Тема 4. Системы

4.1. Линейные системы

4.1.1. Система двух уравнений с двумя неизвестными

Теоретические сведения

(1) Система уравнений

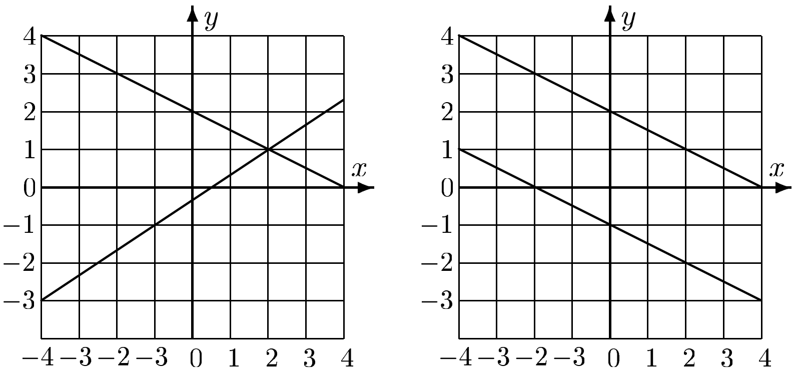
$$(\star)\quad \begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q \end{cases}$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$. Величина $ad - bc$ называется определителем системы $(\star)$. В этой главе величину $ad - bc$ будем обозначать $\triangle$. Итак, если $\triangle \neq 0$, то система $(\star)$ имеет единственное решение, и наоборот. В случае $\triangle \neq 0$ каждое из уравнений системы $(\star)$ определяет на плоскости (x, y) прямую, причем эти две прямые не параллельны и не совпадают, поэтому имеют единственную общую точку. Единственное решение системы $(\star)$ можно рассматривать как точку на плоскости (x, y).

(2) Если $\triangle = 0$, то система $(\star)$ или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений. Для различения этих двух случаев целесообразно найти те значения параметров, при которых $\triangle = 0$, и решить систему для этих значений парметров.

100. Решите систему уравнений $\begin{cases} ax + by = f, \\ cx + dy = g \end{cases}$ при условии $ad - bc \neq 0$. ♦ $x = \dfrac{fd - gb}{ad - bc}$, $y = \dfrac{ga - fc}{ad - bc}$.

Другая форма ответа: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$, где по определению $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$. Эти формулы называются формулами Крамера. Еще раз подчеркнем, что они справедливы только при $\triangle \neq 0$.



(a) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 4y = -4 \end{cases}$

Рис. 48. Графическое решение линейной системы

4.1.2. Графический метод

101. Решите систему $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$

♦ $x = 2$, $y = 1$.

Решение. Все точки на плоскости (x, y), для которых $x + 2y = 4$, образуют прямую с угловым коэффициентом $k_1 = -1/2$, проходящую через точку (0; 2) (рис. 48а). Аналогично все точки, для которых $2x - 3y = 1$, образуют прямую с угловым коэффициентом $k_2 = 2/3$, проходящую (например) через точку (−1; −1). Эти две прямые не параллельны. Графики двух прямых на рис. 48а позволяют грубо оценить положение их общей точки. Ясно, например, что эта точка расположена в первой четверти. Однако, найти решение по графику удается не всегда. В данном случае заметим, например, что при $x = 0$ имеем $y_1 = 2$, $y_2 = -1/3$. Таким образом, $y_1 - y_2 = 7/3$. Так как $k_1 - k_2 = -7/6$, то при увеличении x на 1 значение величины $y_1 - y_2$ уменьшается на 7/6. Чтобы довести значение $y_1 - y_2$ до нуля, нужно увеличить x на 2. Таким образом, $x = 2$. Подобные соображения весьма полезны в самых разнообразныхз ситуациях. ■

102. Решите систему $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 4y = -4. \end{cases}$

♦ Нет решений.

Решение. Аналогично получим рис. 48b. Так как угловые коэффициенты прямых равны, то они параллельны. Легко убедиться в том, что прямые не совпадают и общих точек поэтому не имеют. Система не имеет решениий. ■

103. Решите систему ($\star$) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ \pi x + 2\pi y = 4\pi. \end{cases}$

♦ Бесконечное множество решений, $x \in (-\infty; +\infty)$, $y = 2 - \frac{x}{2}$.

