Тема 2. Алгебраические уравнения

2.1. Линейные уравнения

2.1.1. Количество корней линейного уравнения

Теоретические сведения Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, если $a \neq 0$, не имеет решений, если $a = 0$, $b \neq 0$, и имеет бесконечно много решений, если $a = b = 0$. Если требуется определить условия, при которых линейное уравнение имеет более одного (более двух и т.д.) решений, то это означает, что следует выяснить условия, при которых имеет место третья из указанных альтернатив.

166. При каком значении параметра p уравнение
$-|x+2| + p|x| = x^2 - 2p$ имеет корень $x = -3$?
♦ 2.
Решение. Подставим указанное значение x,
$-|-3+2| + p|-3| = (-3)^2 - 2p \Leftrightarrow p = 2$. ■

167. Укажите все значения параметра a, при которых множество всех корней уравнения $a^2x + 1 = x + a$ совпадает с множеством $(-\infty; +\infty)$.
♦ $a = 1$.
Решение. Запишем уравнение в виде $(a^2 - 1)x = a - 1$. Бесконечное множество корней будет при условии $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a - 1 = 0. \end{cases}$ ■

168. Найдите все значения параметра a, при которых множество всех корней уравнения $x \cdot \sin a + \cos a = x$ совпадает с множеством $(-\infty; +\infty)$.
♦ $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$
Решение. Запишем уравнение в виде $(\sin a - 1)x + \cos a = 0$. Бесконечное множество решений будет при $\begin{cases} \sin a - 1 = 0, \\ \cos a = 0 \end{cases}$. ■

169. При каких значениях параметра a уравнение
$(a-2)(a-4)x = (a-2)(a-5)$ не имеет корней?
♦ $a = 4$.

Решение. Условия $\begin{cases} (a-2)(a-4) = 0, \\ (a-2)(a-5) \neq 0. \end{cases}$ ■

170. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение $(a^4+144)x = 25a^2x + \cos\dfrac{\pi a}{2}$ имеет бесконечное множество корней.
♦ $a = \pm 3$.

Решение. Должны выполняться условия $\begin{cases} a^4 - 25a^2 + 144 = 0, \\ \cos\dfrac{\pi a}{2} = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in \{9;\ 16\}, \\ a \in 1+2n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ ■

2.1.2. Линейные уравнения с модулями

171. Решите уравнение $|x-18| = 37$.
♦ $x \in \{-19;\ 55\}$.
Решение 1. Используем определение модуля, $|x-18| = 37$
$\Leftrightarrow x - 18 = \pm 37 \Leftrightarrow x = 18 \pm 37$. ■
Решение 2. Заменим уравнение совокупностью систем
$\begin{cases} x \geqslant 18, \\ x - 18 = 37 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 18, \\ -x + 18 = 37. \end{cases}$ Решим каждую систему и получим $x_1 = 18 + 37$, $x_2 = 18 - 37$. ■

172. Известно, что разность корней уравнения $|x - 3p| = 4p$ равна 144. Найдите значение параметра p.
♦ $p = 18$.
Решение. (1) При $p < 0$ корней нет. **(2)** При $p \geqslant 0$ наше уравнение равносильно совокупности $x - 3p = \pm 4p$, поэтому $x_1 = -p$, $x_2 = 7p$. Из условия задачи следует, что $7p - (-p) = 144$. ■

173. Решите уравнение $|x-2| + 4 = |2x-1|$.
♦ $x \in \{-5;\ 3\}$.
Решение. Уравнение равносильно совокупности трех систем,
(1) $\begin{cases} x \in [2;\ +\infty), \\ x - 2 + 4 = 2x - 1, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x \in [0{,}5;\ 2), \\ -x + 2 + 4 = 2x - 1, \end{cases}$

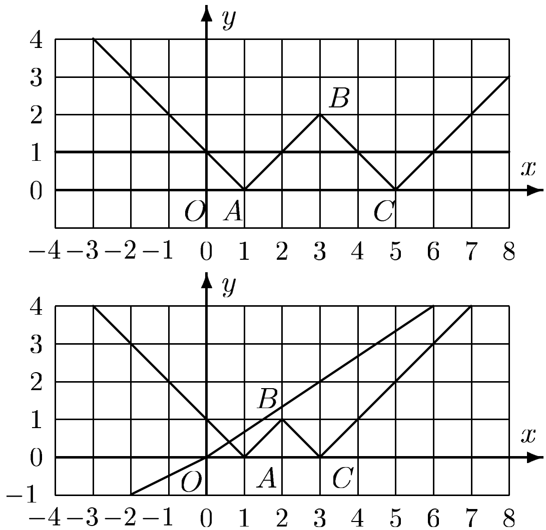


Рис. 27. Линейная функция с двумя модулями

(3) $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0{,}5), \\ -x+2+4=-2x+1, \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} x \in [2;\ +\infty), \\ x=3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \in [0{,}5;\ 2), \\ x=2{,}(3) \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \in (-\infty;\ 0{,}5), \\ x=-5. \end{cases}$

Имеется всего два корня, $x \in \{-5;\ 2\}$ ■

174. Решите уравнение $||x-3|-2|=1$.

♦ $x \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$.

Решение. Решая последовательно элементарные уравнения с модулем, получим $|x-3|-2=\pm 1$, затем $|x-3|=2\pm 1$, потом $|x-3|=1 \bigcup |x-3|=3$, далее $x-3=\pm 1 \bigcup x-3=\pm 3$, и наконец, $x=3\pm 1 \bigcup x=3\pm 3$. рис. 27а. ■

175. Решите уравнение $|x|=8||x-2|-1|-5x$.

♦ $\{\frac{4}{7};\ 12\}$

Решение. В принципе, можно раскрыть все модули и решить уравнение на каждом из промежутков. Этот путь требует большого количества операций, поэтому используем графический

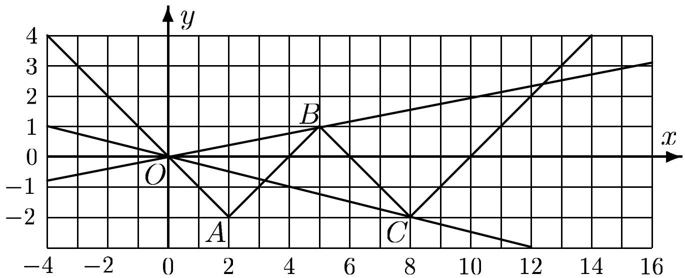


Рис. 28.

метод. Рассмотрим равносильное уравнение $(\star)$ $\left|\dfrac{x}{8}\right| + \dfrac{5x}{8} = ||x-2|-1|$. Графики левой и правой части показаны на рис. 27b. При $x < 0$ уравнение $(\star)$ равносильно $\dfrac{x}{2} = ||x-2|-1|$, корней на имеет. При $x \geqslant 0$ уравнение $(\star)$ равносильно уравнению $\dfrac{3x}{4} = ||x-2|-1|$, имеется два корня, которые можно найти из уравнений $\dfrac{3x}{4} = 1 - x$ и $\dfrac{3x}{4} = x - 3$. Решите их самостоятельно. ■

176. Найдите все значения паарметра p, при которых уравнение $(\star)$ $||x-5|-3| - 2 + \frac{x}{p} = 0$ имеет ровно три различных корня.
♦ $p \in \{-5; 4\}$.
Решение. Запишем уравнение $(\star)$ в виде
$(\star\star)$ $||x-5|-3| - 2 = kx$,
$k = -\frac{1}{p}$. Нарисуем график левой части $(\star\star)$, рис. 28. График правой части — прямая, проходящая через начало координат. Для получения трех решений прямые нужно провести через точку O и точки B или C. Их угловые коэффициенты равны соответственно $k_1 = \frac{1}{5}$ и $k_2 = -\frac{1}{4}$. ■

2.2. Квадратные уравнения

Теоретические сведения Уравнение $(\star)$ $ax^2 + bx + c = 0$

при $a \neq 0$ называется квадратным. Дискриминантом квадратного уравнения ($\star$) называется величина $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение ($\star$) имеет два различных корня, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то уравнение ($\star$) имеет единственный корень $x = \frac{-b}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение ($\star$) корней не имеет.
Решить квадратное уравнение можно не только с помощью общей формулы, но также и методом выделения полного квадрата. Выделением полного квадрата называется преобразование
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$
Если $a > 0$, то полный квадрат можно выделить еще и таким способом:
$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$
Если $a < 0$, то
$$ax^2 + bx + c = -\left(\sqrt{-a}x + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

2.2.1. Выделение полного квадрата

177. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 5x + 3$.
♦ $-3{,}25$
Решение. Выделим полный квадрат, $f(x) = (x - 2{,}5)^2 - 6{,}25 + 3$, поэтому $f(x) \Subset [-3{,}25; +\infty)$. ■

178. Найдите все значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x) = a + 4x - x^2$ превосходит число 8.
♦ $(4; +\infty)$.
Решение. Выделим полный квадрат, $f(x) = -(x - 2)^2 + 4 + a$, поэтому $f(x) \Subset (-\infty; a + 4]$. Из условия задачи следует, что $a + 4 > 8$. ■

2.2.2. Корни квадратного трёхчлена

179. Решите уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.
♦ $x \in \{1;\ 5\}$.

Решение 1. Найдем дискриминант $D = 16$ и используем формулу для корней, $x_{1,2} = \frac{6\pm4}{2}$. ■

Решение 2. Выделим полный квадрат, $x^2-6x+5 = (x-3)^2-4$. Уравнение примет вид $(x-3)^2 = 4$, затем $x-3 = \pm2$, и наконец, $x = 3\pm2$. ■

180. Решите уравнение $x^2 - 13x + 8 = 0$.

♦ $x \in \{\frac{13-\sqrt{105}}{2};\ \frac{13+\sqrt{105}}{2}\}$.

Решение 1. Найдем дискриминант $D = 105$ и используем формулу для корней, $x_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{105}}{2}$. ■

Решение 2. Выделим полный квадрат,
$x^2 - 13x + 8 = (x - \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} + 8$. Уравнение примет вид
$(x - \frac{13}{2})^2 = \frac{169}{4} - 8$, затем $x = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{105}{4}}$. ■

181. Решите уравнение $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2-8x+15)}{x^2-7x+10} = 0$.

♦ $x \in \{1;\ 3\}$.

Решение. Разложим на множители каждый из квадратных трехчленов, $\dfrac{(x-1)(x-3)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-5)} = 0$. Число $x = 5$ корнем не является. ■

2.2.3. Расстояние между корнями

Теоретические сведения Если дискриминант квадратного уравнения $(\star)$ $ax^2+bx+c = 0$ положителен, то расстояние между корнями уравнения $(\star)$ равно $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$.

182. Найдите расстояние между корнями уравнения
$x^2 - \sqrt{101}x + 13 = 0$.

♦ 7

Решение. Дискриминант равен 49, поэтому расстояние между корнями равно 7. ■

183. Найдите расстояние между корнями уравнения
$13x^2 - \sqrt{101}x + 1 = 0$.

♦ $\dfrac{7}{13}$.

Решение. Дискриминант равен 49, поэтому расстояние между корнями равно $\dfrac{7}{13}$. ■

2.2.4. Разложение на множители

Теоретические сведения Если квадратный трехчлен
$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, имеет два различных корня x_1 и x_2, то
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

184. Разложите на множители квадратный трехчлен $x^2 - 5ax + 6a^2$.
♦ $(x - 2a)(x - 3a)$.
Решение. Дискриминант равен a^2, поэтому корни $x_{1,2} = \frac{5a \pm a}{2}$. Заметим, что писать модуль перед a в числителе не обязательно, так как перед этой величиной стоит символ $\pm$. Таким образом, $x_{1,2} = \{2a;\ 3a\}$. ■

185. Разложите на множители квадратный трехчлен
$x^2 - (5a + 3)x + (3a + 2)(2a + 1)$.
♦ $(x - 3a - 2)(x - 2a - 1)$.
Решение 1. Дискриминант равен $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$, поэтому корни $x_{1,2} = \frac{5a+3\pm(a+2)}{2}$, $x_{1,2} = \{3a + 2;\ 2a + 1\}$. ■
Решение 2. В данном случае эффективно использование теоремы Виета, метод будет обсужден далее. ■

186. Разложите на множители квадратный трехчлен
$f(x) = a^2x^2 - a(a + 2)x + a + 1$ при $a \neq 0$.
♦ $(ax - 1)(ax - a - 1)$.
Решение. Аналогично найдем корни $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = \frac{a+1}{a}$, поэтому при $a \neq 0$ имеем
$f(x) = a^2\Big(x - \frac{1}{a}\Big)\Big(x - \frac{a+1}{a}\Big)$.
При любом a верно равенство $f(x) = (ax - 1)(ax - a - 1)$. ■

187. Разложите на множители квадратный трехчлен
$f(x) = x^2 - 2(p^2 + 1)x + p^4 + 1$.
♦ $\big(x - (p^2 + \sqrt{2}\,p + 1)\big)\big(x - (p^2 - \sqrt{2}\,p + 1)\big)$.

Решение 1. Заметим, что
$(p^2+\sqrt{2}\,p+1)+(p^2-\sqrt{2}\,p+1)=2p^2+2,$
$(p^2+\sqrt{2}\,p+1)(p^2-\sqrt{2}\,p+1)=p^4+1,$
поэтому $x_{1,2}=p^2\pm\sqrt{2}\,p+1.$ ■

Решение 2. Дискриминант квадратного трехчлена с параметром $x^2-2(p^2+1)x+p^4+1$ равен $4(p^2+1)^2-4p^4-4=8p^2$, $x_{1,2}=\dfrac{2(p^2+1)\pm2\sqrt{2}|p|}{2}$, при любом знаке p корни равны $x_{1,2}=p^2+1\pm\sqrt{2}\,p.$ ■

188. Разложите на множители выражение $f(x)=x^3-6x^2+5x$.
♦ $x(x-1)(x-5)$.

Решение. Сначала вынесем за скобку x, получим
$(\star)\;\; f(x)=x(x^2-6x+5)$. Корни равны $\{0;\,1;\,5\}$, и можно теперь разложить квадратный трехчлен в $(\star)$ на множители. ■

189. Разложите на множители выражение $f(x)=x^2+1$ при $x>0$.
♦ $(x+\sqrt{2x}+1)(x-\sqrt{2x}+1)$.

Решение. Дополним $f(x)$ до полного квадрата,
$(\star)\;\; f(x)=x^2+2x+1-2x.$
Теперь преобразуем $(\star)$ как разность квадратов,
$f(x)=(x+1)^2-(\sqrt{2x})^2=(x+1-\sqrt{2x})(x+1+\sqrt{2x}).$ ■

190. Разложите на множители выражение $f(x)=x^4+1$.
♦ $(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$.

Решение. Действуем по аналогии,
$(\star)\;\; f(x)=x^4+2x^2+1-2x^2,$
затем $f(x)=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$. В отличие от предыдущей задачи, эта формула верна при любом x. ■

2.2.5. Прямая и обратная теоремы Виета

Теоретические сведения Если квадратный трехчлен

$f(x)=ax^2+bx+c,\; a\neq0$, имеет два различных корня x_1и x_2, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\;\; x_1x_2=\frac{c}{a}$, (первая теорема Виета)
Два числа m и n, $m\neq n$, являются корнями квадратного уравнения $x^2-(m+n)x+mn=0$, (вторая теорема Виета).

191. Найдите сумму всех различных корней уравнения
$100x^3 + 399x^2 = -299x$.
♦ $-3{,}99$.
Решение 1. Запишем уравнение в виде $x(100x^2+399x+299) = 0$. Один из корней $x_0 = 0$. Квадратное уравнение
$(\star)$ $100x^2 + 399x + 299 = 0$
имеет положительный дискриминант, поэтому по первой теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{399}{100}$. ■
Решение 2. Одним из корней $(\star)$ является число $x_2 = -1$. По первой теореме Виета второй корень этого уравнения равен $x_3 = -\frac{299}{100}$. ■
192. Найдите расстояние между корнями уравнения
$(\star)$ $x^2 - 10\sqrt{3}x + 63 = 0$.
♦ $4\sqrt{3}$.
Решение. Запишем уравнение $(\star)$ в виде
$x^2 - (7\sqrt{3} + 3\sqrt{3})x + 7\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3} = 0$.
По второй теореме Виета его корни равны $x_1 = 7\sqrt{3}$, $x_2 = 3\sqrt{3}$.
■

193. Укажите квадратное уравнение, корни которого являются взаимно обратными числами.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $5x^2 - 30x - 5 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $5x^2 - 5x - 1 = 0$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $5x^2 - 13x + 1 = 0$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $5x^2 - 13x + 5 = 0$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $5x^2 + 5x - 3 = 0$
Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $5x^2 - 13x + 5 = 0$.

Решение. Нужно найти уравнение, произведение корней которого равно 1. По первой теореме Виета подходит только уравнение $5x^2 - 13x + 5 = 0$. ■

194. Разложите на множители квадратный трехчлен
$x^2 - (5a + 3)x + (3a + 2)(2a + 1)$.
♦ $(\star)$ $(x - 3a - 2)(x - 2a - 1)$.
Решение. Заметим, что $(3a+2)+(2a+1) = 5a+3$. Поэтому корни данного уравнения равны $x_1 = 3a + 2$ и $x_2 = 2a + 1$. Возможно $x_1 = x_2$, и тогда корень один. На разложение $(\star)$ это не влияет.
■

195. Найдите все значения параметра b, при которых корни уравнения $(\star)$ $x^2 + bx + 6 = 0$ — положительные числа, которые относятся как $2 : 3$.

♦ $b = -5$.

Решение. В соответствии с условиями, корни равны $2p$ и $3p$, где $p > 0$. Приведенное уравнение с указанными корнями имеет вид $(\star\star)$ $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$.
Сравнивая $(\star)$ и $(\star\star)$, получим $6p^2 = 6$, а так как $p > 0$, то $p = 1$, $b = -5$. ■

2.2.6. Составление уравнения с заданными корнями

196. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого равны 2 и 3
♦ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. Сумма корней равна 5, произведение корней равно 6, приведенное уравнение с такими корнями имеет вид $x^2 - 5x + 6 = 0$. ■

197. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого равны $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$.
♦ $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Решение. Сумма корней равна 6, произведение равно 7, по второй теореме Виета приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 6x + 7 = 0$. ■

198. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого на 1 больше корней квадратного уравнения $2x^2 - 8x + 3 = 0$.
♦ $x^2 - 6x + 6{,}5 = 0$.

Решение 1. Если старое уравнение имеет вид $f(x) = 0$, то новое уравнение можно записать в виде $cf(x - 1) = 0$, где $c \neq 0$. Выберем $c = 1$, тогда новое уравнение можно записать в виде
$2(x - 1)^2 - 8(x - 1) + 3 = 0$, или $2x^2 - 12x + 13 = 0$. ■

Решение 2. Пусть корни старого уравнения x_1, x_2. Сумма корней старого уравнения $x_1 + x_2 = 8/2$, произведение корней $x_1x_2 = 3/2$. Сумма корней нового уравнения $x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + 2 = 6$, произведение корней $x_3x_4 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 6{,}5$, поэтому новое уравнение можно записать в виде $x^2 - 6x + 6{,}5 = 0$. Этот способ годится только для квадратных уравнений с положительным дискриминантом (комплексные корни в рамках школьной программы не учитываются). ■

199. Укажите квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней уравнения $x^2 - 7x + 2 = 0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2x^2 - 7x + 1 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x^2 + 7x + 2 = 0$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x^2 - 14x + 2 = 0$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x^2 - 7x + 8 = 0$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x^2 - 14x + 8 = 0$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x^2 - 14x + 8 = 0$.

Решение 1. Если старое уравнение имеет вид $f(x) = 0$, то новое уравнение можно записать в виде $f(\frac{x}{2}) = 0$, или $\frac{x^2}{4} - 7\frac{x}{2} + 2 = 0$. Соответствующее приведенное уравнение имеет вид $4x^2 - 14x + 8 = 0$. ■

Решение 2. Пусть корни старого уравнения x_1, x_2. Сумма корней старого уравнения $x_1 + x_2 = 7$, произведение корней $x_1 x_2 = 2$. Сумма корней нового уравнения $x_3 + x_4 = 2x_1 + 2x_2 = 14$, произведение корней $x_3 x_4 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 8$, поэтому новое уравнение можно записать в виде $x^2 - 14x + 8 = 0$. ■

200. Укажите квадратное уравнение, корни которого являются обратными числами по отношению к корням уравнения $3x^2 + 5x - 12 = 0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $5x^2 - 3x - 12 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $12x^2 - 5x - 3 = 0$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $12x^2 - 3x - 5 = 0$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $15x^2 - 8x - 15 = 0$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $12x^2 + 5x - 3 = 0$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $12x^2 - 5x - 3 = 0$.

Решение 1. Если старое уравнение имело вид $f(x) = 0$, то новое можно записать в виде $f(1/x) = 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с положительным дискриминантом и $c \neq 0$ получим новое уравнение $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$, которое при сформулированных условиях равносильно квадратному уравнению $cx^2 + bx + a = 0$. Таким образом, для перехода к квадратному уравнению с обратными корнями достаточно поменять местами первый и последний коэффициенты. ■

Решение 2. Эту задачу можно решить так же как предыдущую, вычислив сумму и произведение корней исходного уравнения. ■

201. Укажите квадратное уравнение, корни которого являются квадратами корней уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x^2 - 25x + 144 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x^2 - 49x + 144 = 0$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $x^2 - 73x + 144 = 0$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $12x^2 - 7x + 1 = 0$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x^2 + 49x - 144 = 0$

Ответ $\boxed{1}$ ♦ $x^2 - 25x + 144 = 0$.

Решение 1. Корни исходного уравнения равны 3 и 4, что позволяет решить задачу подсчетом искомых значений новых корней. ■

Решение 2. Заметим, что для уравнения $x^2 + bx + c = 0$ при условии $b^2 - 4c > 0$ имеем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_2x_2 = b^2 - 2c$, $x_1^2 \cdot x_2^2 = c^2$, поэтому уравнение с указанными корнями имеет вид $x^2 - (b^2 - 2c)x + c^2 = 0$. ■

2.2.7. Вычисление симметрических функций

Теоретические сведения Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, то $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. Обозначим эти величины $u = x_1 + x_2$ и $v = x_1x_2$. Тогда

(1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = u^2 - 2v$,

(2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = u^3 - 3uv$,

(3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$,

(4) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{u}{v}$,

(5) $\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{u^2 - 2v}{v}$.

202. Для уравнения $x^2 - 8x + 2$ с корнями x_1 и x_2 найдите значение выражения $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

♦ 4.

Решение. Искомое значение можно выразить через коэффициенты уравнения, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{8}{2} = 4$. ■

203. Найдите сумму квадратов всех различных корней уравнения $x^2 + 5x + 2 = 0$.

♦ 21

Решение. Заметим, что уравнение имеет два различных корня. Сумму квадратов корней можно вычислить, не решая само уравнение, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$. ■

204. Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$. Найдите значение выражения $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1}$.

