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 6,\\ y\leqslant 4,\end{cases}$ **(2)** $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 6,\\ |y|\leqslant 4,\end{cases}$ **(3)** $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 17,\\ x^2+y^2\leqslant 169.\end{cases}$

164. **(1)** $5|x|+4|y|=20$, **(2)** $5|x-3|+4|y-2|=20$, **(3)** $5||x|-3|+4|y-2|=20$. **(4)** $5||x|-3|+4||y|-2|=20$.

165. Нарисуйте на одном чертеже
(1) $x^2+y^2=144$ и $y=x^2-12$, **(2)** $|x|+|y|=12$ и $y=x^2-12$, **(3)** $|x|+|y|=12$ и $y=x^2-11{,}75$, **(4)** $|x|+|y|=12$ и $x^2+y^2=72$, **(5)** $|x|+|y|=12$ и $x^2+y^2=12|x|$.

Тема 2. Алгебраические уравнения

2.1. Линейные уравнения

2.1.1. Количество корней линейного уравнения

Теоретические сведения Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, если $a \neq 0$, не имеет решений, если $a = 0$, $b \neq 0$, и имеет бесконечно много решений, если $a = b = 0$. Если требуется определить условия, при которых линейное уравнение имеет более одного (более двух и т.д.) решений, то это означает, что следует выяснить условия, при которых имеет место третья из указанных альтернатив.

166. При каком значении параметра p уравнение
$-|x+2| + p|x| = x^2 - 2p$ имеет корень $x = -3$?
⧫ 2.
Решение. Подставим указанное значение x,
$-|-3+2| + p|-3| = (-3)^2 - 2p \Leftrightarrow p = 2.$ ■

167. Укажите все значения параметра a, при которых множество всех корней уравнения $a^2x + 1 = x + a$ совпадает с множеством $(-\infty; +\infty)$.
⧫ $a = 1$.
Решение. Запишем уравнение в виде $(a^2 - 1)x = a - 1$. Бесконечное множество корней будет при условии $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a - 1 = 0. \end{cases}$ ■

168. Найдите все значения параметра a, при которых множество всех корней уравнения $x \cdot \sin a + \cos a = x$ совпадает с множеством $(-\infty; +\infty)$.
⧫ $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$
Решение. Запишем уравнение в виде $(\sin a - 1)x + \cos a = 0$. Бесконечное множество решений будет при $\begin{cases} \sin a - 1 = 0, \\ \cos a = 0 \end{cases}$. ■