♦ -44

Решение. Используем теорему Виета, получим

$\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \dfrac{4^3 - 3 \cdot 4 \cdot (-2)}{-2} = -44.$ ■

205. Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 21x + 4 = 0$. Найдите значение выражения $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

♦ 5

Решение. Заметим, что заданное уравнение имеет два различных положительных корня. Пусть $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = t$, причем $t > 0$. Тогда

$t^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 21 + 4 = 25.$ ■

206. Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 29x + 4 = 0$, причем $x_2 > x_1$. Найдите значение выражения $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$.

♦ 5

Решение. Заметим, что заданное уравнение имеет два различных положительных корня. Пусть $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = t$, причем $t > 0$. Тогда

$t^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 29 - 4 = 25.$ ■

207. Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 18x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$.

♦ 3.

Решение. Заметим, что заданное уравнение имеет два различных положительных корня. Пусть $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = t$, причем $t > 0$. Тогда

$t^3 = x_1 + x_2 + 3t\sqrt[3]{x_1 x_2}$, поэтому t — корень кубического уравнения $t^3 = 18 + 3t$, один из корней которого $t = 3$ (подбирается среди делителей числа 18, см. далее). Делением многочлена $t^3 - 3t - 18$ на $t - 3$ получим квадратное уравнение $t^2 + 3t + 6 = 0$, которое корней не имеет. ■

208. Найдите значение параметра a, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения

$(\star)$ $x^2 - (2a - 4)x + (a - 1)(a - 3) = 0$

принимает наименьшее возможное значение.

♦ $a = 2$.

Решение 1. С помощью теоремы Виета найдем
$x_1^2 + x_2^2 = (2a-4)^2 - 2(a-1)(a-3) = 2a^2 - 8a + 10$.
Наименьшее значение этого квадратного трехчлена достигается при $a = 2$. Следует проверить, что при этом значении параметра уравнение имет два различных корня. ■

Решение 2. Так как корни ($\star$) равны $x_1 = a-1$, $x_2 = a-3$, то $x_1^2 + x_2^2 = 2a^2 - 8a + 10$. ■

209. Найдите значение параметра p, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения
($\star$) $(x-2)\big(x^2 - (2p-4)x + p^2 - 4p + 3\big) = 0$
принимает наименьшее возможное значение.

♦ $p = 3$.

Решение 1. Корни найдем так же, как при решении предыдущей задачи, $x_1 = p-1$, $x_2 = p-3$, $x_3 = 2$.

(1) При $\begin{cases} p \neq 3, \\ p \neq 5 \end{cases}$ имеется три различных корня, причем $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (p-1)^2 + (p-3)^2 + 2^2 = 2p^2 - 8p + 14$. Наименьшее значение этого квадратного трехчлена достигается при $p = 2$ и оно равно 6.

(2) При $p = 3$ два корня, $p \in \{0; 2\}$, $p_1^2 + p_2^2 = 4$

(3) При $p = 5$ два корня, $p \in \{2; 4\}$, $p_1^2 + p_2^2 = 20$. Таким образом, верный ответ $p = 3$. ■

Теоретические сведения Число $x = 1$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в тех и только тех случаях, когда $a+b+c = 0$. Число $x = -1$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в тех и только тех случаях, когда $a - b + c = 0$.

210. Расстояние между нулями функции $y = 261x^2 - 485x + 224$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{485}{261}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{17}{19}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{9}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{37}{261}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{2}{9}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $\frac{37}{261}$.

Решение. В данном случае $261 - 485 + 224 = 0$, поэтому число 1 является корнем. Второй корень найдем по теореме Виета через произведение корней, $x_2 = \frac{224}{261}$. ■

2.2.8. Квадратные уравнения с рациональными коэффициентами

Теоретические сведения Если один из корней квадратного

уравнения с рациональными коэффициентами является рациональным числом, то и второй корень — рациональное число. Если один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами является иррациональным числом, то и второй корень — иррациональное число. Если один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $a+\sqrt{b}$, где числа a и b являются рациональными, а число $\sqrt{b}$ — иррациональным, то второй корень равен $a-\sqrt{b}$, сумма корней — рациональное число $2a$, произведение корней — рациональное число a^2-b. Приведенное квадратное уравнение с указанными корнями имееет вид $x^2-2ax+a^2-b=0$.

211. Свободный член приведенного квадратного уравнения с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$, равен

1 2 **2** $-0,5$ **3** -2 **4** 3 **5** 1

Ответ **5** ♦ 1.

Решение. Заметим, что $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$, $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,
$\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=2+\sqrt{3}$, поэтому второй корень равен $2-\sqrt{3}$, приведенное уравнение с такими корнями имеет вид $x^2-4x+1=0$. ■

2.3. Приводящиеся к квадратным

2.3.1. Метод алгебраических преобразований

Замечание. Нередко уравнение, по внешнему виду не являющееся квадратным, может быть преобразовано к квадратному методом равносильных преобразований. В задачах секции С равносильность должна быть обоснована.

212. Надите сумму всех различных корней уравнения
$(\star)\ \dfrac{3}{x^3}-\dfrac{36}{x^2}+\dfrac{4}{x}=0.$

⧫ 9

Решение 1. Уравнение $(\star)$ равносильно уравнению $\dfrac{3-36x+4x^2}{x^3}=0$ и системе $\begin{cases} x\neq 0,\\ 4x^2-36x+3=0.\end{cases}$ Второе уравнение этой системы – квадратное – имеет положительный дискриминант $\Rightarrow$ два различных корня, сумму которых найдем по теореме Виета. ■

Решение 2. Используем замену переменных. Уравнение $(\star)$ равносильно уравнению $\dfrac{3-36x+4x^2}{x^2}=0$ и системе $(\star\star)$ $\begin{cases} t=\dfrac{1}{x},\\ 3t^2-36t+4=0.\end{cases}$ Так как дискриминант уравнения $(\star\star)$ положителен, то оно имеет ровно два различных корня, ни один из которых к тому же не равен нулю. Найдем сумму $x_1+x_2=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{36/3}{4/3}=\dfrac{36}{4}=9.$ ■

2.3.2. Замена $t=ax^2+bx+c$

213. Найдите произведение всех различных корней уравнения
$(x^2-7x+5)^2=x^2-7x+115.$

⧫ -6.

Решение. Выполним замену $t=x^2-7x+5$ и получим уравнение $t^2-t-110=0$, корни которого $t\in\{-10;\ 11\}$. Выполним обратную замену, рассмотрим два случая. **(1)** $x^2-7x+5=-10$, корней нет. **(2)** $x^2-7x+5=11$, два корня разных знаков. ■

214. Найдите произведение всех различных корней уравнения
$(x^2-7x+5)^2=x^2-7x+11.$

⧫ 14.

Решение. Выполним замену $t=x^2-7x+5$, $t^2-t-6=0$,
$t\in\{-2;\ 3\}$. Сделаем обратную замену, рассмотрим два случая.
(1) $x^2-7x+5=-2$, два различных положительных корня.
(2) $x^2-7x+5=3$, два различных положительных корня, которые не совпадают с первой парой. ■

215. Найдите произведение всех различных корней уравнения $(x^2-7x+5)^2 = 2x^2-14x+9$.
♦ 4.

Решение. Выполним замену $t = x^2-7x+5$, получим $t^2-2t+1=0$, единственный корень $t=1$. Сделаем обратную замену, $x^2-7x+5=1$, имеется два различных положительных корня, сумму которых можно найти по теореме Виета. ■

216. Решите уравнение $(x-2)^2(x^2-4x+3)=12$.
♦ $\{0;\ 4\}$

Решение. Замена $t=x^2-4x+3$ приводит к квадратному уравнению $t(t+1)=12$, имеющему два различных корня, **(1)** $t_1=-4$, $x^2-4x+3=-4$, корней нет, **(2)** $t_2=3$, $x^2-4x+3=3$, $x_1=0$, $x_2=4$. ■

217. Найдите произведение всех различных корней уравнения $x^2+x+3-\frac{7}{x^2+x+4}=5$.
♦ -3

Решение. Выполним замену $t=x^2+x+4$, получим уравнение $t-1-\dfrac{7}{t}=5$, корни которого равны -1 и 7. Сделаем обратную замену, рассмотрим два случая, **(1)** $x^2+x+4=-1$, корней нет, **(2)** $x^2+x+4=7$, два различных корня, сумму которых найдем по теореме Виета. ■

218. Найдите сумму квадратов всех различных корней уравнения $(x-1)(x-2)(x-6)(x-7)=150$.
♦ 70

Решение. Сгруппируем сомножители следующим образом: $[(x-1)(x-7)][(x-2)(x-6)]=150$ и раскроем скобки внутри групп, $(x^2-8x+7)(x^2-8x+12)=150$. Выполним замену $t=x^2-8x+7$, получим уравнение $t^2+5t-150=0$, корни которого равны -15 и 10. Сделаем обратную замену, рассмотрим два случая.
(1) $x^2-8x+7=-15$, корней нет.
(2) $x^2-8x+7=10$, два различных положительных корня. Сумму квадратов выразим через коэффициенты,
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8^2-2(-3)=64+6=70$. ■

219. Решите уравнение $(x^2-5x+4)(x^2-13x+40)+36=0$.
♦ $x\in\{2;\ 7\}$.

Решение. Разложим каждый из квадратных трехчленов на множители, $(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)+36=0$. Сгруппируем сомножители, $[(x-1)(x-8)][(x-4)(x-5)]+36=0$, и раскроем скобки внутри групп, $(x^2-9x+8)(x^2-9x+20)+36$. Выполним замену $t=x^2-9x+8$, получим уравнение $t^2+12t+36=0$, имеющее единственный корень $t=-6$. Сделаем обратную замену $x^2-9x+8=-6$, имеется два различных корня. ■

2.3.3. Иррациональная замена

220. Решите уравнение $x-5=\sqrt{x+7}$.

♦ $x=9$

Решение. Выполним замену $\sqrt{x+7}=t$, $t^2-7-5=t \Leftrightarrow t^2-t-12=0$, $\begin{cases} t\in\{4;\ -3\}, \\ t\geqslant 0, \end{cases}$ $t=4$, $\sqrt{x+7}=4$, $x+7=16$, $x=9$. ■

221. Найдите произведение всех различных корней уравнения $x^2-7x+5=\sqrt{x^2-7x+11}$.

♦ 2

Решение. Выполним замену $t=\sqrt{x^2-7x+11}$, получим $t^2-6=t$, имеется два корня, $t\in\{-2;\ 3\}$. Сделаем обратную замену, рассмотрим два случая.

(1) $\sqrt{x^2-7x+11}=-2$, корней нет.

(2) $\sqrt{x^2-7x+11}=3$, имеется два различных корня, которые совпадают с корнями уравнения $x^2-7x+2=0$. ■

222. Решите уравнение $x^2-3x+14=6\sqrt{x^2-3x+6}$.

♦ 6 ♦ $x\in\{-2;\ 1;\ 2;\ 5\}$.

Решение. Выполним замену $t=\sqrt{x^2-3x+6}$, получим уравнение $t^2+8=6t$, имеющее два корня, $t\in\{2;\ 4\}$. Сделаем обратную замену, рассмотрим два случая.

(1) $\sqrt{x^2-3x+6}=2 \quad\Leftrightarrow x^2-3x+6=4 \quad\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, $x\in\{1;\ 2\}$,

(2) $\sqrt{x^2-3x+6}=4 \quad\Leftrightarrow x^2-3x+6=16, \quad\Leftrightarrow x^2-3x-10=0$, $x\in\{5;\ -2\}$. ■

223. Найдите произведение всех различных корней уравнения $(\star)$ $x^2-8x+11=6\sqrt{x^2-8x+3}$.

♦ 13.

Решение. Пусть $t = \sqrt{x^2 - 8x + 3}$. Тогда $(\star) \Leftrightarrow t^2 + 8 = 6t \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow t \in \{2; 4\} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 8x + 3} = 2, \\ \sqrt{x^2 - 8x + 3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - 8x + 3 = 4, \\ x^2 - 8x + 3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x^2 - 8x - 13 = 0. \end{array}\right.$ Оба квадратных уравнения имеют положительный дискриминант и имеют поэтому по два различных корня, произведение всех четырех корней равно $(-1) \cdot (-13) = 13$. Отличие этой задачи от предыдущей в том, что для вычисления произведения корней мы использовали теорему Виета, убедившись предварительно, что каждое квадратное уранвение имеет по два различных корня. ■

2.3.4. Биквадратные уравнения

224. Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

♦ $x \in \{-3; -2; 2; 3\}$.

Решение. Замена переменной $t = x^2$ приводит к уравнению $t^2 - 13t + 36 = 0$, имеющему два положительных корня $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Нередко можно увидеть ссылку на теорему Виета для алгебраического уравнения, в соответствии с которой произведение всех (включая комплексные) корней уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, с учетом кратности корней равно $(-1)^n a_0/a_n$. Используя эту теорему для решения задач в рамках школьной программы следует обратить особое внимание на учет комплексных корней и на учет кратных корней. ■

225. Решите уравнение $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$.

♦ $x \in \{-3; 3\}$.

Решение. Замена переменной $t = x^2$ приводит к уравнению $t^2 - 18t + 81 = 0$, которое имеет единственный корень $t = 9$. Обратная замена дает одно квадратное уравнение, $x^2 = 9$. Произведение его корней можно найти непосредственно (решив его) или можно использовать теорему Виета. ■

226. Решите уравнение $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

♦ $x \in \{-3; 3\}$.

Решение. Замена переменной $t = x^2$ приводит к уравнению $t^2 - 5t - 36 = 0$, имеющее два корня $t_1 = -4$, $t_2 = 9$. При выполнении обратной замены корень $t_1 = -4$ приводит к уравнению $x^2 = -4$, которое корней не имеет. ■

227. Найдите сумму всех различных корней уравнения
$(\star)$ $x^4 - 2006x^2 + 1643 = 0$.

♦ 0

Решение. Если уравнение $(\star)$ имеет корень $x \neq 0$, то число $-x$ также является корнем. Поэтому достаточно обратить внимание на то, что уравнение $(\star)$ имеет по крайней мере один корень. Это можно сделать стандартным способом, с помощью замены переменной, вычисления дискриминанта и анализа знаков корней уравнения $t^2 - 2006t + 1643 = 0$, а можно заметить, что $f(0) > 0$, а $f(1) < 0$, где $f(t) = t^2 - 2006t + 1643$. ■

228. Найдите все значения параметра p, при которых четыре различных корня уравнения $(\star)$ $x^4 - px^2 + (p-7)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

♦ $p \in \{10;\ \dfrac{70}{13}\}$.

Решение. Очевидно, что найдется такое число $b > 0$, что четыре корня искомого биквадратного уравнения, расположенные в порядке возрастания, равны $\{-3b;\ -b;\ b;\ 3b\}$, поэтому само уравнение должно иметь вид $(x^2 - b^2)(x^2 - 9b^2) = 0$, после упрощения $(\star\star)$ $x^4 - 10b^2x^2 + 9b^4 = 0$.

Сравнивая $(\star)$ и $(\star\star)$, получим $\begin{cases} p = 10b^2, \\ (p-7)^2 = 9b^4. \end{cases}$ Второе уравнение системы содержит полные квадраты в левой и правой частях, поэтому оно равносильно совокупности $p - 7 = \pm 3b^2$.

Система $\begin{cases} p = 10b^2, \\ p - 7 = 3b^2 \end{cases}$ имеет два решения, $b = \pm 1$, $p = 10$.

Система $\begin{cases} p = 10b^2, \\ p - 7 = -3b^2 \end{cases}$ также имеет два решения, $b = \pm\sqrt{\frac{7}{13}}$, $p = \frac{70}{13}$. ■

2.3.5. Тригонометрическая замена

229. Наибольший из всех корней уравнения
$2\cos^2 x + 9\sin x - 6 = 0$, принадлежащих промежутку $x \in [0;\, 2\pi]$, принадлежит также промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[0;\, \frac{\pi}{2})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[\frac{\pi}{2};\, \pi)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[\pi;\, \frac{3\pi}{2})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[\frac{3\pi}{2};\, \frac{7\pi}{4})$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[\frac{7\pi}{4};\, 2\pi]$
Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ $x = \frac{5\pi}{6}$.

Решение. Замена $t = \sin x$ приводит к уравнению $2t^2 - 9t + 4 = 0$, корни которого $t \in \{0{,}5;\, 4\}$. На промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$ расположены два корня уравнения $\sin x = 0{,}5$, $x \in \{\frac{\pi}{6};\, \frac{5\pi}{6}\}$. ■

2.4. Уравнения с параметром

2.4.1. Условие на расположение корней

230. Найдите множество всех значений параметра p, для которых расстояние между корнями уравнения
$(\star)$ $x^2 - (3p+7)x + (2p+1)(p+6) = 0$
равно 7.
♦ $p \in \{-2;\, 12\}$.
Решение. Решим уравнение $(\star)$. Найдем дискриминант,
$D = (3p+7)^2 - 4(2p+1)(p+6)$
$= 9p^2 + 42p + 49 - 8p^2 - 52p - 24 = p^2 - 10p + 25 = (p+5)^2$,
$$x = \frac{-3p-7 \pm \sqrt{(p+5)^2}}{2} = \frac{-3p-7 \pm |p+5|}{2}.$$
Заметим, что при любых p множество из двух (или одного при $p = -5$) чисел $\dfrac{-3p-7 \pm |p+5|}{2}$ совпадает с множеством двух чисел $\dfrac{-3p-7 \pm (p+5)}{2}$, иначе говоря, при наличии символа $\pm$ перед модулем можно модуль снять, не изменив при этом множество корней. Корни уравнения $(\star)$ можно найти по формуле $x = \dfrac{-3p-7 \pm (p+5)}{2}$. Поэтому уравнение $(\star)$ при $p \neq 5$ имеет два корня, $x \in \{2p+1;\, p+6\}$, а при $p = 5$ — единственный корень $x = 11$. Условия задачи позволяют получить для определения параметра уравнение $|(2p+1) - (p+6)| = 7$, $|p-5| = 7$, $p - 5 = \pm 7$. ■

231. Найдите множество всех значений параметра p, для которых все корни уравнения $x^2-(3p+7)x+(2p+1)(p+6)=0$ по модулю не больше 7.

♦ $p \in [-4;\, 1]$.

Решение. Используем результаты предыдущей задачи,
$x_1=2p+1$, $x_2=p+6$, $\begin{cases} |x_1| \leqslant 7, \\ |x_2| \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2p+1| \leqslant 7, \\ |p+6| \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} -7 \leqslant 2p+1 \leqslant 7, \\ -7 \leqslant p+6 \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant p \leqslant 3, \\ -13 \leqslant p \leqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leqslant p \leqslant 1.$ ■

2.4.2. Условие на число корней

232. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^2-2px+4=0$ имеет ровно два различных корня.

♦ $(-\infty;\, -2) \bigcup (2;\, +\infty)$.

Решение. Квадратное уравнение имеет два различных корня при условии положительного дискриминанта, $4p^2-16>0$. ■

233. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$(\star)\ \ px^2-4x+4=0$
имеет ровно два различных корня.

♦ $(-\infty;\, 0) \bigcup (0;\, 1)$.

Решение. (1) При $p=0$ уравнение $(\star)$ является линейным и имеет единственный корень $x=1$. Это значение заведомо в ответ не входит.

(2) При $p \neq 0$ квадратное уравнение $(\star)$ имеет два различных корня при условии положительного дискриминанта, $16-16p>0$ $\Leftrightarrow p<1$. ■

234. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$(\star)\ \ (p-3)x^2+(p+12)x+p+21=0$
имеет единственный корень.

♦ $\{-22;\, 3;\, 6\}$.

Решение. При $p=3$ уравнение $(\star)$ является линейным и имеет единственный корень, поэтому это значение следует внести в ответ. При $p \neq 3$ уравнение $(\star)$ является квадратным и имеет единственый корень при условии $D=0$, $(p+12)^2-4(p-3)(p+21)=0$,
$3p^2+48p-396=0$,
$(\star\star)\ \ p^2+16p-132=0$,
$p \in \{-22;\, 6\}$. ■

235. Найдите произведенрие всех различных значений параметра p, при которых уравнение $(p^2 - 7p - 91)x^2 + 2px + 1 = 0$ имеет единственный корень.

♦ $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 7 \cdot 13 \cdot 13$.

Решение. Единственный корень будет при условии
$(\star)$ $p^2 - 7p - 91 = 0$, когда уравнение является линейным, или при условии нулевого дискриминанта, $7p + 91 = 0$, поэтому всего имеется три различных значения параметра, одно из которых равно -13, а произведение двух других равно -91 по теореме Виета. Следует проверить, что $p = -13$ не является корнем уравнения $(\star)$. ■

2.4.3. Иррациональная замена

236. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(\star)$ $x + p = 16\sqrt{x}$ имеет единственный корень.

♦ $p \in (-\infty; 0) \bigcup \{64\}$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x} \in [0; +\infty)$ и рассмотрим квадратное уравнение $(\star\star)$ $t^2 - 16t + p = 0$.

(1) Если дискриминант уравнения $(\star\star)$ равен нулю, $256 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 64$, то уравнение $(\star)$ равносильно $x - 16\sqrt{x} + 64 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 8\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$. Это значение p включаем в ответ.

(2) Пусть $p \neq 64$ и дискриминант уравнения $(\star\star)$ положителен, $256 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < 64$. Тогда уравнение $(\star\star)$ имеет ровно два различных корня, отличных от нуля. Рассмотрим все различные сочетания знаков корней. Если $p < 0$, то $t_1 t_2 = p < 0$, два корня $(\star\star)$ разных знаков, $(\star)$ имеет ровно один корень, все эти значения p включаем в ответ. Если $p \geqslant 0$, то $t_1 t_2 = p \geqslant 0$, $(\star\star)$ имеет два различных корня одного знака. Так как к тому же $t_1 + t_2 = 16 > 0$, то оба корня неотрицательны, $(\star)$ имеет два различных корня, это условиям задачи не осответствует. Все значения p, соответствующие условиям задачи, образуют множество $p \in (-\infty; 0) \bigcup \{64\}$.
■

2.4.4. Логарифмическая и показательная замена[1]

237. Укажите все значения параметра p, при которых уравнение $(\star)$ $\log_2 x + \log_x 2^{p^2+3p+2} = 2(2-p)$ имеет единственный корень.

♦ $p \in \{-2;\ -1;\ \frac{2}{7}\}$.

Решение. Пусть $t = \log_2 x \Subset (-\infty;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$. Запишем уравнение $(\star)$ в виде $(\star\star)$ $\frac{t^2-2(p-2)t+p^2+3p+2}{t} = 0$ и рассмотрим одновременно уравнение $(\star\star\star)$ $t^2-2(p-2)t+p^2+3p+2 = 0$. Единственный корень $(\star)$ будет в двух случаях, **(1)** если $(\star\star\star)$ имеет два различных корня, один из которых равен нулю, $p^2+3p+2=0$, $p \in \{-1;\ -2\}$, **(2)** при условии нулевого дискриминанта $(\star\star\star)$, $(p-2)^2-(p^2+3p+2)=0$, откуда $p=\frac{2}{7}$. ■

238. Найдите сумму всех различных значений параметра r, при которых уравнение $\left(r+\frac{2}{r}-4\right)\log_3 x + \frac{\log_x(3^{50})}{r} + 14 + \frac{6}{r} = 0$ имеет единственный корень.

♦ 246 ♦ Четыре различных значения параметра, являющихся корнями уравнений $r^2-4r+2=0$, $r^2-242r+91=0$.

Решение. Найдем ОДЗ, $x > 0 \bigcap x \neq 1$. Выполним замену $t=\log_3 x$ и рассмотрим уравнение

$(\star)$ $(r^2-4r+2)t^2+2(7r+3)t+50=0$

при условии $x > 0 \bigcap x \neq 1$. Заметим сразу, что значение $t=0$ не является корнем ни при каких значениях параметра r. Единственный корень будет при условии $(\ddagger)$ $r^2-4r+2=0$, когда уравнение $(\star)$не является квадратным, или при условии нулевого дискриминанта, $\begin{cases} 49r^2+42r+9-50, \\ r^2-4r+2\neq 0, \end{cases}$ откуда $r^2-242r+91=0$.

■

239. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(\star)$ $4^x-2^{x+4}+p=0$

имеет единственный корень.

♦ $p \in (-\infty;\ 0] \bigcup \{64\}$.

Решение. Выполним замену $t=2^x \Subset (0;\ +\infty)$ и рассмотрим квадратное уравнение

$(\star\star)$ $t^2-16t+p=0$.

[1]только для 11 класса

(1) Если дискриминант уравнения $(\star\star)$ равен нулю, $256 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 64$, то уравнение $(\star)$ равносильно $4^x - 16 \cdot 2^x + 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \left(2^x - 8\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2^x = 8 \quad \Leftrightarrow x = 3$. Это значение p включаем в ответ.
(2) Найдем значения p, при которых $(\star\star)$ имеет корень $t = 0$, это $p = 0$. При этом $t \in \{0;\ 16\} \Leftrightarrow 2^x \in \{0;\ 16\} \Leftrightarrow x = 4$. Значение $p = 0$ включаем в ответ.
(3) Пусть $p \neq 64$, дискриминант уравнения $(\star\star)$ положителен, $256 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < 64$, и число $t = 0$ не является корнем, $p \neq 0$. Тогда уравнение $(\star\star)$ имеет ровно два различных корня, отличных от нуля. Рассмотрим все различные сочетания знаков корней. Если $p < 0$, то $t_1 t_2 = p < 0$, два корня $(\star\star)$ разных знаков, $(\star)$ имеет ровно один корень, все эти значения p включаем в ответ. Если $p > 0$, то $t_1 t_2 = p > 0$, $(\star\star)$ имеет два различных корня одного знака. Так как к тому же $t_1 + t_2 = 16 > 0$, то оба корня положительны, $(\star)$ имеет два различных корня, это условиям задачи не осответствует. Все значения p, соответствующие условиям задачи, образуют множество $p \in (-\infty;\ 0] \bigcup \{64\}$. ■

240. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$(\star)\ \ (p-3) \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x + 1 = 0$
имеет единственный корень.

♦ $p \in (-\infty;\ 3] \bigcup \{19\}$.

Решение. Выполним замену $t = 3^x \in (0; +\infty)$. Запишем уравнение $(\star)$ в виде равносильной системы,
$$(\star\star)\quad \begin{cases} (p-3)t^2 - 8t + 1 = 0, \\ t = 3^x. \end{cases}$$
(1) При $p = 3$ уравнение $(\star\star)$ является линейным и имеет единственный корень $t = \dfrac{1}{8}$. При этом значении p уравнение $(\star)$ имеет также единственный корень, $3^x = \dfrac{1}{8}$, $x = \log_3 \dfrac{1}{8} = -\log_3 8$.
(2) Пусть теперь $p \neq 3$. При условии нулевого дискриминанта уравнения $(\star\star)$, $16 - p + 3 = 0 \Leftrightarrow p = 19$, уравнение $(\star)$ равносильно $16 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow (4 \cdot 3^x - 1)^2 = 0 \ \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow x = \log_3 \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\log_3 4$.

(3) Пусть $p \neq 3$ и дискриминант уравнения $(\star\star)$ положителен, $19 - p > 0 \Leftrightarrow p < 19$. Уравнение $(\star)$ будет иметь также единственный корень, если $(\star)$ имеет два корня различных знаков, так как тогда только одно из уравнений $3^{x_1} = t_1 > 0$, $3^{x_2} = t_2 < 0$, будет иметь корень. Для этого дискриминант должен быть положительным, а произведение корней — отрицательным, т.е. $p < 3$. поэтому все значения p, соответствующие условиям задачи, образуют множество $p \in (-\infty; 3] \bigcup \{19\}$. ■

2.4.5. Взаимное расположение окружности, параболы, гиперболы с параметром и прямой

241. Найдите все значения параметра p, при которых парабола $y = 3x^2 + 13x + p$ на всей числовой оси расположена выше прямой $y = x + 6$.

⧫ $p \in (18; +\infty)$.

Решение. Иными словами, требуется найти все значения параметра, при которых неравенство $3x^2 + 13x + p > x + 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + p - 6 > 0$ является тождеством, Так как ветви параболы $y = 3x^2 + 12x + p - 6$ направлены вверх, то эта парабола расположены выше горизонтальной оси при условии отрицательного дискриминанта, $12^2 - 12(p-6) < 0 \Leftrightarrow 12 - p + 6 < 0 \Leftrightarrow p > 18$. ■

242. При каких значениях параметра a парабола $y = x^2$ касается прямой $y = 4x + a$?

⧫ -4

Решение 1. Парабола касается *невертикальной* прямой в тех и только тех случаях, когда эти две линии имеют единственную точку. Заметим также, что любая парабола имеет ровно одну общую точку с вертикальной прямой, но в этом случае касание не имеет места. Так как прямая $y = 4x + a$ не является вертикальной, то касание имеет место в тех и тлько тех случаях, когда уравнение $x^2 = 4x + a$ имеет единственный корень, $16 + 4a = 0 \Leftrightarrow a = -4$. ■

Решение 2. Парабола касается прямой в тех и только тех случаях, когда найдется общая точка этих двух линий, в которых обе функции имеют равные производные, $x^2 = 4x + a \bigcap 2x = 4$,

$x = 2$, $4 = 8 + a$. Этот способ эффективен не только для квадратного трехчлена и линейной функции, но также и для квадратного трехчлена и дробно-линейной функции, для дробно-линейной функции и линейной функции. ■

243. При каком значении параметра p прямая $y = 2x + 1$ касается окружности $x^2 + y^2 = 6x + p$?

⧫ 0,8

Решение. Касание прямой и окружности имеет место в тех и только тех случаях, когда две указанные линии имеют единственную общую точку, т.е. квадратное уравнение с параметром $x^2 + (2x + 1)^2 = 6x + p$ имеет единственный корень. ■

244. Найдите все значения параметра a, при которых гипербола $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ имеет единственную общую точку с прямой $y = a - 2x$.

⧫ $\{5 \pm \sqrt{8}\}$

Решение. Иными словами, уравнение $\dfrac{x-1}{x-2} = a - 2x$ должно иметь единственный корень. Приведем к общему знаменателю, $\dfrac{x - 1 - (x-2)(a-2x)}{x-2} = 0$, $\dfrac{x - 1 + 2x^2 - ax - 4x + 2a}{x-2} = 0$, $(\star)$ $\dfrac{2x^2 - (a+3)x + 2a - 1}{x-2} = 0$. Число $x = 2$ ни при каком значении a не является корнем уравнения
$(\star\star)$ $2x^2 - (a+3)x + 2a - 1 = 0$. Поэтому выясним, при каких a уравнение $(\star\star)$ имеет единственный корень. Для этого приравняем нулю его дискриминант, $a^2 - 10a + 17 = 0$. ■

2.4.6. Расположение корней квадратного уравнения с параметром

245. Укажите множество всех тех значений параметра p, для которых число $x = 2$ расположено строго между корнями уравнения
$(\star)$ $x^2 - (2p - 4)x + (p - 5)(p + 1) = 0$.

⧫ $p \in (1; 7)$.

Решение 1. Так как ветви параболы направлены вверх, то число $x_0 = 2$ расположено строго между корнями в тех и только тех случаях, когда $f(x_0) < 0$, где $f(x)$ — левая часть $(\star)$. Следует решить неравенство ($\star$) $4-2(2p-4)+(p-5)(p+1) < 0, p^2-8p+7 < 0$. ■

Решение 2. Уравнение ($\star$) имеет корни $x \in \{p-5;\ p+1\}$, поэтому условие задачи равносильно неравенству $p-5 < 2 < p+1$. ■

246. Укажите все значения параметра p, для которых все числа $x \in (7;\ 13)$ являются решениями неравенства
($\star$) $x^2-(3p+12)x+(p+3)(2p+9) \leqslant 0$.
♦ $p \in [2;\ 4]$.

Решение 1. Корни уравнения $x^2-(3p+4)x+(p+3)(2p+1)=0$ равны $x_1 = p+3$ и $x_2 = 2p+9$. Графики этих двух функций показаны на рис. 29a в системе коррдинат, в которой по горизонтали направлена ось p, а по вертикали — ось x. Эти две прямые разбивают плоскость на четыре части, в каждой из которых левая часть ($\star$) сохраняет постоянный знак. Для того, чтобы определить жтот знак, удобно использовать метод пробной точки. Возьмем, например, точку $p=0,\ x=0$ и вычислим значение левой части ($\star$), получится 3. Это число положительно, поэтому во всей той части плоскости, где расположена эта пробная точка, левая часть ($\star$) положительна. При переходе через каждую из линий $x=p+3$ и $x=2p+9$ левая часть меняет свой знак. Следовательно, точки, являющиеся решениями этого неравенства, расположены между указанными прямыми. Теперь заметим, что все значения $x \in (7;\ 13)$ на той же плоскости образуют полосу, ограниченную двумя горизонтальными прямыми. Следовательно, мы должны найти все значения параметра p, при которых все точки указанной полосы расположены внутри угла, образованного указанными прямыми. Это все значения, расположенные между вертикальными прямыми, обозначенными буквами B и D. Осталось определить соответствующие значения параметра p. Для этого достаточно решить уравнения $p+3=7$ и $2p+9=13$, так что в ответ следует внести $p \in [2;\ 4]$. Особое внимание следует уделить граничным точкам. Например, при $p=2$ неравенство ($\star$) равносильно $x \in [5;\ 13]$, и все $x \in (7;\ 13)$ являются решениями ($\star$). Поэтому это значение p следует внести в ответ. ■

Решение 2. Условия задачи эквивалентны системе неравенств
$\begin{cases} f(7) \leqslant 0, \\ f(13) \leqslant 0, \end{cases}$ где $f(x) = x^2-(3p+12)x+(p+3)(2p+9)$. ■

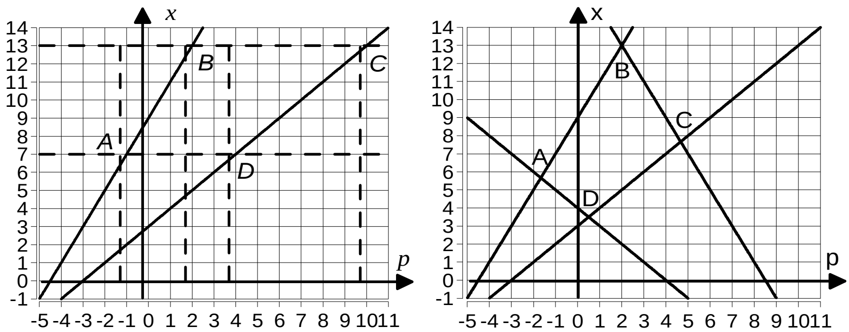


Рис. 29. Графики корней квадратных уравнений с параметром

247. Укажите все значения параметра p, для которых хотя бы одно число $x \in [7;\ 13]$ является решениеми неравенства
$(\star)\ \ x^2 - (3p + 12)x + (p + 3)(2p + 9) \leqslant 0.$
⧫ $p \in [-1;\ 10]$.
Решение. Используем тот же рис. 29а. Теперь следует найти все значения параметра p, при которых хотя бы одно число из полосы $x \in [7;\ 13]$ расположено внутри угла, образованного прямыми $p + 3 = 7$ и $2p + 9 = 13$. Эти значения параметра расположены между вертикальными прямыми, отмеченными буквами A и C. ■

Замечание. Следует заметить, что условия этой задачи, вообще говоря, не эквивалентны какой-либо совокупности или системе типа
$f(7) \leqslant 0 \bigcup f(13) \leqslant 0$, где $f(x) = x^2 - (3p+12)x + (p+3)(2p+9)$. Второй способ решения, который годился для предыдущей задачи, имеет весьма ограниченную область применимости, связанную со структурой логического условия задачи.

248. Укажите все значения параметра p, для которых все решения неравенства
$(\star)\ \ x^2 - (3p + 12)x + (p + 3)(2p + 9) \leqslant 0$
являются также решениями нравенства
$(\star\star)\ \ x^2 - (21 - 3p)x + (4 - p)(17 - 2p) \leqslant 0.$
⧫ $p \in [0{,}5;\ 2]$.

Решение. Корни уравнения
$x^2-(3p+4)x+(p+3)(2p+1)=0$
равны $x_1=p+3$ и $x_2=2p+9$, корни уравнения
$(\star)$ $x^2-(21-3p)x+(4-p)(17-2p)=0$
равны $x_3=4-p$ и $x_4=17-2p$. Графики всех четырех функций показаны на рис. 29b в системе координат, в которой по горизонтали направлена ось p, а по вертикали — ось x. Все решения $(\star)$ расположены между прямыми, обозначенными m и n, все решения $(\star\star)$ расположены между прямыми, обозначенными k и l. Условиям задачи удовлетворяют все значения параметра p, для которых все точки угла между прямыми m и n находятся также между прямыми k и l. Эти значения параметра расположены между вертикальными прямыми, проходящими через точки B и D. Для определения значений параметра p достаточно решить уравнения $p+3=4-p$ и $2p+9=17-2p$, так что в ответ следует внести $p\in[0{,}5;\ 2]$. ■

249. Укажите все значения параметра p, для которых хотя бы одно решение неравенства
$(\star)$ $x^2-(3p+12)x+(p+3)(2p+9)\leqslant 0$
являются также решением неравенства
$(\star\star)$ $x^2-(21-3p)x+(4-p)(17-2p)\leqslant 0$.
♦ $p\in[-1{,}(6);\ 4{,}(6)]$.

Решение. На рис. 29b искомые значения параметра расположены между вертикальными прямыми, проходящими через точки A и C. Для определения значений параметра p достаточно решить уравнения $p+3=17-2p$ и $2p+9=4-p$, так что в ответ следует внести $p\in[-\frac{5}{3};\ \frac{14}{3}]$. ■

2.4.7. Однородные уравнения второй степени

250. Известно, что величины x и y связаны соотношением
$(\star)$ $x^2-xy-12y^2=0$.
Найдите все возможные значения величины $\dfrac{x}{y}$.

♦ $\{-3;\ 4\}$.

Решение. Если к тому же $y=0$, то $x=0$. Если $y\neq 0$, то
$(\star)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-12=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}\in\{4;\ -3\}$. ■

2.4.8. Квадратные уравнения с искусственной ОДЗ

251. Решите уравнение $(x^2 - 8x + 15) \cdot \sqrt{x-4} = 0$.
⧫ $\{4;\ 5\}$.
Решение. Для решения уравнений вида
$(\star)\ \ f(x) \cdot g(x) = 0$
следует применять простое правило. Число x является корнем $(\star)$ в тех и только тех случаях, когда $\{f(x) = 0 \bigcap g(x)$ существует$\} \bigcup \{g(x) = 0 \bigcap f(x)$ существует$\}$.
В даном случае получим $\{x \in \{3;\ 5\} \bigcap x \in [4;\ +\infty)\} \bigcup x = 4$. ■

2.4.9. Квадратные уравнения с модулем

252. Найдите сумму всех различных корней уравнения $x^2 - 8|x| + 15 = 0$.
⧫ 0 ⧫ $x \in \{\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{5}\}$.
Решение 1. Замена $t = |x|$ приводит к уравнению $t^2 - 8t + 15 = 0$, $t \in \{3;\ 5\}$, $x^2 \in \{3;\ 5\}$, $x \in \{\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{5}\}$. ■
Решение 2. Сумма всех различных корней любого уравнения вида $f(|x|) = 0$ равна нулю (если только у этого уравнения есть по крайней мере один корень). ■

253. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение $\left|x^2 - 7|x| + 10\right| = kx$ имеет ровно три различных корня.
⧫ $k = \pm(7 - \sqrt{40})$.
Решение 1. Нарисуем график функции $f(x) = \left|x^2 - 7|x| + 10\right|$, рис. 30а. Ровно три корня будет при условии касания параболы $y = -x^2 + 7x - 10$ и прямой $y = kx$, причем точка касания должна быть расположена в правой полуплоскости, $x \geqslant 0$. Ровно три корня будет также при условии касания параболы $y = -x^2 - 7x - 10$ и прямой $y = kx$, причем точка касания должна быть расположена в левой полуплоскости, $x \leqslant 0$. В первом случае уравнение $-x^2 + 7x - 10 = kx$ должно иметь единственный корень, так что его дискриминант должен быть равен нулю, $(k-7)^2 - 40 = 0$, $k - 7 = \pm\sqrt{40}$, $k = 7 \pm \sqrt{40}$. По графику определяем, что в ответ нужно внести меньшее значение k, т.е. $k = 7 - \sqrt{40}$. ■
Решение 2. Разберем только первый из двух упомянутых случаев. Если парабола $y = -x^2 + 7x - 10$ касается прямой $y = kx$,

то в точке касания их производные должны быть равны,
$\begin{cases} -x^2+7x-10=kx, \\ -2x+7=k. \end{cases}$ Подставим k из второго уравнения в первое, $-x^2+7x-10=-2x^2+7x$, $x^2=10$, $x=\pm 10$, в правой полуплоскости $x=\sqrt{10}$, так что $k=7-2\sqrt{10}$. Преимущество этого способа в том, что для выбора одного из двух значений k не приходится обращаться к графической интерпретации. ■

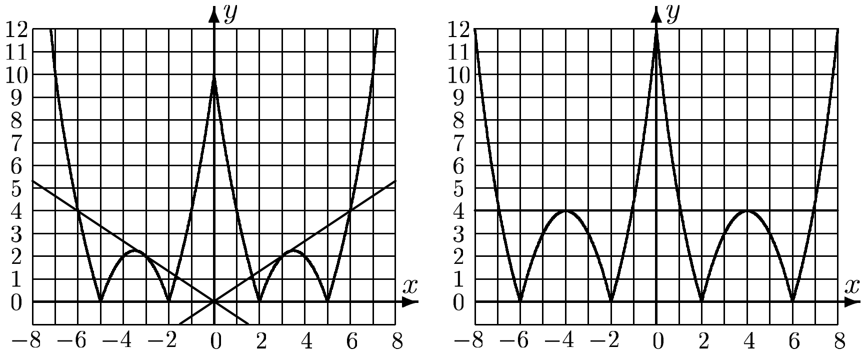
254. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$(\star)$ $\left|x^2-8|x|+12\right|=a$
имеет ровно шесть различных корней.
♦ $a=4$.
Решение 1. Нарисуем график функции $f(x)=\left|x^2-8|x|+12\right|$, рис. 30b. Ровно шесть корней будет при условии, что прямая $y=a$ проходит через точку (0; 4). ■
Решение 2. Решим эту задачу чисто аналитическим способом. Уравнение $(\star\star)$ равносильно $x^2-8|x|+12=\pm a$ при $a\geqslant 0$, так что $x^2-8|x|+12-a=0 \bigcup x^2-8|x|+12+a=0$, причем дискриминант второго уравнения меньше, чем первого. Поэтому уравнение
$(\star\star)$ $x^2-8|x|+12-a=0$
должно иметь четыре корня, а уравнение
$(\star\star\star)$ $x^2-8|x|+12+a=0$
— два различных корня. Это будет при условии нулевого дискриминанта, $4(16-12-a)=0$, $a=4$. Проверка показывает, что $(\star\star)$ в этом случае действительно имеет четыре различных корня. ■

2.5. Уравнения старших степеней

Замечание. Типичной ситуацией в сложных задачах секции С является получение на некотором этапе алгебраического уравнения третьей или четвертой степени. Как правило, это уравнение имеет очевидный корень. Прежде всего следует проверить значения $x\in\{0;\,-1;\,1\}$. Реже корнями являются целые числа $x\in\{\pm 2;\,\pm 3\}$. Еще реже, но встречаются корни $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$.

2.5.1. Разложение на множители

255. Решите уравнение $(\star)$ $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.



(a) $f(x) = \big|x^2 - 7|x| + 10\big|$ (b) $f(x) = \big|x^2 - 8|x| + 12\big|$

Рис. 30.

♦ $x \in \{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3\}$.

Решение. Используем формулы приведения в левой и правой частях ($\star$),

$$(x-1+2x+3)\big((x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2\big) = \\ = (3x+2)(9x^2),$$

$$(3x+2)\big((x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2\big) = (3x+2)(9x^2),$$

$$(3x+2)\big[(x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2-(9x^2)\big] = 0,$$

Теперь ясно, что число $x = -\frac{2}{3}$ является корнем. Остальные корни совпадают с корнями квадратного уравнения, составить и решить которое Вы легко сможете сами. ■

256. Решите уравнение $x^3 - 20x^2 + 103x - 84 = 0$.

♦ $x \in \{1; 7; 12\}$.

Решение. Так как сумма коэффициентов равна нулю, $1 - 20 + 103 - 84 = 0$, то число $x = 1$ является корнем этого уравнения. Следовательно, многочлен $x^3 - 20x^2 + 103x - 84$ делится нацело на $x - 1$. Выполним деление,

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -20x^2 & +103x & -84 & x \;\; -1 \\
x^3 & -x^2 & & & x^2 -19x +84 \\
\hline
 & -19x^2 & +103x & -84 & \\
 & -19x^2 & +19x & & \\
\hline
 & & +84x & -84 &
\end{array}$$

Частное равно $x^2-19x+84$. Остальные два корня находятся из решения уравнения $x^2-19x+84=0$. ■

2.5.2. Разложение на множители уравнения с параметром

257. При всех значениях параметра $p\geqslant 0$ решите уравнение
$(\star)$ $p^3x^4+p^2x^2-x+\dfrac{p}{4}+\dfrac{1}{2}=0$.

♦ Если $p=0$, то $x=\frac{1}{2}$. Если $p\in(0;\,\frac{1}{2})$, то $x=\frac{1\pm\sqrt{1-2p}}{2p}$. Если $p=\frac{1}{2}$, то $x=1$. Если $p\in(\frac{1}{2};\,+\infty)$, корней нет.

Решение 1. Преобразуем $(\star)$ к виду

$$p\Big(p^2x^4+px^2+\frac{1}{4}\Big)-x+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow p\Big((px^2)^2+(px^2)+\frac{1}{4}\Big)-x+\frac{1}{2}=0$$

$$(\star\star)\quad \Leftrightarrow p\Big(px^2+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}=x.$$

Так как $p\geqslant 0$, то левая часть $(\star\star)$ при любом значении x не меньше числа $\dfrac{1}{2}$, поэтому рассматриваем только значения $x\geqslant\dfrac{1}{2}$. Заметим, что если $px^2+\dfrac{1}{2}=x$, то левая и правая части $(\star\star)$ совпадают. Поэтому разложение левой части $(\star\star)$ на множители имеет вид $\Big(px^2+\dfrac{1}{2}-x\Big)\Big(p^2x^2+px+\dfrac{p}{2}+1\Big)=0$ (можно получить делением многочлена в левой части $(\star)$ на многочлен $px^2-x+\dfrac{1}{2}$). Решим совокупность квадратных уравнений с параметром $\left[\begin{aligned}&px^2-x+\frac{1}{2},\\&p^2x^2+px+\frac{p}{2}+1=0.\end{aligned}\right.$

(1) $(\ddagger)$ $px^2+\dfrac{1}{2}=x$. Дискриминант D квадратного уравнения $px^2-x+\frac{1}{2}=0$ равен $1-2p$. Если $D>0$, то $(\ddagger)$ имеет два различных корня, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-2p}}{2p}$. Если $D=0$, то $(\ddagger)$ имеет единственный корень, $x=1$. Если $1-2p<0$, то $(\ddagger)$ не имеет корней.

(2) (‡‡) $p^2x^2 + px + \dfrac{p}{2} + 1 = 0$. Выделим полный квадрат в левой части, $\left(px + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{p}{2} + \dfrac{3}{4} = 0$. Следовательно, левая часть (‡‡) не меньше числа $\dfrac{3}{4}$. Это уравнение корней не имеет. ■

Решение 2. Снова начнем с того, что преобразуем ($\star$) к виду ($\star\star$). При $p = 0$ получим $x = \dfrac{1}{2}$. Рассмотрим только значения параметра $p > 0$. При этом условии любой корень ($\star\star$) удовлетворяет условию $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, поэтому любой корень положителен, $x > 0$. При этих условиях функция $f(x) = px^2 + \dfrac{1}{2}$ возрастает (строго) на промежутке $x \in (0; +\infty)$. Запишем уравнение ($\star\star$) в виде ($\star\star\star$) $f(f(x)) = x$. Заметим, что если $f(x) > x$, то $f(f(x)) > f(x) > x$, так что равенство ($\star\star\star$) невозможно. Поэтому любое решение ($\star\star\star$) удовлетворяет условию $f(x) \leqslant x$. Аналогично убедимся в том, что любое решение ($\star\star\star$) удовлетворяет условию $f(x) \geqslant x$. Следовательно, ($\star\star\star$) равносильно уравнению $f(x) = x$, т.е. $px^2 + \dfrac{1}{2} = x$. Дальше решение проводится по уже рассмотренной схеме. Прежде чем заносить корни в ответ, убедитесь в том, что оба корня положительны (этот метод требует монотонности функции $f(x)$, которая имеет место только при $x \geqslant 0$). ■

2.5.3. Симметрические, возвратные, однородные уравнения

258. Решите уравнение $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

⧫ $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}25}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Решение. Так как число $x = 0$ не является корнем, можно уравнение разделить на x^2 и выполнить замену $t = x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Новое уравнение примет вид $t^2 - 7t + 12 = 0$. Его корни $t \in \{3;\ 4\}$, Обратная замена дает два квадратных уравнения, $x^2 - 3x + 1 = 0 \bigcup x^2 - 4x + 1 = 0$ ■

259. Решите уравнение $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0$.

♦ $x \in \{\frac{1}{2}, 2\}$.

Решение. Та же замена приводит к уравнению $4t^2 - 20t + 25 = 0$, имеющему единственный корень $t = 2{,}5$. Обратная замена приводит к уравнению $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$. Нередко можно встретить рекомендацию вычислять сумму всех различных корней по теореме Виета, которая обобщается на случай алгебраических уравнений произвольной степени. В данной задаче эта теорема даст неверный (по школьным канго-нам) ответ, так как она дает сумму (и другие симметрические функции) всех корней с учетом их кратности. В данном случае уравнение имеет две пары совпадающих корней (т.е. корней кратности 2). По школьному канону, совпадающие корни во всех случаях рассматриваются как один корень. ■

260. Решите уравнение $x^4 - 13x^3 + 44x^2 - 13x + 1 = 0$.
♦ все корни уравнений $x^2 - 6x + 1 = 0$ и $x^2 - 7x + 1 = 0$.

Решение. Замена $t = x + \dfrac{1}{x}$ приводит к квадратному уравнению $t^2 - 13t + 42 = 0$, корни которого $t \in \{6;\ 7\}$. Обратная замена приводит к совокупности квадратных уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 1 = 0, \\ x^2 - 7x + 1 = 0. \end{array}\right.$ Каждое из них имеет по два различных корня. ■

261. Решите уравнение $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$.
♦ корни $\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$.

Решение. Замена $t = x + \dfrac{6}{x}$ приводит к квадратному уравнению $t^2 - 12t + 35 = 0$, корни которого $t \in \{5;\ 7\}$. Обратная замена приводит к совокупности квадратных уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 - 7x + 6 = 0. \end{array}\right.$ В данном случае корни — натуральные числа, $x \in \{2;\ 3;\ 1;\ 6\}$. ■

262. Решите уравнение $x^4 - 15x^3 + 66x^2 - 120x + 64 = 0$.

Решение. Замена $t = x + \dfrac{8}{x}$ приводит к уравнению $t^2 - 15t + 50 = 0$, $t \in \{5;\ 10\}$, **(1)** $x + \dfrac{8}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 = 0$,

корней не имеет. **(2)** $x+\dfrac{8}{x}=10 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0$, $x=5\pm\sqrt{17}$.
■

2.6. Для самостоятельного решения

2.6.1. Алгебраические уравнения, 1

263. Решите уравнение $x^2-7|x|+12=0$.

264. Решите уравнение $x^2-8|x-1|+7=0$.

265. Решите уравнение $x^2-13||x|-2|+10=0$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 13 $\boxed{\mathbf{2}}$ 10 $\boxed{\mathbf{3}}$ 23 $\boxed{\mathbf{4}}$ 26 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

266. Решите уравнение $x^2+|x|-2=0$.

267. Решите уравнение $x^2-3|x|+2=0$.

268. Решите уравнение $x^2-|3x-2|-12=0$.

269. Составьте приведенное квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а второй — произведению корней уравнения $x^2-3x-10=0$.

270. Укажите множество всех значений параметра p, при которых корни квадратного уравнения $\frac{1}{p}x^2-(p+1)x+p^2=0$ относятся как $1:2$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1; 2; 0,5. $\boxed{\mathbf{2}}$ -2; $-0{,}5$. $\boxed{\mathbf{3}}$ 2; 0,5. $\boxed{\mathbf{4}}$ 2; 0,5; -1.
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$; 2; 0,5.

271. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения
$\frac{x-5}{x+2}+\frac{x+2}{x-5}=\frac{5}{2}$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $S\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S\in[1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S\in[2{,}5;\ 3{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $S\in[3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $S\in[4{,}5;\ 999)$

272. Если S — сумма всех различных корней уравнения
$x^3+\frac{1}{x^3}=5x+\frac{5}{x}$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $S\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S\in[1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S\in[2{,}5;\ 3{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $S\in[3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $S\in[4{,}5;\ 999)$

273. Если M — больший корень уравнения $x^3+\frac{1}{x^3}=5x+\frac{5}{x}$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $M\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $M\in[1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $M\in[2{,}5;\ 3{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $M\in[3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $M\in[4{,}5;\ 999)$

274. Если число Z равно большему корню уравнения
$\frac{3x^2}{1-x}+\frac{1-x}{x^2}=\frac{19}{4}$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $Z\in(-999;\ 0{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $Z\in[0{,}5;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $Z\in[1;\ 1{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $Z\in[1{,}5;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $Z\in[2;\ 999)$

275. Если число Q равно большему корню уравнения
$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $Q\in(-999;\ 4)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $Q\in[4;\ 5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $Q\in[5;\ 6)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $Q\in[6;\ 7)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $Q\in[7;\ 999)$

276. Если число S равно сумме квадратов всех различных корней уравнения $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $Q\in(0;\ 10)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $Q\in[10;\ 12)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $Q\in[12;\ 14)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $Q\in[14;\ 16)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $Q\in[16;\ 999)$

277. Сумма квадратов всех различных корней уравнения
$x^4-9x^3+28x^2-36x+16=0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

278. Больший корень уравнения $|x|=8||x-2|-3|-5x$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

279. Разложите на множители выражение $4x^2+25$ при $x\geqslant 0$.

280. Разложите на множители выражение $4x^2+25$ при $x<0$.

281. Укажите значение параметра a, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения
$x^2-(6a-18)x+(3a-5)(3a-13)=0$ принимает наименьшее возможное значение.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

282. Укажите множество всех значений параметра a, при которых квадратное уравнение $x^2 + (a-5)x + 4 + 2a - 2a^2 = 0$ имеет два различных корня противоположных знаков.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-1;\ 1) \bigcup (1;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ 2)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $(-1;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ -2) \bigcup (1;\ +\infty)$

283. Укажите множество всех значений параметра p, для которых квадратное уравнение $2x^2 - (p+7)x - (p-5)(p+1) = 0$ имеет два различных корня и число $x = 2$ расположено строго между корнями.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-1;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (1;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ пустое множество $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (2;\ +\infty)$

2.6.2. Алгебраические уравнения, 2

284. Сумма всех различных корней уравнения $x^2 - 8|x| + 15 = 0$ равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ 15 $\boxed{\mathbf{2}}$ 8 $\boxed{\mathbf{3}}$ 0 $\boxed{\mathbf{4}}$ -8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 16

285. Сумма всех различных корней уравнения $x^2 - 10|x-2| + 1 = 0$ равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 21 $\boxed{\mathbf{3}}$ 20 $\boxed{\mathbf{4}}$ 0 $\boxed{\mathbf{5}}$ 10

286. Сумма двух наибольших корней уравнения $x^2 - 17||x| - 2| + 8 = 0$ равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ 8 $\boxed{\mathbf{2}}$ 34 $\boxed{\mathbf{3}}$ 25 $\boxed{\mathbf{4}}$ 17 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

287. Расстояние между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 - |x| - 2 = 0$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 4 $\boxed{\mathbf{3}}$ 6 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

288. Число, равное произведению всех различных различных корней уравнения $x^2 - 5|x| + 6 = 0$, принадлежит промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\infty;\ -40)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-40;\ 0)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[0;\ 10)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[10;\ 50)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[50;\ 9999)$

289. Если каждый корень квадратного уравнения
$3x^2 - 3x - 4 = 0$ умножить на 3, то получится уравнение
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x^2 - x - 12 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x^2 - x - 3 = 0$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $9x^2 - 9x - 4 = 0$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $9x^2 - 3x - 4 = 0$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x^2 - 3x - 12 = 0$

290. Найдите произведение всех различных значений параметра a, при которых уравнение $ax^2-(a+3)x+3=0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 такие, что $x_1:x_2=3:2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 9 $\boxed{\mathbf{2}}$ 4 $\boxed{\mathbf{3}}$ -4 $\boxed{\mathbf{4}}$ -9 $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{27}{2}$

291. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения
$\frac{x-7}{x+3}+\frac{x+3}{x-7}=\frac{5}{2}$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S\in[1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S\in[2{,}5;\ 3{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $S\in[3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $S\in[4{,}5;\ 999)$

292. Если число N равно большему корню уравнения
$x^3+\frac{1}{x^3}=\frac{13}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $N\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $N\in[1{,}5;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $N\in[2;\ 2{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $N\in[2{,}5;\ 3)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $N\in[3;\ 999)$

293. Если число P равно большему корню уравнения
$\frac{5x^2}{x+2}+\frac{x+2}{x^2}=6$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $P\in(-999;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $P\in[1{,}5;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $P\in[2;\ 2{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $P\in[2{,}5;\ 3)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $P\in[3;\ 999)$

294. Если число w равно большему корню уравнения
$\frac{x^2}{16}+\frac{9}{x^2}=\frac{25}{4}\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{4}\right)$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $w\in(-999;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $w\in[2{,}5;\ 3{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $w\in[3{,}5;\ 4{,}5)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $w\in[4{,}5;\ 5{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $w\in[5{,}5;\ 999)$

295. Укажите число, равное сумме всех различных корней уравнения $4(x^2+3x+2)^{-1}-8(x^2+3x+8)^{-1}=1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ -5 $\boxed{\mathbf{2}}$ -3 $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ -6 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

296. Если число σ равно сумме квадратов всех различных корней уравнения $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sigma\in(0;\ 19)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sigma\in[19;\ 23)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sigma\in[23;\ 29)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sigma\in[29;\ 32)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\sigma\in[32;\ 999)$

297. Сумма квадратов всех различных корней уравнения
$x^4-15x^3+70x^2-120x+64=0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

298. При всех значениях параметра $p \geqslant 0$ решите уравнение $p^3x^4 + 8p^2x^2 - 64x + 16p + 64 = 0$.

299. Больший корень уравнения $|x| = 8||x-2|-2| - 5x$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

300. Разложите на множители выражение $x^3 - 1$.

301. Разложите на множители выражение $x^2 + 16$ при $x \geqslant 0$.

302. Разложите на множители выражение $x^2 + 16$ при $x < 0$.

303. Укажите значение параметра a, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения $x^2 - (3a-7)x + (a+1)(2a-8) = 0$ принимает наименьшее возможное значение.
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

304. Укажите множество всех значений параметра p, для которых квадратное уравнение $x^2 - 5x + (4-p)(p+1) = 0$ имеет два различных корня и число $x = 2$ расположено строго между корнями.
$\boxed{1}$ $(1;\ 2)$ $\boxed{2}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (2;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ пустое множество
$\boxed{4}$ $(-\infty;\ 1) \bigcup (2;\ +\infty)$ $\boxed{5}$ $(-\infty;\ -2) \bigcup (1;\ +\infty)$

305. Если уравнение $\left|x^2 - 10|x| + 21\right| = kx$ имеет ровно три различных корня, то k равно
$\boxed{1}$ $10 \pm \sqrt{84}$ $\boxed{2}$ $10 - \sqrt{84}$ $\boxed{3}$ $10 + \sqrt{84}$ $\boxed{4}$ $\pm(10 - \sqrt{84})$
$\boxed{5}$ $\pm(10 + \sqrt{84})$

Ответы

263. ♦ $\{\pm 3;\ \pm 4\}$ **264.** ♦ $\{3;\ 5;\ -4 \pm \sqrt{17}\}$. **265.** ♦ $\{\pm 4;\ \pm 9;\ \pm\frac{13-\sqrt{233}}{2}\}$ **266.** ♦ $\{-1;\ 1\}$. **267.** ♦ $\{-2;\ -1;\ 1;\ 2\}$ **268.** ♦ $\{5;\ \frac{-3-\sqrt{65}}{2}\}$. **269.** ♦ $x^2 + 7x - 30 = 0$ **270.** $\boxed{3}$ **271.** $\boxed{3}$ **272.** $\boxed{1}$ **273.** $\boxed{2}$ **274.** $\boxed{2}$ **275.** $\boxed{5}$ **276.** $\boxed{3}$ **277.** $\boxed{1}$ **278.** $\boxed{5}$ **279.** ♦ $(2x - \sqrt{20x} + 5)(2x + \sqrt{20x} + 5)$. **280.** ♦ $(2x - \sqrt{-20x} - 5)(2x + \sqrt{-20x} - 5)$. **281.** $\boxed{3}$

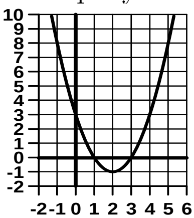
282. $\boxed{2}$ **283.** $\boxed{2}$ **284.** $\boxed{3}$ **285.** $\boxed{4}$ **286.** $\boxed{4}$ **287.** $\boxed{2}$
288. $\boxed{4}$ **289.** $\boxed{5}$ **290.** $\boxed{1}$ **291.** $\boxed{4}$ **292.** $\boxed{3}$ **293.** $\boxed{3}$
294. $\boxed{2}$ **295.** $\boxed{2}$ **296.** $\boxed{4}$ **297.** $\boxed{5}$ **298.** **299.** $\boxed{4}$
300. ♦ $(x-1)(x^2+x+1)$.. **301.** ♦ $(x-\sqrt{8x}+4)(x+\sqrt{8x}+4)$.
302. ♦ $(x-\sqrt{-8x}-4)(x+\sqrt{-8x}-4)$. **303.** $\boxed{3}$ **304.** $\boxed{4}$
305. $\boxed{4}$

Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

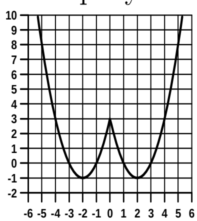
Для разбора на семинаре

1. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

♦ 

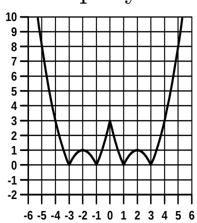
.

2. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

♦ 

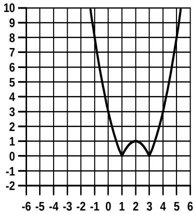
.

3. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$.

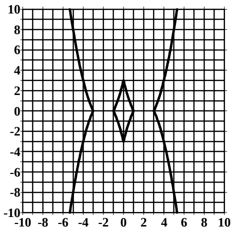
♦ 

.

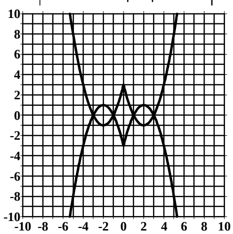
4. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$.

♦ .

5. Нарисуйте множество на плоскости $|y| = x^2 - 4|x| + 3$.

♦ .

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = \left|x^2 - 4|x| + 3\right|$.

♦ .

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x - 8\sqrt{x} + 12$

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

♦ $x \in [-3;\ -2] \bigcup [2;\ 3]$

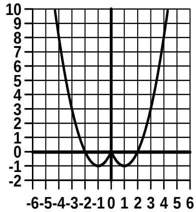
Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

Для самостоятельного решения

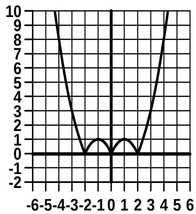
1. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 2x$.

2. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 2|x|$.



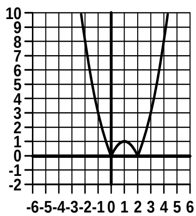
♦ .

3. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 2|x|\right|$.



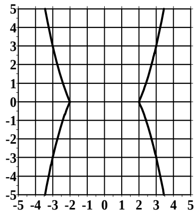
♦ .

4. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 2x\right|$.



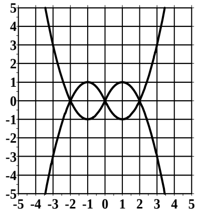
♦ .

5. Нарисуйте множество на плоскости $|y| = x^2 - 2|x|$.



♦ .

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = \left|x^2 - 2|x|\right|$.

♦ 

.

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 8x + 15}$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x - 8\sqrt{x} + 12}{x - 8\sqrt{x} + 15}$

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

♦ $x = \pm 4$; $x \in \emptyset$.

Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

1. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 2x - 3$.

2. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$.

3. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$.

4. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$.

5. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = x^2 - 2|x| - 3$.

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$.

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x - 10}{x^2 - 20x + 99}$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$
⧫ $x \in [-3;\, -2] \bigcup [-1;\, 1] \bigcup [2;\, 3]$.

Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

1. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 4$.

2. Нарисуйте график функции $y = x \cdot |x| - 4$.

3. Нарисуйте график функции $y = |x|x| - 4|$.

4. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 4\right|$.

5. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = x^2 - 4$.

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = \left|x^2 - 4\right|$.

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 5x + 4}$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 15x}{x^2 - 9x + 20}$

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}$
♦ $x \in \{1;\ 3;\ 4\}$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^8 - 7x^6 + 17x^4 - 17x^2 + 6$
♦ $x \in [-3;\ -2] \bigcup \{-1\} \bigcup \{1\} \bigcup [2;\ 3]$.

Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

1. Нарисуйте график функции $y = x^2 + 2x$.

2. Нарисуйте график функции $y = x|x| + 2|x|$.

3. Нарисуйте график функции $y = |x-1|(x-3)$.

4. Нарисуйте график функции $y = |x|x| - 4|$.

5. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = x^2 + 2|x|$.

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = x^2 + 2|x|$.

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = \dfrac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^4 - 13x^2 + 36}$

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = 56\dfrac{x^2}{-}\dfrac{15}{x} + 1$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^6 - 9x^4 + 23x^2 - 15$.
⧫ $x \in [-5;\ -3] \bigcup [-1;\ 1] \bigcup [3;\ 5]$.

Для самостоятельной работы

Квадратные и приводящиеся к квадратным уравнения и неравенства

1. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 8x + 7$.

2. Нарисуйте график функции $y = x^2 - 8|x| + 7$.

3. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 8|x| + 7\right|$.

4. Нарисуйте график функции $y = \left|x^2 - 8x + 7\right|$.

5. Нарисуйте множество на плоскости $|y| = x^2 - 8|x| + 7$.

6. Нарисуйте множество точек на плоскости $|y| = \left|x^2 - 8|x| + 7\right|$.

7. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

8. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x - 5\sqrt{x} + 6$.

9. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для $f(x) = x - 5\sqrt{x} + 6$

10. Решите неравенства $f(x) \leqslant 0$ и $f(x) < 0$ для $f(x) = x^4 - 41x^2 + 400$
♦ $x \in [-5;\ -4] \bigcup [4;\ 5]$

Тема 3. Алгебраические неравенства

3.1. Основные свойства неравенств

3.1.1. Понятие неравенства

Теоретические сведения Неравенством называют два выражения, связанных одним из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$. Неравенство называется числовым, если указанные выражения не содержат параметров и переменных. Числовое неравенство может быть верным или неверным. Неравенство $a > b$ (a и b — числовые выражения) называют верным, если и только если $a - b > 0$ (остальные три случая рассматриваются аналогично). Если неравенство содержит переменную, то при некоторых значениях переменной оно может быть верным, а при других — неверным. Решить неравенство означает указать все значения переменной, при которых неравенство является верным. Неравенство может содержать несколько переменных, некоторые их них могут быть по воле составителя задачи названы параметрами. Изначально никакой разницы между параметром и переменной нет. Разница может появиться, если она явно указана в условии задачи. Чаще всего требуют решить неравенство при определенных значениях параметра, или найти значения параметра, при которых множество решений неравенства обладает определенными свойствами.

Неравенство можно интерпретировать как функцию от двух переменных, в число которых входят его левая и правая часть. Это необычная функция, она может принимать только два значения, которые традиционно называют "истина" и "ложь" (а чаще — "true" и "false".) Такие функции называют булевскими. Булевские значения (true и false) могут участвовать в выражениях с операциями "и" $\bigcap$, "или" $\bigcup$, "не" $\neg$. Правила простые и естественные,

		B	B
	$A \bigcap B$	true	false
A	true	true	false
A	false	false	false

		B	B
	$A \bigcup B$	true	false
A	true	true	true
A	false	true	false

(1) $\neg$false = true, **(2)** $\neg$true = false.

Применение бытового языка с союзами и или в математическом тексте приводит к лингвистическим проблемам. Например, вне контекста не ясно, что означает фраза $x = 1$, $y = 2$. Может быть, это значит $x = 1$ и одновременно $y = 2$, то есть это точка на плоскости, а может быть, $x = 1$ или $y = 2$, и тогда это пара перпендикулярных прямых. Вместе с тем, смысл формул $x = 1 \bigcap y = 2$, а также $x = 1 \bigcup y = 2$ не зависит от текста слева и справа от них. В этой книге мы иногда будем пользоваться булевскими обозначениями, например,

(1) утверждение $x \in [1;\ 5] \bigcap x \in [3;\ 7]$ означает то же самое, что $\begin{cases} x \in [1;\ 5], \\ x \in [3;\ 7], \end{cases}$ т.е. $x \in [3;\ 5]$,

(2) утверждение $x \in [1;\ 5] \bigcup x \in [3;\ 7]$ означает то же самое, что $\left[\begin{array}{l} x \in [1;\ 5], \\ x \in [3;\ 7], \end{array}\right.$ т.е. $x \in [1;\ 7]$.

3.1.2. Свойства числовых неравенств

Теоретические сведения Перечислим основные свойства числовых неравенств. Пусть a, b, c, d — действительные числа.

- Если $a > b$, то $a - b > 0$ и наоборот.
- Если $a > b$, то для любого числа c будет $a + c > b + c$.
- Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
- Если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.
- Если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.
- Если $a > b$, то $-a < -b$.
- Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
- Если $a < b$ и $f(x)$ — возрастающая функция на промежутке $[a;\ b]$, то $f(a) < f(b)$.
- Если $a < b$ и $f(x)$ — убывающая функция на промежутке $[a;\ b]$, то $f(a) > f(b)$.

Неверно: Если $a > b$ и $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$. например,
$-2 > -3, \quad 7 > 4$, но $-14 < -12$.

3.1.3. Равносильные неравенства

Теоретические сведения Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадают.

Например,
неравенства $\sqrt{x} > 0$ и $\operatorname{arctg} x > 0$ равносильны,
неравенства $x^2 - 4x + 3 < 0$ и $\frac{x-1}{x-3} < 0$ равносильны,
неравенства $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \leqslant 3 - x$ и $-x^2 + 4x - 3 \leqslant (3 - x)^2$ не являются равносильными.

Теоретические сведения Неравенство $(\star\star)\ \ g_1(x) \wedge g_2(x)$ называют следствием неравенства $(\star)\ \ f_1(x) \wedge f_2(x)$, если любое решение неравенства $(\star)$ является также решением неравенства $(\star\star)$ (здесь $\wedge$ — любой из четырех знаков неравенста). Если в процессе решения неравенства $(\star)$ вы заменяете его на его следствие $(\star\star)$, то ни одно решение не будет потеряно, но могут появиться лишние решения. В процессе решения допустима замена неравенства на его следствие, при этом потребуется проверка или какой-то другой способ исключения посторонних решений. Замена неравенства на другое, не являющееся следствием, недопустима. Иногда неравенство заменяют системой или совокупностью неравенств, которые вместе являются следствием или равносильны исходному.

Например, неравенство $\sqrt{x} > 0$ является следствием неравенства $\operatorname{arctg} x > 0$ (и наоборот, так как они равносильны). Неравенство $(\star\star)\ \ -x^2 + 4x - 3 \leqslant (3 - x)^2$ является следствием неравенства $(\star)\ \ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \leqslant 3 - x$, причем обратное неверно. Если вы заменяете $(\star)$ на $(\star\star)$, вы можете получить лишние решения (так оно и произойдет).

Теоретические сведения К левой и правой частям неравенства можно прибавить одну и ту же функцию, которая определена на том же или более широком множестве, при этом получится неравенство, равносильное исходному. Иными словми, если $D[f_1]\bigcap D[f_2]\subset D[g]$, где $D[f]$ — область определения функции $y=f(x)$, то неравенства $f_1(x)<f_2(x)$ и $f_1(x)+g(x)<f_2(x)+g(x)$ равносильны.

Прибавление к обоим частям неравенства константы приводит к равносильному неравенству. Например, неравенство $\frac{x-3}{2x+1}<1$ равносильно неравенству $\frac{x-3}{2x+1}-1<0$.

Теоретические сведения Обе части неравенства можно умножить на одну и ту же положительную функцию, которая определена на том же или более широком множестве, и при этом получится равносильное неравенство.
Иными словами, если $D[f_1]\bigcap D[f_2]\subset D[g]$, и $g(x)>0$, то неравенства
$f_1(x)<f_2(x)$ и $f_1(x)\cdot g(x)<f_2(x)\cdot g(x)$ равносильны.

Например, неравенство $\frac{x-3}{1+x^2}<1$ равносильно неравенству $x-3<1+x^2$.

Теоретические сведения На левую и правую части неравенства можно одновременно подействовать одной и той же возрастающей функцией с достаточно широкой ОДЗ, и при этом получится равносильное неравенство. Если подействовать убывающей функцией, то получится равносильное неравенство противоположного знака.
Это означает следующее. Пусть $g(t)$ — возрастающая функция, определеннная на всей числовой оси. Тогда неравенство $u(x)<v(x)$ равносильно неравенству $g(u(x))<g(v(x))$. Если функция $g(t)$ убывает на всей числовой оси, то знак неравенства нужно поменять на противоположный. Аналогичные утверждения можно сформулировать и для некоторых случаев, когда функция $g(t)$ определена и возрастает на некотором промежутке $[a;b]$. Например, пусть функция $g(t)$ определена и строго возрастает на промежутке $[a;b]$, множество значений каждой из функций $u(x)$ и $v(x)$ включено в промежуток $[a;b]$. Тогда неравенство $u(x)<v(x)$ равносильно неравенству $g(u(x))<g(v(x))$.

Например, на левую и правую части неравенства

($\star$) $\sqrt{4x+13} \leqslant \sqrt{3x+7}+1$
можно одновременно подействовать одной и той же функцией $g(t) = t^2$, которая удовлетворяет требованию монотонности на обьединении множеств значений левой и правой частей, при этом получится равносильное неравенство
($\ddagger$) $\left(\sqrt{4x+13}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{3x+7}+1\right)^2$.
Если в левой части заменить $\left(\sqrt{4x+13}\right)^2$ на $4x+13$, то получится, вообще говоря, следствие
($\ddagger\ddagger$) $4x+13 \leqslant 3x+7+2\sqrt{3x+7}+1$,
так как при такой замене возможно, вообще говоря, расширение ОДЗ. В данном конкретном случае, однако, ОДЗ неравенства ($\ddagger\ddagger$) совпадает с ОДЗ неравенста ($\ddagger$) (и совпадает с ОДЗ неравенста ($\star$)), поэтому внутри ОДЗ неравенства ($\ddagger\ddagger$) эти две функции тождественно равны, и поэтому ($\ddagger$) и ($\ddagger\ddagger$) равносильны. После упрощения получим $x+5 \leqslant 2\sqrt{3x+7}$. На ОДЗ, $x \in [-\frac{7}{3};\ +\infty)$, обе части снова положительны, и опять можно подействовать той же функцией, т.е. возвести в квадрат, $x^2+10x+25 \leqslant 4\left(\sqrt{3x+7}\right)^2$. Теперь в правой части можно заменить $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2$ на $3x+7$, после чего получится $x^2+10x+25 \leqslant 4(3x+7)$. И это преобразование равносильно, так как правая часть больше или равна левой части, в которой стоит полный квадрат, т.е. неотрицательное выражение. Приведем подобные, $x^2-2x-3 \leqslant 0$, $x \in [-1;\ 3]$. Проверка не требуется, так как все преобразования были равносильны. Более подробно равносильные преобразования будут рассмотрены в главе "иррациональные уравнения и неравенства".

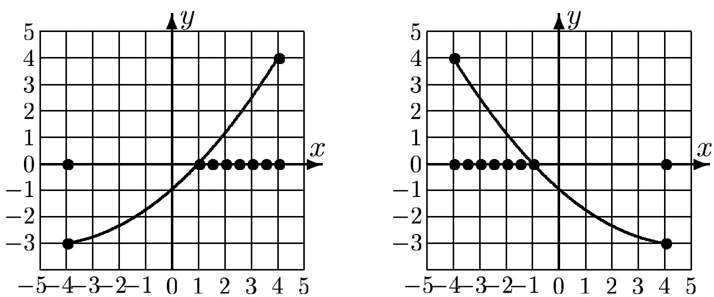
Теоретические сведения Для решения неравенства $u(x) < v(x)$ удобно применить функциональное преобразование с помощью функции $g(t)$, которая является обратной к одной из функций $u(x)$ или $v(x)$.

Чаще всего применяются функции
(1) $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[0;\ +\infty)$, **(2)** $f(x) = x^2$ на промежутке $[0;\ +\infty)$, **(3)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, **(4)** $f(x) = x^3$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, **(5)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, **(6)** $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$, **(7)** $f(x) = \arcsin x$ на промежутке $[-1;\ 1]$, **(8)** $f(x) = \sin x$ на

промежутке $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$, **(9)** $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, на промежутке $(0;\ +\infty)$, **(10)** $f(x) = a^x$, $a > 1$, на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$,
Если функция $f(x)$ строго убывает, то следует поменять знак неравенства на противоположный,
(11) $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; 0]$, **(12)** $f(x) = \arccos x$ на промежутке $[-1;\ 1]$, **(13)** $f(x) = \cos x$ на промежутке $[0;\ \pi]$, **(14)** $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, **(15)** $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0;\ \pi)$, **(16)** $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$, на промежутке $(0;\ +\infty)$, **(17)** $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$, на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, и многие другие.

3.1.4. Неравенства с монотонной функцией

Теоретические сведения Если $f(x)$ — возрастающая функция, определенная на отрезке $x \in [a;\ b]$ и $f(c) = 0$, где $c \in (a;\ b)$, то неравенство $f(x) \geqslant 0$ равносильно неравенству $c \leqslant x \leqslant b$, рис. 31a. Если $f(x)$ — убывающая функция, определенная на отрезке $x \in [a;\ b]$ и $f(c) = 0$, где $c \in (a;\ b)$, то неравенство $f(x) \geqslant 0$ равносильно неравенству $a \leqslant x \leqslant c$.



Неравенство с возрастающей функцией

Неравенство с убывающей функцией

Рис. 31. Неравенства с монотонной функцией

Сформулируйте самостоятельно аналогичные утверждения для строгого неравенства и для неравенства $\leqslant$.

Существует два основных метода решения неравенства вида $f(x) > 0$ (и трех других типов неравенств),
(1) использование монотонности функции $f(x)$,
(2) применение решающей функции.
Продемонстрируем оба метода на следующем примере.

11. Решите неравенство $(\star)$ $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$.
♦ $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение 1. Перечислим свойства функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, которые потребуются для решения неравенства $(\star)$. **(1)** Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ определена на всей числовой оси, кроме точек $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **(2)** На каждом из промежутков

$(\star\star)$ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$,

функция $f(x)$ возрастает. **(3)** Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ образуют множество $\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Теперь рассмотрим любой из промежутков $(\star\star)$. На нем $f(x)$ возрастает, $g(x) = f(x) - \sqrt{3}$ также возрастает, $g\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n\right) = 0$. Следовательно, $g(x) > 0$ при

$(\ddagger)$ $x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$

и $g(x) < 0$ при

$(\ddagger\ddagger)$ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{3} + \pi n\right)$.

Поэтому все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ образуют множество $(\ddagger)$, а $(\ddagger\ddagger)$ — множество решений неравенства $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$. Так как неравенство $(\star)$нестрогое, следует присоединить тот конец промежутка, который является решением соответствующего уравнения. ■

Решение 2. Применим решающую функцию $F(x) = \operatorname{arctg} x$ к неравенству $(\star)$ на промежутке $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, и получим равносильное на указанном промежутке неравенство

$(\ddagger\ddagger)$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{3})$.

Левая часть этого неравенства тождественно равна x при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, правая равна $\dfrac{\pi}{3}$. Поэтому $(\ddagger\ddagger)$ равносильно системе

$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$ Полный ответ можно получить, используя периодичность функции $f(x) = \operatorname{tg} x$. ■

12. Решите неравенство $x^3 + 2x^2 + 3x \leqslant 6$.

♦ $x \in (-\infty; 1]$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$,
$(\star)$ $f' = 3x^2 + 4x + 3$.
Дискриминант квадратного трехчлена в правой части $(\star)$ отрицателен, поэтому $f'(x) > 0$ на всей числовой оси, функция $f(x)$ на всей числовой оси возрастает. Уравнение $x^3 + 2x^2 + 3x = 6$ имеет очевидный корень $x = 1$. Поэтому $f(x) < 6$ при $x < 1$ и $f(x) > 6$ при $x > 1$. ■

13. Решите неравенство $(\star)$ $x^7 + 5x^5 + x^3 + 3x \geqslant 10$.

♦ $x \in [1; +\infty)$.

Решение. Функция $f(x) = x^7 + 5x^5 + x^3 + 3x - 10$ является суммой четырех функций, возрастающих на всей числовой оси, и поэтому сама является строго возрастающей на всей числовой оси. К тому же $f(1) = 0$. Поэтому неравенство $x^7 + 5x^5 + x^3 + 3x \geqslant 10$ равносильно неравенству $x \geqslant 1$. ■

3.1.5. Тождественные неравенства

Теоретические сведения Неравенство с параметром (параметрами) называют тождественным, если оно верно при любых допустимых значениях параметра (параметров). Допустимыми считаются все значения параметров, при которых левая и правая части неравенства имеют смысл (т.е. являются числовыми выражениями, все действия в которых не противоречат правилам выполнения арифметических действий и вычисления значений элементарных функций). Применяется также термин "неравенство тождественно выполняется на заданном множестве". Он означает, что неравенство является верным при всех значениях параметра из указанного множества.

3.1.6. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Теоретические сведения Средним арифметическим двух вещественных чисел a и b называется величина $\frac{a+b}{2}$. Средним геометрическим двух неотрицательных вещественных чисел a и b называется величина $\sqrt{ab}$.

Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, называют иногда неравенством Коши. Оно применяется для решения некоторых типов уравнений и неравенств, для вычисления максимальных и минимальных значений функций. Неравенство Коши применяется также в геометрии, чаще всего при исследовании максимальных или минимальных периметров и площадей, решении прямоугольных треугольников и т.д.

Целесообразно использовать в зависимости от обстоятельств одну из следующих формулировок неравенства Коши:

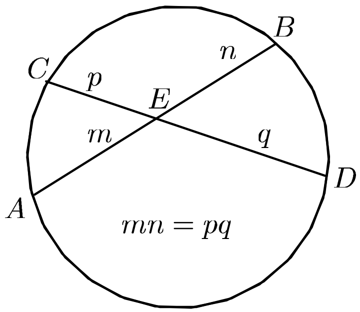
- Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $a = b$.

- Для любых a и b справедливо неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $a = b$.

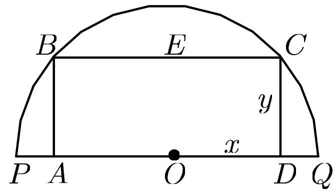
- Если a и b — числа одного знака, т.е. $ab > 0$, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $a = b$.

- Если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $a = 1$.

- Если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} \leqslant -2$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $a = -1$.



(a)



(b)

Рис. 32. Геометрические неравенства

14. Найдите наименьше возможное значение суммы двух положительных чисел, произведение которых равно 16.

⧫ 8

Решение. Пусть $x > 0$, $y > 0$ и $xy = 16$. В соответствии с неравенством Коши, $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 8$, знак равенства имеет место при $x = y = 4$. ■

15. Точка E делит хорду в круге на отрезки длиной 9 и 16. Найдите наименьшую возможную длину хорды того же круга, которая проходит через точку E.

⧫ 24

Решение. Если хорда AB и хорда CD одного и того же круга пересекаются в точке E (точки A, B, C, D лежат на окружности, рис. 32a), то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$. Поэтому задача эквивалентна задаче о вычислении наименьшего значения $x + y$ при условии $x \cdot y = 9 \cdot 16$, $x > 0$, $y > 0$. Наименьшее значение достигается при $x = y$ и оно равно $2\sqrt{9 \cdot 16}$. ■

16. Найдите наибольшую возможную площадь прямоугольника, целиком лежащего внутри полукруга радиуса 1.

⧫ 1 ⧫ отношение сторон прямоугольника наибольшей площади будет 2 : 1.

Решение. Пусть сторона AD прямоугольника $ABCD$ лежит на диаметре PQ окружности с радиусом $PO = OQ = R$, вершины B и C лежат на окружности (рис. 32b). Обозначим длины сторон $AD = 2x$, $AB = y$. Тогда ($\star$) $x^2 + y^2 = R^2$, ($\star\star$) $S = 2xy$. Таким образом, математическая модель состоит в определении положительных значений параметров x и y, при которых функция ($\star\star$) достигает наибольшего значения при дополнительном условии ($\star$). В соответствии с неравенством Коши, $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2}$, откуда $S = 2xy \leqslant 1$, причем $S = 2xy = 1$ при $x = y = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. ■

17. Найдите наименьшую возможную площадь полукруга, в который вписан прямоугольник с площадью $S = 1$ так, что одна из сторон прямоугольника лежит на диаметре полукруга, а две вершины, принадлежащие противоположной стороне, лежат на дуге полуокружности.

⧫ $\dfrac{\pi}{2}$ ⧫ отношение сторон прямоугольника 2 : 1.

Решение. Решение повторяет решение предыдущей задачи. Математическая модель состоит в определении положительных значений параметров x и y, связанных условием ($\star\star$) , при которых функция ($\star$) достигает наименьшего значения. Неравенство Коши опять сразу дает ответ, стороны прямоугольника равны $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}$, радиус круга равен 1, площадь круга π, площадь полукруга $0{,}5\pi$. Эта задача и предыдущая называются двойственными. Двойственные задачи играют большую роль в приложениях, в том числе и в экономических моделях. ■

18. Найдите наименьшее значение функции ($\star$) $f(x) = 12x + \frac{12}{x}$ на множестве $x \in (0;\, +\infty)$.

⧫ 24 ⧫ $f(x) \in [24;\, +\infty)$.

Решение. Наименьшее значение функции ($\star$) равно $12 \cdot A$, где A — наименьшее значение функции ($\star\star$) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на множестве $x \in (0;\, +\infty)$. В соответствии с неравенством Коши, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ на множестве $x \in (0;\, +\infty)$, поэтому наименьшее значение функции ($\star\star$) на множестве $x \in (0;\, +\infty)$ равно

2. Наименьшее значение функции ($\star$) на множестве $x \in (0;\, +\infty)$ равно $12 \cdot 2 = 24$. ■

19. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 4x + \dfrac{9}{x}$ на промежутке $x \in (0;\, +\infty)$.
♦ 12 ♦ $f(x) \in [12;\, +\infty)$.
Решение. Преобразуем указанную функцию к виду
$f(x) = \sqrt{4 \cdot 9}\Big(\dfrac{4}{\sqrt{4 \cdot 9}}x + \dfrac{9}{\sqrt{4 \cdot 9}x}\Big) = 6\Big(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2x}\Big)$. Выполним замену переменной $\dfrac{2}{3}x = t$. Тогда $\begin{cases} f(x) = 6t + \dfrac{6}{t}, \\ \dfrac{2}{3}x = t. \end{cases}$ Далее действуем так же, как в предыдущей задаче. ■

20. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 12x^2 + \dfrac{12}{x^2}$.
♦ 24 ♦ $f(x) \in [24;\, +\infty)$.
Решение. Выполним замену переменной $x^2 = t$, $t \in (0;\, +\infty)$, и получим $f(x) = g(t)$, где $g(t) \Subset t + \dfrac{1}{t} \in [2;\, +\infty)$. ■

21. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 12x^2 + \dfrac{12}{x^2 + 1}$.
♦ $f(x) \Subset [12;\, +\infty)$.
Решение. Выполним замену переменной $x^2 + 1 = t$, $t \in [1;\, +\infty)$. Тогда
$f(x) = g(t)$, $g(t) = 12t - 12 + \dfrac{12}{t} \Subset [12;\, +\infty)$. ■

Следующие задачи иллюстрируют ситуацию, в которой применение неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое, требует большой аккуратности.

22. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 12x^2 + \dfrac{12}{x^2 + 2}$.
♦ 6
Решение. Выполним замену $x^2 + 2 = t \in [2;\, +\infty)$. Тогда
$f(x) = g(t)$, $g(t) = 12t - 24 + \dfrac{12}{t}$. Наименьшее значение функции

$12t+\dfrac{12}{t}$ на промежутке $t \in [2;\ +\infty)$ достигается в точке $t = 2$ и оно равно 30. Формальное применение неравенства Коши дает $12t+\dfrac{12}{t} \geqslant 24$ при $t \geqslant 0$. Это, конечно, верно, но значение 24 не достигается, так как значение $t = 1$ не входит в допустимую область. Если этого не заметить, получится неверный ответ $f_{\min} = 0$. ■

23. Найдите наименьшее значение функции
$f(x) = 12x^2 + \dfrac{12}{x^2+3}$.
♦ 4
Решение. Выполним замену $x^2 + 3 = t \in [3;\ +\infty)$. Тогда
$f(x) = g(t)$, $g(t) = 12t - 36 + \dfrac{12}{t}$. Наименьшее значение функции $12t+\dfrac{12}{t}$ на промежутке $t \in [3;\ +\infty)$ достигается в точке $t = 3$ и оно равно 40. Формальное применение неравенства Коши дает опять $12t+\dfrac{12}{t} \geqslant 24$ при $t \geqslant 0$. Значение 24 не достигается, если этого не заметить, получится не просто неверный, а абсурдный ответ $f_{\min} = -12$. ■

24. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 88x(1-x)$.
♦ 22 ♦ $f(x) \in [22;\ +\infty)$.
Решение 1. Выделим полный квадрат,
$88x(1-x) = -88x^2 + 88x = -88\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right)$
$= -22\left(4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right)$, $4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \in [-1;\ +\infty)$,
$-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \in (-\infty;\ 1]$, $-22\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \in (-\infty;\ 22]$. ■
Решение 2. Так как наибольшее значение этой функции — положительное число, то достаточно рассмотреть ее на промежутке $x \in (0;\ 1)$. Применим неравенство Коши к величинам x и $1-x$,
$\sqrt{x(1-x)} \leqslant \dfrac{x+(1-x)}{2} = \dfrac{1}{2}$,
$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, причем равенство имеет место при $x = 0{,}5$. ■

25. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 36\big(\sin^3 x - \sin^6 x\big)$.
♦ 9 ♦ $f(x) \in [-72;\ 9]$.
Решение. Выполним замену переменной $\sin^3 x = t \in [-1;\ 1]$, $f(x) = 36g(t)$, $g(t) = t(1-t) \Subset [-2;\ \frac{1}{4}]$, $f(x) \Subset [-72;\ 9]$. ■

3.1.7. Доказательство неравенств

26. Докажите неравенство Коши.
Решение. Пусть $x \geqslant 0 \bigcap y \geqslant 0$. Докажем, что $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Доказательство будет состоять в серии преобразований, каждое из которых обратимо (т.е. всю серию можно будет проделать в обратном порядке). Последнее неравенство будет тождественным. Начнем с умножения на 2, получим $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Теперь используем неотрицательность параметров, $(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geqslant 0$. Формула сокращенного умножения даст $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$. Это последнее неравенство является тождественным, а все преобразования были обратимы. Доказательство второй части (про равенство) проведите самостоятельно. ■

27. Докажите неравенство $\frac{x+y+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzt}$, если $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ t > 0$.

28. Докажите неравенство $\big(1 + \frac{y}{x}\big)\big(1 + \frac{z}{y}\big)\big(1 + \frac{x}{z}\big) \geqslant 8$, если $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.
Решение. Раскроем скобки, $1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + 1 \geqslant 8$. Перегруппируем слагаемые, $\big(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\big) + \big(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\big) + \big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\big) \geqslant 6$. Это последнее неравенство доказывается применением неравенства Коши к каждой паре величин в скобках. ■

29. Докажите неравенство $(\star)$ $x^4 + y^4 \geqslant xy(x^2 + y^2)$.
Решение. Если $xy \leqslant 0$, то $(\star)$ выполнено. Пусть $xy > 0$. Для доказательства придется следующую последовательность равносильных неравенств прочитать от конца к началу:
$x^4 + y^4 \geqslant xy(x^2 + y^2)$, $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \geqslant xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2$,
$(x^2 - y^2)^2 \geqslant xy(x^2 + y^2 - 2xy)$, $(x^2 - y^2)^2 \geqslant xy(x - y)^2$,
$(x - y)^2(x + y)^2 \geqslant xy(x - y)^2$, $(x + y)^2 \geqslant xy$, $x + y \geqslant \sqrt{xy}$,
$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. ■

30. Докажите неравенство $(\star)$ $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 \geqslant 4xy(x^2 + y^2)$.

Решение. Если $xy \leqslant 0$, то $(\star)$ выполнено. Пусть $xy > 0$. Для доказательства придется следующую последовательность равносильных неравенств прочитать от конца к началу:
$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 \geqslant 4xy(x^2 + y^2)$,
$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \geqslant 4xy(x^2 + y^2) - 8x^2y^2$,
$(x^2 - y^2)^2 \geqslant 4xy(x^2 + y^2) - 8x^2y^2$,
$(x^2 - y^2)^2 \geqslant 4xy(x^2 + y^2 - 2xy)$, $(x^2 - y^2)^2 \geqslant 4xy(x - y)^2$,
$(x - y)^2(x + y)^2 \geqslant 4xy(x - y)^2$, $(x + y)^2 \geqslant 4xy$, $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. ■

31. Докажите неравенство $(\star)$ $(x + y + z)^2 \leqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$.
Решение. Запишем неравенство Коши для трех пар переменных, $2xy \leqslant x^2 + y^2$, $2xz \leqslant x^2 + z^2$, $2yz \leqslant y^2 + z^2$.
Сложим все три неравенства и прибавим в левой и правой частям величину $x^2 + y^2 + z^2$. Получится неравенство
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leqslant 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$.
Это неравенство совпадает с $(\star)$. ■

32. Докажите неравенство $(\star)$ $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$.
Решение. Запишем неравенство Коши для трех пар переменных, $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, $xz \leqslant \frac{x^2+z^2}{2}$, $yz \leqslant \frac{y^2+z^2}{2}$.
Сложив все три неравенства и поделив пополам, получим $(\star)$. ■

33. Докажите неравенство
$(\star)$ $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geqslant x + y + z$,
если
$x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$.
Решение. Запишем неравенство Коши три раза, $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} \geqslant 2x$, и т.д. Сложим все три неравенства и поделим пополам. Получим $(\star)$. ■

34. Докажите справедливость неравенства
$(\star)$ $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geqslant 0$,
если $xy \neq 0$.
Решение. Пусть $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$. Тогда левая часть $(\star)$ равна

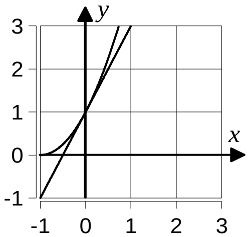
$$(\star\star)\ \ 3t^2 - 6 - 8t + 10 = 3t^2 - 8t + 4 = \left(\sqrt{3}t - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{16}{3}.$$

Важно заметить, что вершина квадратного трехчлена $(\star\star)$, $t = \frac{4}{3}$, находится в запрещенной области числовой оси. Функция $(\star\star)$ на промежутке $(-\infty;\ -2]$ убывает, а на промежутке $[2;\ +\infty)$ возрастает, наименьшее значение достигает в точке $t = 2$ и это значение равно нулю. ■

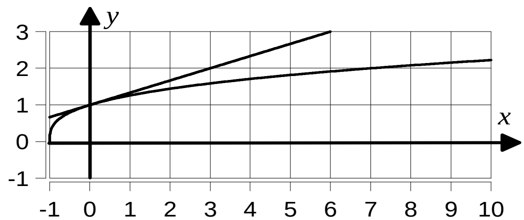
35. Докажите, что если $n \geqslant 1$ — натуральное число, и $x \geqslant -1$, то
$(\star)$ $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
При $n = 1$ равенство имеет место на всем промежутке $x \in [-1;\ +\infty)$. При $n > 1$ равенство имеет место только в точке $x = 0$.

Решение. При $n = 1$ неравенство $(\star)$ верно. Предположим, что $(\star)$ верно при всех $x \geqslant -1$ и при всех n из множества $n \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ m\}$, где m — некоторое натуральное число. Докажем, что $(\star)$ будет верно также и при $n = m+1$. Преобразуем выражение $(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x)$. По предположению, $(1+x)^m \geqslant 1+mx$. Кроме того, $1+x \geqslant 0$. Следовательно, $(1+x)^{m+1} \geqslant (1+mx)(1+x) = 1+(m+1)x+mx^2$. Так как $mx^2 \geqslant 0$, то $(1+x)^{m+1} \geqslant 1+(m+1)x$. Так как $(\star)$ верно при $m = 1$, то оно верно и при $m = 2$, поэтому и при $m = 3$ и т.д. Такой метод рассуждений называется математической индукцией. Более продробно он будет рассмотрен в главе "натуральные числа". ■

Замечание. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $x = x_0$, имеет вид
$\tilde{y}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
(при условии, что указанная производная существует). Пусть $(\star\star)$ $f(x) = (1+x)^n$ и $x_0 = 0$. Так как $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = n$, то уравнение касательной имеет вид $(\star\star\star)$ $\tilde{y}(x) = 1+nx$. Неравенство $(\star)$ устанавливает, таким образом, что график функции $(\star\star)$ на указанном промежутке лежит не ниже своей касательной $(\star\star\star)$, рис. 33а. Функция, график которой на некотором промежутке X лежит выше своей касательной, проведенной в любой точке $x_0 \in X$ (за исключением самой точки x_0, которая является общей точкой этих двух графиков), называется выпуклой вниз на этом промежутке. Следовательно, функция $(\star\star)$ при $n \geqslant 2$ на промежутке $x \in [-1;\ +\infty)$ является выпуклой вниз (иногда говорят строго выпуклой, чтобы подчеркнуть, что графики совпадают только в точке касания).



$f(x) = (1+x)^n$



$f(x) = \sqrt[n]{1+x}$

Рис. 33. Тождественные неравенства, связывающие функцию и ее касательную

36. Докажите, что если $n \geqslant 1$ — натуральное число, и $x \geqslant -1$, то
$(\star)$ $\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$.
При $n = 1$ равенство имеет место на всем промежутке $x \in [-1;\, +\infty)$. При $n > 1$ равенство имеет место только в точке $x = 0$.

Решение. Левая и правая части $(\star)$ на указанном промежутке неотрицательны, поэтому неравенство можно возвести в степень n, а точнее, подействовать на левую и правую части монотонной функцией $g(t) = t^n$, в результате чего получится равносильное неравенство $1 + x \leqslant (1 + \frac{x}{n})^n$. Выполним замену $\frac{x}{n} = y \in [-\frac{1}{n};\, +\infty)$, и получим $1 + ny \leqslant (1 + y)^n$. Это неравенство доказано в предыдущем примере. Так как использованные преобразования (замена переменной и действие монотонной функции на обе части неравенства) обратимы, доказательство завершено. ■

Замечание. Результат этой задачи также может быть интерпретирован с использованием уравнения касательной. Уравнение касательной к графику функции $(\star\star)$ $y = \sqrt[n]{1+x}$, проведенной в точке $x_0 = 0$, имеет вид $(\star\star\star)$ $\tilde{y}(x) = 1 + \frac{x}{n}$. Неравенство $(\star)$ устанавливает, таким образом, что график функции $(\star\star)$ на указанном промежутке лежит не выше своей касательной $(\star\star\star)$, рис. 33b. Функция, график которой на некотором промежутке X лежит ниже любой своей касательной, проведенной в точке $x_0 \in X$ (за исключением самой точки x_0, которая является общей точкой этих двух графиков), называется выпуклой вверх на этом промежутке. Следовательно, функция $(\star\star)$ при $n \geqslant 2$ на промежутке $x \in [-1;\,+\infty)$ является выпуклой вверх.

3.2. Метод интервалов

3.2.1. Неравенства с многочленами

Теоретические сведения Для решения неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, мы будем использовать так называемый "метод интервалов".

- Разложим многочлены на множители: $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$, каждый из которых — линейная функция или квадратный трехчлен с отрицательным знаменателем. То же сделаем с функцией $g(x)$. Получим равносильное неравенство (рассмотрим только один вариант)
$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x)} < 0.$$
- Отметим на числовой оси "черными кружочками"типа $\bullet$ точки x такие, что $f(x) = 0$. Отметим на числовой оси "белыми кружочками"типа $\circ$ точки x такие, что $g(x) = 0$.
- Переберем все сомножители числителя и знаменателя и отметим галочкой типа $\surd$ все точки, в которых очередной сомножитель меняет знак. Некоторые точки могут быть отмечены несколькими галочками.
- Рисуем знаковый портрет левой части, изменяем знак в тех точках, над которыми имеется нечетное число галочек. Если в некоторой точке поставлено четное число галочек, то знак не меняем.
- Если неравенство строгое, то дополнительно отмечаем "большими белыми кружочками" типа $\bigcirc$ все точки, в которых $f(x) = 0$. Таким образом, для строгих неравенств все "черные" точки обводятся белыми кружочками, т.е. исключаются из ответа. Для нестрогих неравенств целесообразно дополнительно отметить каким-то символом все "черные" точки, чтобы не забыть включить их в ответ.

- Формулируем ответ, используя знаковый портрет левой части.

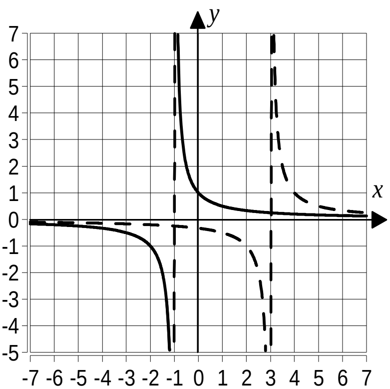
37. Решите неравенство $(x+1)^{-1} < (x-3)^{-1}$.

♦ $(-\infty;\ -1) \bigcup (3;\ +\infty)$.

Решение. Приведем к общему знаменателю,

$(\star)\ \ \dfrac{-4}{(x+1)(x-3)} < 0.$

Функция в левой части $(\star)$ имеет две точки перемены знака, $x \in \{-1;\ 3\}$, которые не принадлежат области определения. Эти точки делят всю числовую ось на три промежутка. Найдем значение функции $f(x) = \dfrac{-4}{(x+1)(x-3)}$ в пробной точке $x_\star = 0$, $f(x_\star) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при $x \in (-1;\ 3)$. Соседние промежутки, $x \in (-\infty;\ -1) \bigcup (3;\ +\infty)$, следует включить в ответ. ■



XXXX

$f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x+3}$ $\qquad f(f) = \sqrt[n]{1+x}$

Рис. 34. Решение неравенств

38. Решите неравенство $(x^2-4x+3)(x^2-10x+21) \geqslant 0$.

♦ $x \in (-\infty;\ 1] \bigcup \{3\} \bigcup [7;\ +\infty)$.

Решение. Левая часть определена на всей числовой оси. Перечислим все точки, в которых меняется знак левой части, причем каждую упомянем столько раз, сколько раз она присутствует в выражении для функции, $x \in \{1;\ 3;\ 3;\ 7\}$. Обратим внимание на то, что точка $x = 3$ встретилась в списке два раза. Отметим ее особо (рис. 35). Остальные точки пометим символом $\bullet$. Заметим, что при $x > 7$ будет $f(x) > 0$, и построим знаковый портрет функции в левой части. Следовательно, все решения неравенства $(\star)$ образуют множество $x \in (-\infty;\ 1] \bigcup \{3\} \bigcup [7;\ +\infty)$. ■

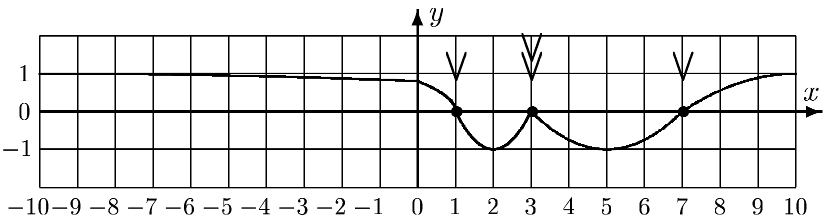


Рис. 35. Знаковый портрет функции
$f(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 10x + 21)$.

39. Решите неравенство
$(x-1)^2(x^3-8)(x-2)(x^2-5x+6)(x^2+x-6) \geqslant 0$.
♦ $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup \{1\} \bigcup \{2\} \bigcup [3;\ +\infty)$.

Решение. Левая часть определена на всей числовой оси, знаковый портрет функции в левой части показан на рис. 36. В точке $x = 2$ знак функции меняется 4 раза, что равносильно тому, что знак не меняется вовсе (но функция обращается в нуль). Ставить 4 символа перемены знака не обязательно, можно ограничиться двумя, так как любое четное число перемен знака равносильно двум переменам. Следовательно, все решения неравенства $(\star)$ образуют множество $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup \{1\} \bigcup \{2\} \bigcup [3;\ +\infty)$. ■

40. Решите неравенство

$$(\star)\quad \frac{(x^2-6x-7)(x-5)(x^2-5x-24)}{(x^2-6x+5)(x-1)} \geqslant 0.$$

♦ $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup [-1;\ 1) \bigcup (1;\ 5) \bigcup (5;\ 7] \bigcup [8;\ +\infty)$.

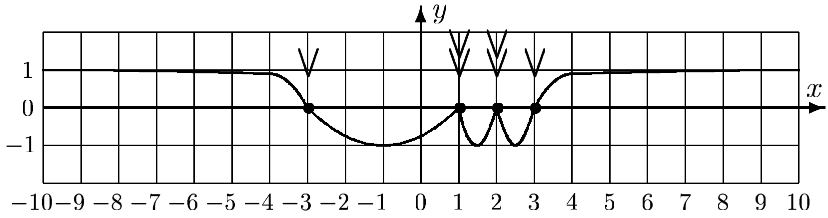


Рис. 36. Знаковый портрет функции
$f(x) = (x-1)^2(x^3-8)(x-2)(x^2-5x+6)(x^2+x-6)$.

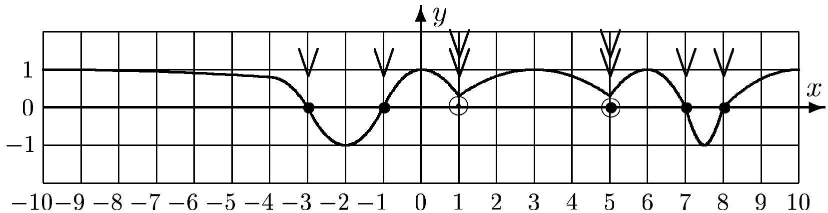


Рис. 37. Знаковый портрет функции
$$f(x) = \frac{(x^2-6x-7)(x-5)(x^2-5x-24)}{(x^2-6x+5)(x-1)}.$$

Решение. Прочитаем сначала знаменатель. Пометим белыми кружочками точки $x \in \{1;\ 5;\ 1\}$, причем точка $x = 1$ будет помечена два раза. Теперь читаем числитель и помечаем черными кружочками точки
$x \in \{-1;\ 7;\ 5;\ -3;\ 8\}$. Точка $x = 5$ помечена два раза, причем среди меток присутствует белый кружочек, так что функция в этой точке не определена (и меняет знак два раза). Пометим галочками все точки перемены знака и построим знаковый портрет левой части, рис. 37. Следовательно, все решения неравенства $(\star)$ образуют множество $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup [-1;\ 1) \bigcup (1;\ 5) \bigcup (5;\ 7] \bigcup [8;\ +\infty)$. ■

41. Решите неравенство
$$(\star)\quad \frac{(x^2-5x+6)(2+x-x^2)(x^2-6x-7)(x^2-12x+36)}{(x^2-3x-4)(x^2+4x+3)} \leqslant 0.$$
♦ $x \in (-\infty;\ -3) \bigcup \{2\} \bigcup [3;\ 4) \bigcup \{6\} \bigcup [7;\ +\infty)$.

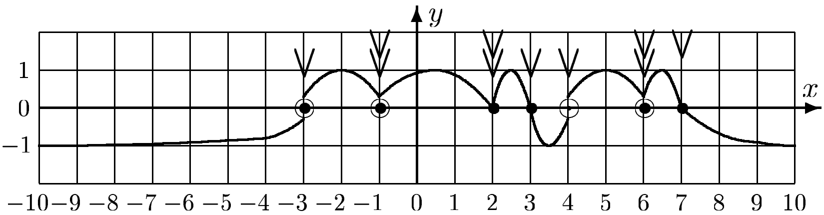


Рис. 38. Знаковый портрет функции
$$f(x) = \frac{(x^2-5x+6)(2+x-x^2)(x^2-6x-7)(x^2-12x+36)}{(x^2-3x-4)(x^2+4x+3)}.$$

Решение. Прочитаем сначала знаменатель. Пометим белыми кружочками точки $x \in \{-1;\ 4;\ -1;\ -3\}$, причем точка $x = -1$ будет помечена два раза. Теперь читаем числитель и помечаем черными кружочками точки $x \in \{2;\ 3;\ -1;\ 7;\ 6;\ 6;\ -1;\ 2\}$. В итоге, точка $x = -1$ помечена три раза, в этой точке не определена, В итоге, точка $x = 2$ помечена два раза, в этой точке $f(x)$ определена, В итоге, точка $x = 6$ помечена два раза, в этой точке $f(x)$ определена. Пометим галочками все точки перемены знака и построим знаковый портрет левой части, рис. 38. Все решения неравенства ($\star$) образуют множество $x \in (-\infty;\ -3) \bigcup \{2\} \bigcup [3;\ 4) \bigcup \{6\} \bigcup [7;\ +\infty)$. ■

42. Укажите область определения функции
$f(x) = \sqrt{(x+5)(15+2x-x^2)}$.
♦ $(-\infty;\ -5] \bigcup [-3;\ 5]$.
Решение. Задача эквивалентна решению неравенства
($\star$) $(x+5)(15+2x-x^2) \geqslant 0$. Точки перемены знака $x \in \{-5;\ -3;\ 5\}$, причем в каждой точке знак меняется ровно один раз. Возьмем пробную точку $x = 0$ и обнаружим, что в этой точке ($\star$) выполняется. Поэтому весь промежуток $[-3;\ 5]$, содержащий пробную точку, следует внести в ответ. Соседние промежутки, $(-5;\ -3)$ и $(5;\ +\infty)$, в ответ не входят, а промежуток $(-\infty;\ -5]$, расположенный "через один" промежуток от пробного, также входит в ответ (рис. 39). ■

43. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства
$\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)}{x} < 0$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ -1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ -3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ -5

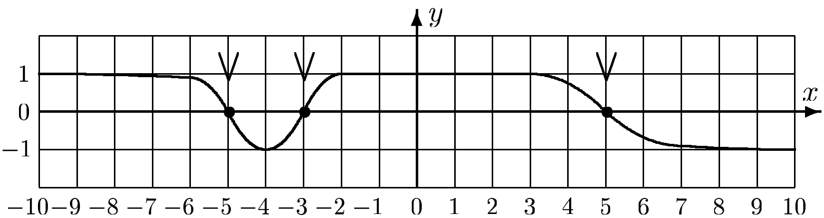


Рис. 39. Знаковый портрет функции
$f(x) = (x+5)(15+2x-x^2)$.

Ответ $\boxed{5}$♦ -5.

Решение. Левая часть не определена в точке $x = 0$, которую пометим белым кружочком. Знак функции в левой части меняется ровно один раз в точках $x \in \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2,\ 3,\ 4\}$. Все эти точки пометим символом $\bullet$. Заметим, что при $x > 4$ будет $f(x) > 0$, (рис. 40). Все решения неравенства ($\star$) образуют множество $x \in (-\infty;\ -4) \bigcup (-3;\ -2) \bigcup (-1;\ 0) \bigcup (1;\ 2) \bigcup (3;\ 4)$. Наибольшее целое число в этом множестве равно -5. ■

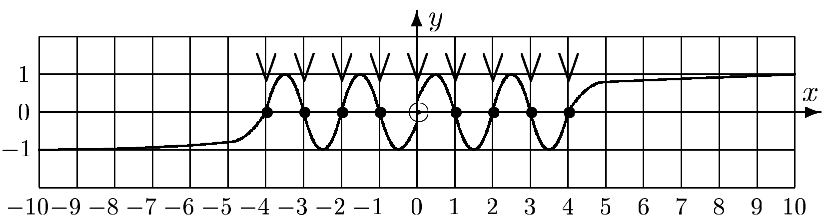


Рис. 40. Знаковый портрет $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)}{x}$.

44. Решите неравенство ($\star$) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-10x+21} \geqslant 0$.
♦ $x \in (-\infty;\ 1] \bigcup (7;\ +\infty)$.

Решение. Левая часть определена на всей числовой оси, из которой исключены точки $\{3;\ 7\}$. Построим знаковый портрет функции в левой части показан на рис. 41. Следовательно, все решения неравенства ($\star$) образуют множество $x \in (-\infty;\ 1] \bigcup (7;\ +\infty)$. ■

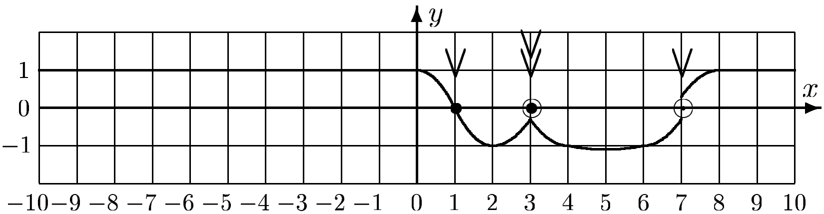


Рис. 41. Знаковый портрет функции $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-10x+21}$.

3.2.2. Линейные неравенства

Рассмотрим основные типы линейных неравенств, в которых приходится в процессе равносильных преобразований менять знак неравенства на противоположный. Использовать метод интервалов для решения нецелесообразно, задачи простые и требуют только точного применения правил равносильного преобразования неравенств.

45. Решите неравенство $(\star)$ $x \cdot \operatorname{tg} 3 > \sin 3$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-\cos 3;\ \sin 3)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (-\infty;\ \sin 3)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in (\cos 3;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (\sin 3;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty;\ \cos 3)$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x \in (-\infty;\ \cos 3)$.

Решение. Так как $\operatorname{tg} 3 < 0$, неравенство $(\star)$ равносильно $x < \cos 3$. ■

46. Сколько целых отрицательных чисел являются решениями неравенства $(\sqrt{6}-\sqrt{7}) \cdot x < (\sqrt{6}+\sqrt{7})$?
♦ 25.

Решение. Так как $\sqrt{6}-\sqrt{7} < 0$, то неравенство $(\star)$ равносильно $x > \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$. В правой части числитель и знаменатель умножим на $\sqrt{7}+\sqrt{6}$, получим $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{7}} = -(13+2\sqrt{42})$. Выполним оценку этого выражения (временно сняв знак "$-$"), $13+2\sqrt{42} = 13+\sqrt{168} \in \left(13+\sqrt{144};\ 13+\sqrt{169}\right) = (25;\ 26)$.
В число решений входят все отрицательные целые числа в пределах $-25 \cdots -1$. ■

47. Решите неравенство ($\star$) $(1-\sqrt{3})x > 1+\sqrt{3}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-2-\sqrt{3};\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-1+\sqrt{3};\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ -2-\sqrt{3})$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ -1-\sqrt{3})$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in (-\infty; -2-\sqrt{3})$.

Решение. Так как $1-\sqrt{3} < 0$, то ($\star$) равносильно ($\star\star$) $x < -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Осталось избавиться от иррациональности в знаменателе, для этого следует домножить числитель и знаменатель правой части ($\star\star$) на $\sqrt{3}+1$. ■

3.2.3. Квадратные неравенства

Теоретические сведения Рассмотрим только случай квадратного трехчлена, ветви которого направлены вверх, и рассмотрим неравенство типа "меньше". Остальные случаи рассматриваются аналогично, перечислять и запоминать ответы нецелесообразно.
(1) Если $a > 0 \bigcap b^2-4ac < 0$, то неравенства ($\star$) $ax^2+bx+c < 0$ и ($\star\star$) $ax^2+bx+c \leqslant 0$ решений не имеют.
(2) Если $a > 0 \bigcap b^2-4ac = 0$, то неравенство ($\star$) решений не имеет, а неравенство ($\star\star$) имеет единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$.
(3) Если $a > 0 \bigcap b^2-4ac > 0$, то все решения неравенства ($\star$) образуют промежуток $(x_1;\ x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения
($\star\star\star$) $ax^2+bx+c=0$. Все решения неравенства ($\star\star$) образуют промежуток $[x_1;\ x_2]$.

48. Множество всех решений неравенства $x^2-2x-3<0$ — промежуток, длина которого равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ 16 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 8

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $x \in (-1; 3)$.

Решение. Корни уравнения $x^2-2x-3=0$ равны $x_{1,2} = -1;\ 3$, решением является интервал между корнями. ■

3.2.4. Область определения иррациональной функции

49. Найдите область определения функции
$f(x) = \sqrt{-(x-1)(x-5)}$.
♦ $x \in [1;\ 5]$.

Решение. Задача эквивалентна решению неравенства
$-(x-1)(x-5) \geqslant 0$. В левой части находится квадратный трехчлен, причем ветви параболы направлены вниз, корни соответствующего квадратного уравнения равны $x_{1,2} = 1;\ 5$, в ответ входят все числа внутри промежутка между корнями, включая концы. ■

50. Найдите область определения функции
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x-5)}}$.
♦ $x \in (1;\ 5)$.
Решение. Задача эквивалентна решению неравенства
$-(x-1)(x-5) > 0$. В левой части находится квадратный трехчлен, ветви параболы направлены вниз, в ответ входят все числа внутри промежутка между корнями, не включая концы. ■

51. Найдите область определения функции
$f(x) = \sqrt{(x-5)(x-7)} \cdot \sqrt{-(x-3)(x-9)}$.
♦ $x \in [3;\ 5] \bigcup [7;\ 9]$.
Решение. Задача эквивалентна решению системы неравенств
$$\begin{cases} (x-5)(x-7) \geqslant 0, \\ -(x-3)(x-9) \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 5] \bigcup [7;\ +\infty), \\ x \in [3;\ 9]. \end{cases} \quad ■$$

52. Найдите область определения функции
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-5)} + \sqrt{(x-1)(9-x)}}.$$
♦ $x \in [3;\ 5] \bigcup [7;\ 9]$.
Решение. Задача эквивалентна решению системы неравенств
$$\begin{cases} (x-1)(x-5) \geqslant 0, \\ -(x-1)(x-9) \geqslant 0, \\ \sqrt{(x-1)(x-5)} + \sqrt{(x-1)(9-x)} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 1] \bigcup [5;\ +\infty), \\ x \in [1;\ 9], \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [5;\ 9]. \quad ■$$

53. Найдите область определения функции
$f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-5)(x-7)}}{\sqrt{-(x-3)(x-9)}}$.

♦ $x \in (3;\,5] \bigcup [7;\,9)$.

Решение. Задача эквивалентна решению системы неравенств
$\begin{cases} (x-5)(x-7) \geqslant 0, \\ -(x-3)(x-9) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\,5] \bigcup [7;\,+\infty), \\ x \in (3;\,9). \end{cases}$ ■

54. Найдите область определения функции
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-5)} - \sqrt{(x-1)(9-x)}}$.

♦ $x \in [3;\,5] \bigcup [7;\,9]$.

Решение. Задача эквивалентна решению системы неравенств
$$\begin{cases} (x-1)(x-5) \geqslant 0, \\ -(x-1)(x-9) \geqslant 0, \\ \sqrt{(x-1)(x-5)} - \sqrt{(x-1)(9-x)} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\,1] \bigcup [5;\,+\infty), \\ x \in [1;\,9], \\ (x-1)(x-5) \neq (x-1)(9-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\,1] \bigcup [5;\,+\infty), \\ x \in [1;\,9], \\ (x-1)(2x-14) \neq 0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow x \in [5;\,7) \bigcup (7;\,9]$. ■

3.2.5. Дробно-квадратные неравенства

55. Найдите все значения параметра p, при которых неравенство
$$(\star) \quad \frac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} \leqslant \frac{p}{3}$$
является верным для всех значений x.

♦ $p \in [14;\,+\infty)$.

Решение. Пусть функция $f(x)$ имеет наибольшее значение, т.е. найдется такое число A, что $f(x) \leqslant A$ для всех $x \in X$, где X – область определения функции $f(x)$, и найдется такое $x_0 \in X$, что $f(x_0) = A$. Пусть число A равно наибольшему значению функции $f(x)$. Тогда все значения параметра q, при которых неравенство $f(x) \leqslant q$ является верным для всех значений x, образуют множество $q \in [A;\,+\infty)$. Пусть $t = 4x^2 - 10x + 7$. Заметим, что

$t = (2x - 2{,}5)^2 + 0{,}75 \Subset \left[\dfrac{3}{4};\ +\infty\right)$. Тогда

$$\frac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} = \frac{8x^2 - 20x + 14 + 2}{4x^2 - 10x + 7} = \frac{2t + 2}{t} = 2 + \frac{2}{t}.$$

Так как на промежутке $t \in [\frac{3}{4};\ +\infty)$ функция $g(t) = 2 + \dfrac{2}{t}$ убывает, то $g(t) \Subset (0;\ \frac{14}{3}]$. Таким образом, $\dfrac{p}{3} \in \left[\dfrac{14}{3};\ +\infty\right)$, $p \in [14;\ +\infty)$. ■

3.2.6. Приводящиеся к квадратным

56. Решите неравенство $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$.

♦ $x \in (4;\ 9)$.

Решение. Выполним замену $\sqrt{x} = t \in [0;\ +\infty)$, получим неравенство $t^2 - 5t + 6 < 0$. Решение – промежуток $t \in (2;\ 3)$. Обратная замена дает $\sqrt{x} \in (2;\ 3)$, и ответ $x \in (4;\ 9)$. ■

57. Решите неравенство $x - \sqrt{x} - 6 < 0$.

♦ $[0;\ 9)$.

Решение 1. Выполним замену $\sqrt{x} = t \in [0;\ +\infty)$, получим $t^2 - t - 6 < 0$. Решение — промежуток $t \in (-2;\ 3)$. Обратная замена дает $\sqrt{x} \in (-2;\ 3)$, это неравенство равносильно $\sqrt{x} < 3$, и ответ $x \in [0;\ 9)$. ■

Решение 2 (другая форма записи).

$$x - \sqrt{x} - 6 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 6 < 0, \\ \sqrt{x} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-2;\ 3), \\ \sqrt{x} = t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in (-2;\ 3) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x \in [0;\ 9)$. ■

3.2.7. Биквадратные неравенства

58. Решите неравенство $x^4 - 29x^2 + 100 \leqslant 0$.

♦ $x \in [-5;\ -2] \bigcup [2;\ 5]$.

Решение. Выполним замену $x^2 = t$, получим $t^2 - 29t + 100 \leqslant 0$. Решение — промежуток $t \in [4;\ 25]$. Обратная замена дает $x^2 \in [4;\ 25]$, это неравенство равносильно системе квадратных неравенств, $\begin{cases} x^2 \geqslant 4, \\ x^2 \leqslant 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty), \\ x \in [-5;\ 5], \end{cases}$ решение предоставляем читателю. ■

Теоретические сведения (1) Если x принимает все значения из промежутка $X = [a;\ b]$, y принимает все значения из промежутка $Y = [c;\ d]$, то $x + y$ принимает все значения из промежутка $Z = [a + c;\ b + d]$.

(2) Если x принимает все значения из промежутка $X = [a;\ b]$, y принимает все значения из промежутка $Y = [c;\ d]$, то $-y$ принимает все значения из промежутка $Y_1 = [-d;\ -c]$, поэтому $x - y$ принимает все значения из промежутка $Z_1 = [a - d;\ b - c]$.

Аналогично можно сформулировать правила для случая интервалов и полуинтервалов, например,

(3) Если x принимает все значения из промежутка $X = (a;\ b]$, y принимает все значения из промежутка $Y = (c;\ d]$, то $x + y$ принимает все значения из промежутка $Z_2 = (a + c;\ b + d]$.

(4) Если x принимает все значения из промежутка $X = (a;\ b]$, y принимает все значения из промежутка $Y = (c;\ d]$, то $-y$ принимает все значения из промежутка $Y_3 = [-d;\ -c)$, поэтому $x - y$ принимает все значения из промежутка $Z_4 = (a - d;\ b - c)$.

Несложные доказательства предоставляем читателю.

Обратите внимание на то, что важно упомянуть о том, что указанные величины принимают все значения из указанных промежутков, иначе результат будет другим.

59. Числа x_1 и x_2 являются решениями неравенства $x^4 - 25x^2 + 144 < 0$. Какие значения может принимать величина $x_1 - x_2$?

♦ $x_1 - x_2 \Subset (-8;\ -6) \bigcup (-1;\ 1) \bigcup (6;\ 8)$.

Решение. Выполним замену $x^2 = t$, получим $t^2 - 25t + 144 < 0$. Решение — промежуток $t \in (9;\ 16)$. Обратная замена дает $x^2 \in (9;\ 16)$, так что

$(\star)$ $x \in (-4;\ -3) \bigcup (3;\ 4)$.

Пусть x_1 и x_2 — решения $(\star)$. Возможны следующие случаи взаимного расположения этих величин.

(1) $x_1 \in (-4;\ -3) \bigcap x_2 \in (-4;\ -3)$. Тогда $-x_2 \in (3;\ 4)$, поэтому $x_1 - x_2 \Subset (-1;\ 1)$.

(2) $x_1 \in (-4;\ -3) \bigcap x_2 \in (3;\ 4)$. Тогда $-x_2 \in (-4;\ -3)$, поэтому $x_1 - x_2 \Subset (-8;\ -6)$.

(3) $x_1 \in (3;\ 4) \bigcap x_2 \in (-4;\ -3)$. Тогда $-x_2 \in (3;\ 4)$, поэтому

$x_1 - x_2 \Subset (6;\ 8)$.
Обьединяя все три случая, получим ответ,
$x_1 - x_2 \Subset (-8;\ -6) \bigcup (-1;\ 1) \bigcup (6;\ 8)$. ■

60. Решите неравенство $x^4 - 21x^2 - 100 \leqslant 0$.
⧫ $x \in [-5;\ 5]$.
Решение. Выполним замену $x^2 = t$, получим $t^2 - 21t - 100 \leqslant 0$. Решение — промежуток $t \in [-4;\ 25]$. Обратная замена дает $x^2 \in [-4;\ 25]$. Это неравенство равносильно совокупности квадратных неравенств $\begin{cases} x^2 \geqslant -4, \\ x^2 \leqslant 25 \end{cases}$ (первое из них — тождественное), решение которой предоставляем читалелю. ■

61. Решите неравенство $x^4 - 32x^2 + 256 \leqslant 0$.
⧫ $x \in \{-4;\ 4\}$.
Решение. Выполним замену $x^2 = t$, получим $t^2 - 32t + 256 \leqslant 0$, $(t - 16)^2 \leqslant 0$, Решение — единственное число $t = 16$. Обратная замена дает $x^2 = 16$. ■

62. Решите неравенство $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.
⧫ $x \in (-\infty;\ -2) \bigcup (-1;\ 1) \bigcup (2;\ +\infty)$.
Решение. Выполним замену $x^2 = t$, получим $t^2 - 5t + 4 > 0$. Его решение — множество $t \in (-\infty;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty)$. Обратная замена дает $x^2 \in (-\infty;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty)$. Все решения неравенства $x^2 < 1$ образуют промежуток $x \in (-1;\ 1)$. Все решения неравенства $x^2 > 4$ образуют два промежутка, $x \in (-\infty;\ -2) \bigcup (2;\ +\infty)$. Ответ получается обьединением всех указанных промежутков. ■

63. Найдите все значения параметра p, при котором разность наименьшего и наибольшего решений неравенства
$(\star)$ $x^4 + 8p^2 \leqslant 6px^2$
больше 40.
⧫ $p \in (800(3 + 2\sqrt{2});\ +\infty)$.
Решение. При $p < 0$ неравенство $(\star)$ решений не имеет. При $p = 0$ единственное решение $x = 0$ условиям задачи не удовлетворяет. Рассмотрим поэтому только положительные значения p. Выделим полный квадрат в неравенстве $(\star)$, получим равносильное неравенство $(\star\star)$ $(x^2 - 3p)^2 \leqslant p^2$. При $p > 0$ неравенство $(\star\star)$ равносильно $-p \leqslant x^2 - 3p \leqslant p \Leftrightarrow 2p \leqslant x^2 \leqslant 4p$ $\Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{2p};\ \sqrt{4p}\right)$. Теперь используем условие задачи,

$(2-\sqrt{2})\sqrt{p} > 40 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\sqrt{p} > 20\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{p} > 20\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$
$\Leftrightarrow p > 800(3+2\sqrt{2})$. ■

3.2.8. Неравенства со сложной ОДЗ

Для решения неравенств, левая часть которых допускает разложение на множители, некоторые из которых имеют нетривиальную ОДЗ, можно использовать метод интервалов. В начале решения отмечаем все точки, не входящие в ОДЗ. Нужно иметь в виду, что по разные стороны от точек, где функция не определена, знаки функции могут быть различными.

64. Решите неравенство ($\star$) $\sqrt{\frac{x+3}{11-x}} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-10x+21} \geqslant 0$.

♦ $x \in [-3;\, 1] \bigcup (7;\, 11)$.

Решение. Левая часть определена на промежутке $x \in [-3;\, 11)$, из которой исключены точки $x = 3$ и $x = 7$. Знаковый портрет функции в левой части ($\star$) показан на рис. 42. Решение — обьединение двух промежутков. ■

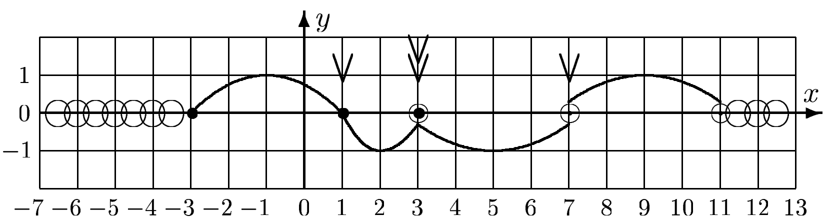


Рис. 42. Знаковый портрет функции $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{11-x}} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-10x+21}$.

65. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+3}{13-x}} \cdot \sqrt{\frac{x-6}{x-9}} \cdot \frac{(x^2-14x+33)(x^2-15x+36)}{x^2-8x+7} \geqslant 0.$$

♦ $x \in [-3;\, 1) \bigcup \{3\} \bigcup \{6\} \bigcup (9;\, 11] \bigcup [12;\, 13)$.

Решение. Левая часть определена на множестве $x \in [-3;\, 1) \bigcup (1;\, 6] \bigcup (9;\, 13)$. Знаковый портрет функции в левой части показан на рис. 43. При его построении необходимо

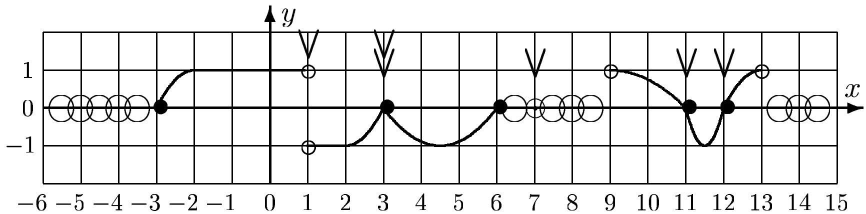


Рис. 43. Знаковый портрет функции
$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{13-x}} \cdot \sqrt{\frac{x-6}{x-9}} \cdot \frac{(x^2-14x+33)(x^2-15x+36)}{x^2-8x+7}$.

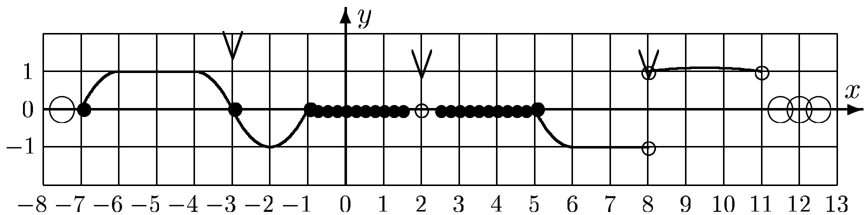


Рис. 44. Графическое решение неравенства
$\sqrt{\frac{x+7}{11-x}} \cdot \frac{x+3}{(2-x)(8-x)} \cdot \big(|x-5| - |x+1| + 2x - 4\big) \geqslant 0$.

учесть, что одна из точек перемены знака, $x = 7$, расположена в запретной зоне (вне ОДЗ). ■

66. Решите неравенство

$(\star)$ $\sqrt{\frac{x+7}{11-x}} \cdot \frac{x+3}{(2-x)(8-x)} \cdot \big(|x-5| - |x+1| + 2x - 4\big) \geqslant 0$.

⧫ $x \in [-7;\, -3] \bigcup [-1;\, 2) \bigcup (2;\, 5] \bigcup (8;\, 11)$.

Решение. Левая часть определена на множестве $x \in [-7;\, 2) \bigcup (2;\, 8) \bigcup (8;\, 11)$. Знаковый портрет функции в левой части $(\star)$ показан на рис. 44. При его построении необходимо учесть, что функция в левой части равна нулю на промежутке $[-1;\, 5]$. Весь этот промежуток включен в ответ. ■

3.3. Разложение на множители

67. Решите неравенство

$(\star)$ $(x^2+3x)(2x+3)\sqrt{3-x} - \dfrac{16(2x+3)\sqrt{3-x}}{x^2+3x} \geqslant 0$.

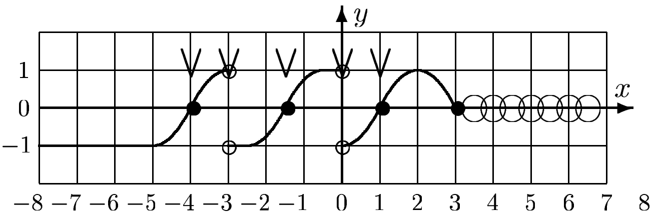


Рис. 45. Графическое решение неравенства
$$(x^2+3x)(2x+3)\sqrt{3-x}-\frac{16(2x+3)\sqrt{3-x}}{x^2+3x}\geqslant 0.$$

♦ $x\in[-4;\,-3)\bigcup[-1{,}5;\,0)\bigcup[1;\,3]$.

Решение. Найдем ОДЗ, $\begin{cases} x\neq 0,\\ x\neq -3,\\ x\leqslant 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty;\,-3)\bigcup(-3;\,0)\bigcup(0;\,3)$. Разложим левую часть на множители,

$(2x+3)\sqrt{3-x}\left((x^2+3x)-\dfrac{16}{x^2+3x}\right)\geqslant 0.$

Для построения знакового портрета решим сначала более простое неравенство

$(\star\star)\ \ x^2+3x-\dfrac{16}{x^2+3x}\geqslant 0.$

Приведем к общему знаменателю, $\dfrac{(x^2+3x)^2-16}{x^2+3x}\geqslant 0.$

Разложим на множители, $\dfrac{(x^2+3x-4)(x^2+3x+4)}{x^2+3x}\geqslant 0,$

и получим в ответе для $(\star\star)$ множество

$x\in(-\infty;\,-4]\bigcup(-3;\,0)\bigcup[1;\,+\infty)$.

Учтем ОДЗ, $\begin{cases} x\in(-\infty;\,-4]\bigcup(-3;\,0)\bigcup[1;\,+\infty),\\ x\in(-\infty;\,-3)\bigcup(-3;\,0)\bigcup(0;\,3),\end{cases}$ обратим внимание на наличие корня левой части $x=3$ (в данном случае не влияет на ответ), и учтем перемену знака левой части $(\star)$ в точке $x=-\frac{3}{2}$, рис. 45. ■

68. При всех значениях параметра $p\geqslant 0$ решите неравенство

$(\star)$ $p^3x^4+p^2x^2-x+\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\geqslant 0$.

$\blacklozenge$ Если $p=0$, то $x\in(-\infty;\ \frac{1}{2}]$.

Если $p\in(0;\ \frac{1}{2})$, то $x\in(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-2p}}{2p}]\bigcup[\frac{1+\sqrt{1-2p}}{2p};\ +\infty)$.

Если $p\geqslant\frac{1}{2}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Решение 1. Преобразуем $(\star)$ к виду

$(\star\star)$ $p\Big(px^2+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\geqslant x$.

Левая часть не меньше числа $\frac{1}{2}$, поэтому все $x\leqslant 0$ — решения. Так как $p\geqslant 0$, рассматриваем только значения $x>0$. Заметим, что если $px^2+\frac{1}{2}=x$, то левая и правая части $(\star\star)$ совпадают. Поэтому разложение левой части $(\star\star)$ на множители имеет вид $(px^2-x+\frac{1}{2})(p^2x^2+px+\frac{p}{2}+1)\geqslant 0$ (можно получить делением многочлена в левой части $(\star)$ на многочлен $px^2-x+\frac{1}{2}$). Выполним сравнение $(\ddagger\ddagger)$ $p^2x^2+px+\frac{p}{2}+1\bigvee 0$. Выделим полный квадрат в левой части, $(px+\frac{1}{2})^2+\frac{p}{2}+\frac{3}{4}\bigvee 0$. Следовательно, левая часть $(\ddagger\ddagger)$ не меньше числа $\frac{3}{4}$. Всегда $(px+\frac{1}{2})^2+\frac{p}{2}+\frac{3}{4}>0$. Решим неравенство $(\ddagger)$ $px^2+\frac{1}{2}\geqslant x$ при $p>0$. Дискриминант D квадратного уравнения $px^2-x+\frac{1}{2}=0$ равен $1-2p$. Если $D>0$, то все решения $(\ddagger)$ образуют два промежутка, $x\in(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-2p}}{2p}]\bigcup[\frac{1+\sqrt{1-2p}}{2p};\ +\infty)$. Если $D=0$, то в левой части $(\ddagger)$ стоит полоеый квадрат, поэтому неравенство — тождественное. Если $1-2p<0$, то неравенвтво $(\ddagger)$ также является тождественным. $\blacksquare$

Решение 2. Снова начнем с того, что преобразуем $(\star)$ к виду $(\star\star)$. При $p=0$ получим $x\leqslant\frac{1}{2}$. Рассмотрим только значения параметра $p>0$. Все $x<0$ — решения, поэтому рассмотрим только значения $x>0$. При этих условиях функция $f(x)=px^2+\frac{1}{2}$ возрастает (строго) на промежутке $x\in(0;\ +\infty)$. Запишем неравенство $(\star\star)$ в виде $(\star\star\star)$ $f(f(x))\geqslant x$. Заметим, что если $f(x)<x$, то $f(f(x))<f(x)<x$, так что равенство $(\star\star\star)$ невозможно. Поэтому любое решение $(\star\star\star)$ удовлетворяет условию $f(x)\geqslant x$. Аналогично убедимся в том, что любое решение неравенства $f(x)\geqslant x$ удовлетворяет также неравенству $f(f(x))\geqslant x$. Следовательно, $(\star\star\star)$ равносильно неравенству $f(x)\geqslant x$, т.е. $px^2+\frac{1}{2}\geqslant x$. Дальше решение проводится по уже рассмотренной схеме. Прежде чем заносить корни в ответ, убедитесь в том, что оба корня положительны

(этот метод требует монотонности функции $f(x)$, которая имеет место только при $x \geqslant 0$). ■

3.4. Метод замены переменных

69. Решите неравенство
$\frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{x}{x^2-5x+4} + \frac{6}{7} \geqslant 0.$
♦ $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup [-\frac{4}{3};\ 1] \bigcup \{2\} \bigcup (4;\ +\infty).$
Решение. Заметим, что $x = 0$ является решением и запишем равносильное на множестве $x \neq 0$ неравенство
$(\star)$ $\frac{1}{x+3+\frac{4}{x}} + \frac{1}{x-5+\frac{4}{x}} + \frac{6}{7} \geqslant 0.$
Выполним замену переменных $t = x + \frac{4}{x}$ и запишем $(\star)$ в виде $\frac{1}{t+3} + \frac{1}{t-5} + \frac{6}{7} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{6t^2+2t-104}{(t+3)(t-5)} \geqslant 0$. Решение не представляет проблем, $t \in (-\infty;\ -\frac{13}{3}] \bigcup (-3;\ 4] \bigcup (5;\ +\infty)$.
Выполним обратную замену и решим совокупность систем,
(1) $x + \frac{4}{x} \leqslant -\frac{13}{3}$, $x \in (-\infty;\ -3] \bigcup [-\frac{4}{3};\ 0)$;
(2) $x + \frac{4}{x} \in (-3;\ 4]$, $x \in \{2\}$;
(3) $x + \frac{4}{x} > 5$, $x \in (0;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty)$.
При формировании ответа учтем также и значение $x = 0$. ■

70. Решите неравенство $(\star)$ $\left(x + \frac{12}{x}\right)^2 - 15x - \frac{180}{x} + 56 \leqslant 0.$
♦ $x \in [2;\ 3] \bigcup [4;\ 6].$
Решение. Пусть $t = x + \frac{12}{x}$. Тогда $(\star)$ равносильно квадратному неравенству $t^2 - 15t + 56 \leqslant 0 \Leftrightarrow (t-7)(t-8) \leqslant 0 \Leftrightarrow t \in (7;\ 8)$.
Выполним обратную замену, $x + \frac{12}{x} \in (7;\ 8)$, $x \in [2;\ 3] \bigcup [4;\ 6]$. ■

71. Решите неравенство $(\star)$ $(x^2-4x+3)(x^2-16x+63)+35 \leqslant 0.$
♦ $x \in [2-d;\ 2] \bigcup [8;\ 8+d]$, где $d = \sqrt{11} - 3$.
Решение. Разложим $(\star)$ на множители,
$(x-1)(x-3)(x-7)(x-9) + 35 \leqslant 0,$
и перегруппируем слагаемые,
$(x-1)(x-9)(x-3)(x-7) + 35 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x^2-10x+9)(x^2-10x+21) + 35 \leqslant 0$. Выполним замену
$t = x^2 - 10x + 9 \Leftrightarrow t(t+12) + 35 \leqslant 0 \Leftrightarrow (t+5)(t+7) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow t \in [-7;\ -5]$. Выполним обратную замену,

$$x^2 - 10x + 9 \in [-7;\ -5] \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geqslant -7, \\ x^2 - 10x + 9 \leqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x^2-10x+16 \geqslant 0, \\ x^2-10x+14 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [5-\sqrt{11};\ 5+\sqrt{11}], \\ x \in \{(-\infty;\ 2] \bigcup [8;\ +\infty)\}, \end{cases}$ и запишем ответ в виде $x \in [5-\sqrt{11};\ 2] \bigcup [8;\ 5+\sqrt{11}]$. ■

72. Решите неравенство $x^2-12x+28 \leqslant \frac{56}{x^2-12x+27}$.

♦ $x \in [2;\ 3) \bigcup [5;\ 7] \bigcup (9;\ 10]$.

Решение. Выполним замену $x^2-12x+27=t$, и получим неравенство $t+1 \leqslant \frac{56}{t}$, множество всех решений которого $t \in (-\infty;\ -8] \bigcup (0;\ 7]$. Осталось решить совокупность квадратных неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2-12x+27 \in (-\infty;\ -8], \\ x^2-12x+27 \in (0;\ 7]. \end{array}\right.$ Эту несложную задачу предлагаем Вам решить самостоятельно. ■

73. Решите неравенство $x^2+16 \leqslant 10|x|$.

♦ $x \in [-8;\ -2] \bigcup [2;\ 8]$.

Решение. Пусть $t=|x|$, $t^2-10t+16 \leqslant 0$, $t \in [2;\ 8]$.
Выполним обратную замену, $|x| \in [2;\ 8]$, $x \in [-8;\ -2] \bigcup [2;\ 8]$. ■

74. Решите неравенство $(\star)$ $\frac{5-2|x+2|}{3-5|x+2|} \leqslant 2$.

♦ $x \in (-\infty; -13/5) \bigcup [-17/8; -15/8] \bigcup (-7/5; \infty)$.

Решение. Пусть $t=|x+2|$, тогда $(\star)$ равносильно $\frac{5-2t}{3-5t} \leqslant 2$,
$t \in (-\infty;\ \frac{1}{8}] \bigcup (\frac{3}{5};\ +\infty)$.
Выполним обратную замену, $|x+2| \in [0;\ \frac{1}{8}] \bigcup (\frac{3}{5};\ +\infty)$,
$x \in [-2-\frac{1}{8};\ -2+\frac{1}{8}] \bigcup (-2+\frac{3}{5};\ +\infty) \bigcup (-\infty; -2-\frac{3}{5})$. ■

3.5. Неравенства с особыми точками

К числу наиболее коварных относятся неравенства, в которых одним из сомножителей является квадратный корень из некоторой функции (чаще всего, это квадратный трехчлен). Разумеется, этот сомножитель вносит вклад в ОДЗ. Но кроме того, именно этот сомножитель может дать в качестве ответа изолированные точки, в которых он обращается в нуль.

Для решения неравенства вида $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$ следует использовать равносильное преобразование $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

75. Решите неравенство ($\star$) $(x^2+8x+15)\sqrt{x+4}\geqslant 0$.
♦ $x\in\{-4\}\bigcup[-3;+\infty)$.
Решение. Неравенство ($\star$) равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+4}\geqslant 0,\\ x^2+8x+15\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+4}\leqslant 0,\\ x^2+8x+15\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$ Система $\begin{cases}\sqrt{x+4}\leqslant 0,\\ x^2+8x+15\leqslant 0\end{cases}$ равносильна $\begin{cases}x\in\{-4\},\\ x\in[-5;\ -3]\end{cases}$ и имеет единственное решение $x=-4$.
Система $\begin{cases}\sqrt{x+4}\geqslant 0,\\ x^2+8x+15\geqslant 0\end{cases}$ равносильна $\begin{cases}x\in[-4;\ +\infty),\\ x\in(-\infty;\ -5]\bigcup[-3;\ +\infty),\end{cases}$ множество решений совпадает с промежутком $x\in[-3;\ +\infty)$. ■

76. Решите неравенство ($\star$) $(x^2-4x-5)\sqrt{-x^2-2x+8}\leqslant 0$.
♦ $x\in[-1;2]\bigcup\{-4\}$.
Решение. Неравенство ($\star$) равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{-x^2-2x+8}\leqslant 0,\\ x^2-4x-5\leqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{-x^2-2x+8}\geqslant 0,\\ x^2-4x-5\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$ Система $\begin{cases}\sqrt{-x^2-2x+8}\leqslant 0,\\ x^2-4x-5\leqslant 0\end{cases}$ равносильна $\begin{cases}x\in\{-4;\ 2\},\\ x\in[-5;\ 1]\end{cases}$ и имеет единственное решение $x=-4$.
Система $\begin{cases}\sqrt{-x^2-2x+8}\geqslant 0,\\ x^2-4x-5\geqslant 0\end{cases}$ равносильна $\begin{cases}x\in[-4;\ 2],\\ x\in(-\infty;\ -1]\bigcup[5;\ +\infty),\end{cases}$ множество решений совпадает с промежутком $x\in[-1;\ 2]$. ■

77. Решите неравенство ($\star$) $\left|x^2+x-6\right|\leqslant 2-x$.
♦ $x\in[-4;\ -2]\bigcup\{2\}$.
Решение 1. Чтобы не писать громоздкую совокупность систем, рассмотрим два случая, затем обьединим результаты.
(1) $\begin{cases}x^2+x-6\leqslant 2-x,\\ x^2+x-6\geqslant 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x\in[-4;\ 2],\\ x\in(-\infty;\ -3]\bigcup[2;\ +\infty),\end{cases}$

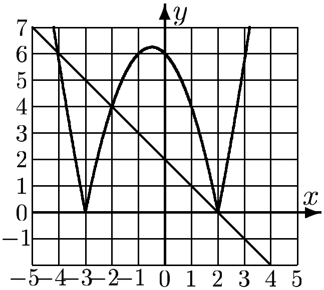


Рис. 46. Графики функций $f(x) = \left|x^2 + x - 6\right|$ и $g(x) = 2 - x$.

$x \in [-4;\ -3] \bigcup \{2\}$.

(2) $\begin{cases} -(x^2 + x - 6) \leqslant 2 - x, \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty), \\ x \in [-3;\ 2], \end{cases}$

$x \in [-3;\ -2] \bigcup \{2\}$. ■

Решение 2. Нарисуем графики левой и правой частей неравенства ($\star$), рис. 49. Корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 6$ равны $\{-3;\ 2\}$, и один из них совпадает с корнем линейной функции $2 - x$. Поэтому неравенство ($\star$) имеет изолированное решение $x = 2$. Границы промежутка, все точки которого являются решениями, можно найти из квадратных уравнений ($\star\star$) $x^2 + x - 6 = 2 - x$ (взять меньший корень) и ($\star\star\star$) $-x^2 - x + 6 = 2 - x$ (также меньший корень). Большие корни двух квадратных уравнений ($\star\star$) и ($\star\star\star$) равны 2. ■

3.6. Неравенства с модулем

Существует несколько основных способов решения задач с модулем, **(1)** раскрытие модуля, **(2)** использование определения модуля, **(3)** графический метод.

78. Решите неравенство ($\star$) $|4x - 3| \leqslant 6$.

♦ $x \in [-0{,}75;\ 2{,}25]$.

Решение. Лучший способ состоит в последовательном исключении модулей в порядке следования снаружи внутрь,
($\star$) $\Leftrightarrow -6 \leqslant 4x - 3 \leqslant 6 \Leftrightarrow -6 + 3 \leqslant 4x \leqslant 6 + 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4}$. ■

79. Решите систему неравенств $\begin{cases} |x - 1| \geqslant 5, \\ |x - 4| \leqslant 8. \end{cases}$

♦ $x \in \{-4\} \bigcup [6;\ 12]$.

Решение. Система $\begin{cases} |x-1| \geqslant 5, \\ |x-4| \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-1 \leqslant -5, \\ x-1 \geqslant 5, \end{array}\right. \\ -8 \leqslant x-4 \leqslant 8 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -4] \bigcup [6;\ +\infty), \\ x \in [-4;\ 12] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4\} \bigcup [6;\ 12]$. Обратите внимание на особую точку в ответе. ■

80. Решите неравенство $\left|\frac{4x+3}{2x+3}\right| \leqslant 1$.

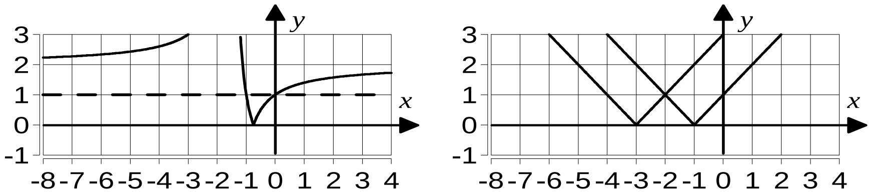
♦ $x \in [-1;\ 0]$.

Решение 1. Используем определение модуля,
$(\star)\ \ -1 \leqslant \frac{4x+3}{2x+3} \leqslant 1$.

Запишем $(\star)$ в виде к системы неравенств $\begin{cases} \dfrac{6x+6}{2x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{2x}{2x+3} \leqslant 0. \end{cases}$
Решим каждое из неравенств методом интервалов, $\begin{cases} x \in (-\infty,\ -\frac{3}{2}) \bigcup [-1;\ +\infty), \\ x \in (-\frac{3}{2};\ 0]. \end{cases}$ Пересечение промежутков дает ответ, $x \in [-1;\ 0]$. ■

Решение 2. Раскроем модуль, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{4x+3}{2x+3}, \\ \dfrac{4x+3}{2x+3} \leqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{4x+3}{2x+3} \leqslant 0, \\ -\dfrac{4x+3}{2x+3} \leqslant 1. \end{cases} \end{array}\right.$ Получилась более громоздкая совокупность систем. Дальше ход решения повторяется. ■

Решение 3. Нарисуем графики функций $f(x) = \left|\frac{4x+3}{2x+3}\right|$ и $g(x) = 1$ (рис. 47а). Сразу можно определить, что ответ к неравенству $f(x) \leqslant g(x)$ имеет вид $x \in [a;\ b]$, причем величины a и b можно найти из уравнения $\left|\frac{4x+3}{2x+3}\right| = 1$. Решить уравнение с модулем



$f(x) = \left|\frac{4x+3}{2x+3}\right|$ $f(x) = |x+1|$, $g(x) = |x+3|$.

Рис. 47. Графическое решение задач с модулем

значительно проще, чем неравенство,

$$\frac{4x+3}{2x+3} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{6x+6}{2x+3} = 0, \\ \dfrac{2x}{2x+3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1;\, 0\}. \blacksquare$$

81. Решите неравенство $\left|x^2 - x - 3\right| \leqslant 9$.

♦ $x \in [-3;\, 4]$.

Решение. Используем определение модуля, $-9 \leqslant x^2 - x - 3 \leqslant 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 6 \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\, +\infty, \\ x \in [-3;\, 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3;\, 4]. \blacksquare$$

82. Решите неравенство $|x+1| > |x+3|$.

♦ $x \in (-\infty;\, -2)$.

Решение. Используем графический метод, рис. 47b. Ответ имеет вид $x \in (-\infty;\, a)$, причем a — корень уравнения $|x+1| = |x+3|$. Найдите его самостоятельно. $\blacksquare$

83. Решите неравенство ($\star$) $|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| \leqslant 7$.

♦ $x \in [0;\, 9]$.

Решение. Выполним замену $x - 2\sqrt{x} + 2 = t$. Тогда неравенство ($\star$) примет вид $|3 - t| + |t| \leqslant 7$. Любым из рассмотренных ранее методов получим решение, $t \in [-2;\, 5]$. Выполним обратную замену, $x - 2\sqrt{x} + 2 \in [-2;\, 5] \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \in [-3;\, 4]$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \in [-3;\, 4] \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant \sqrt{x} - 1 \leqslant 2$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in [0;\, 9]$. $\blacksquare$

84. Пусть x_1 и x_2 — два решения неравенства
($\star$) $\left|x^2 - 5x + 2\right| < 2$.
Какие значения может принимать величина $x_2 - x_1$?

⧫ Величина $x_2 - x_2$ принимает целочисленые значения ± 4.
Решение. Неравенство $(\star)$ равносильно системе неравенств

$$-2 < x^2 - 5x + 2 < 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (0;\ 5), \\ x \in (-\infty;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow (\star\star)\ \ x \in (0;\ 1) \bigcup (4;\ 5).$$

Пусть x_1 и x_2 — решения $(\star\star)$. Рассмотрим все возможные случаи взаимного расположения этих величин.
(1) $x_1 \in (0;\ 1) \bigcap x_2 \in (0;\ 1)$. Так как требуется дать оценку разности двух величин, предварительно запишем множество значений для той из них, которая присутствует со знаком минус. Записать это можно так, $\begin{cases} x_2 \in (0;\ 1), \\ -x_1 \in (-1;\ 0). \end{cases}$ Теперь можно сложить по отдельности левые и правые границы промежутков, $x_2 - x_1 \Subset (-1;\ 1)$.
(2) $x_1 \in (0;\ 1) \bigcap x_2 \in (4;\ 5)$. Тогда $-x_1 \in (-1;\ 0)$, $x_2 - x_1 \Subset (3;\ 5)$.
(3) $x_1 \in (4;\ 5) \bigcap x_2 \in (0;\ 1)$. Тогда $-x_1 \in (-5;\ -4)$, $x_2 - x_1 \Subset (-5;\ -3)$.
Обьединяя все случаи, получим
$x_2 - x_1 \Subset (-5;\ -3) \bigcup (-1;\ 1) \bigcup (3;\ 5)$. ■

3.7. Задачи для самостоятельного решения

3.7.1. Алгебраические неравенства, 1

85. Решите неравенство $\frac{(2-x)(x^2+2x+1)}{(x^2+x+1)^3} > 0$.

86. Решите неравенство $\frac{(x^2-5x+6)(x^2-4x+3)(x^2-4)}{(x^2-6x+5)} \leqslant 0$.

87. Решите неравенство $x^2 - 6x + 5 \geqslant |2x - 7|$.

88. Наибольшее целое число из множества решений неравенства $\frac{x^2-7x+12}{(x^2-13x+42)\sqrt{5-x}} > 0$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

89. Решите неравенство $(x^2 - 4x - 5)\sqrt{-x^2 - 2x + 8} \leqslant 0$.

90. Сумма длин всех промежутков, на которых $x^4 - 74x^2 + 1225 \leqslant 0$, равна
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

3.7.2. Алгебраические неравенства, 2

91. Решите неравенство $\frac{1}{5-3x} \geqslant \frac{1}{2x+1}$.

92. Наименьшим целочисленным решением неравенства $\left(\sqrt{\frac{5}{24}} + \sqrt{\frac{7}{24}} - 1\right)(4x - 13) < 0$ является число
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

93. Решите неравенство $\frac{(x^2+2x+1)(x-3)(x+2)}{x^2+2x-3} > 0$.

94. Решите неравенство $\frac{x^3(x+7)(10x-2)(x-6)^8(x^2+1)}{(3x+10)(x+2)^2(3-x)(-x^2+x-4)} \geqslant 0$.

95. Решите неравенство $\frac{x^2-3x+2}{9-8x-x^2} \geqslant -1$.

96. Наибольшее целое число из множества решений неравенства $\frac{x^2-9x+20}{(x^2+6x+5)\sqrt{6-x}} > 0$ равно
$\boxed{1}$ 6 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

97. Решите неравенство $(x^2 - x - 6)\sqrt{-x^2 - 2x + 3} \leqslant 0$.

98. При всех значениях параметра $p \geqslant 0$ решите неравенство $p^3x^4 + 8p^2x^2 - 64x + 16p + 64 \geqslant 0$.

99. Если x_1 и x_2 — два решения неравенства $x^4 - 41x^2 + 400 < 0$, то величина $x_2 - x_1$ может быть равной
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ 7 $\boxed{5}$ 9

Ответы

85. ♦ $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$. **86.** **87.** ♦ $(-\infty; 2 - \sqrt{6}) \cup (6; +\infty)$. **88.** $\boxed{2}$ **89.** ♦ $x \in [-1; 2] \cup \{-4\}$. **90.** $\boxed{4}$ **91.** ♦ $x \in (-\infty; -1/2) \cup (4/5; 5/3)$. **92.** $\boxed{3}$ **93.** ♦ $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$. **94.** ♦ $x \in (-\infty; -7] \cup (-10/3; 0] \cup (-2; 0] \cup \{6\}$. **95.** ♦ $x \in (-9; -1) \cup (1; +\infty)$. **96.** $\boxed{3}$ **97.** ♦ $x \in [-2; 1] \cup \{-3\}$. **98.** ♦ Если $p = 0$, то $x \in (-\infty; 1]$. Если $p \in (0; 1)$, то

$x \in (-\infty;\ \frac{2-2\sqrt{1-p}}{p}] \cup [\frac{2+2\sqrt{1-p}}{p};\ +\infty)$. Если $p \geqslant 1$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

99. $\boxed{5}$