Решение. Угловые коэффициенты прямых $x + 2y = 4$ и $\pi x + 2\pi y = 4\pi$ равны. В отличие от предыдущего случая, прямые совпадают (например, потому что имеют равные угловые коэффициенты и по крайней мере одну общую точку). Такие прямые в школе не называются параллельными. В качестве рисунка к этой задаче следует представить только одну верхнюю прямую на рис. 48b. Так как каждая точка этой прямой удовлетворяет каждому их уравнений ($\star$), то система имеет бесконечно много решений. ■

4.1.3. Метод алгебраических преобразований

Теоретические сведения

Чтобы решить систему $\begin{cases} ax + by = f, \\ cx + dy = g \end{cases}$ при условии $ad - bc \neq 0$, нужно

(1) умножить первое уравнение на d, второе на b, $\begin{cases} adx + bdy = fd, \\ bcx + bdy = gb, \end{cases}$ и вычесть их одно из другого,

$(ad - bc)x = fd - gb \Rightarrow x = \frac{fd-gb}{ad-bc}$,

(2) умножить первое уравнение на c, второе на a, $\begin{cases} acx + bcy = fc, \\ acx + ady = ga, \end{cases}$ и вычесть их одно из другого,

$(ad - bc)y = -fc + ga \Rightarrow y = \frac{-fc+ga}{ad-bc}$.

104. Решите систему $\begin{cases} 6x - 11y = 9, \\ 7x - 13y = 10. \end{cases}$

♦ $x = 7$, $y = 3$.

Решение. Умножим первое уравнение на 7, второе на 6, получим равносильную систему $\begin{cases} 42x - 77y = 63, \\ 42x - 78y = 60. \end{cases}$ Теперь вычтем второе уравнение из первого, получим $y = 3$. Умножим первое уравнение на 13, второе на 11, получим равносильную систему $\begin{cases} 78x - 143y = 117, \\ 77x - 143y = 110. \end{cases}$ Вычтем второе уравнение из первого, и в результате узнаем значение $x = 7$. ■

105. Известно, что $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 3y = 3. \end{cases}$ Найдите значение выражения $x - y$.

♦ -2

Решение. Вычтем второе уравнение из первого, $-2x + 2y = 4$, поэтому $x - y = -2$. ■

106. Известно, что $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}3y = 2{,}7, \\ 13x + 17y = -67. \end{cases}$ Найдите значение величины $x + y$.

♦ -2.

Решение Умножим первое уравнение на 10, $\begin{cases} 7x + 3y = 27, \\ 13x + 17y = -67. \end{cases}$ Сложим первое уравнение со вторым, $20x + 20y = -40$. Поделим на 20 и найдем $x + y = -2$. ■

107. Известно, что $y = -\dfrac{3{,}14}{6{,}86} \cdot x + \dfrac{3{,}14}{6{,}86}$ и одновременно $y = -\dfrac{6{,}86}{3{,}14} \cdot x + \dfrac{16{,}86}{3{,}14}$. Найдите значение выражения $x + y$.

♦ 2.

Решение. Избавимся от знаменателя в каждом уравнении, $\begin{cases} 6{,}86y = -3{,}14x + 3{,}14, \\ 3{,}14y = -6{,}86x + 16{,}86. \end{cases}$ Сложим уравнения, $10x = -10y + 20$, $x + y = 2$. ■

108. Найдите значение величины $x + y$, если $(x; y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ 15x + 11y = 29. \end{cases}$

♦ 3.

Решение. Запишем систему в виде $\begin{cases} ax+by=p, \\ cx+dy=q. \end{cases}$ Заметим, что $a-b=-1$, $c-d=4$, поэтому при сложении уравнений величина $x+y$ не получится. Однако если умножить первое уравнение на 4, то после этого для новой системы $\tilde{a}-\tilde{b}=-4$, и сложение немедленно дает ответ, $\begin{cases} 8x+12y=40, \\ 15x+11y=29 \end{cases} \Rightarrow 23(x+y)=69.$ ■

4.1.4. Системы линейных уравнений с параметром

109. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} bx+4y=b+3, \\ x+2y=3 \end{cases}$ не имеет решений.

♦ $b=2$.

Решение. Найдем $\triangle=2b-4$. Если $\triangle\neq 0$, то система имеет единственное решение. Поэтому рассмотрим систему только при $2b-4=0 \Leftrightarrow b=2$. Система $\begin{cases} 2x+4y=5, \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=5, \\ 2x+4y=6 \end{cases}$ решений не имеет, уравнения состемы несовместны. ■

110. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} bx+2y=3, \\ 18x+by=b+3 \end{cases}$ не имеет решений.

♦ $b=-6$.

Решение. Найдем $\triangle=b^2-36=0$, $\triangle=0 \Leftrightarrow b=\pm 6$.

(1) Если $b=6$, то система имеет вид $\begin{cases} 6x+2y=3, \\ 18x+6y=9 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 18x+6y=9, \\ 18x+6y=9 \end{cases}$ и имеет бесконечное множество решений.

(2) Если $b=-6$, то система имеет вид $\begin{cases} -6x+2y=3, \\ 18x-6y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 18x-6y=-9, \\ 18x-6y=-3 \end{cases}$ и решений не имеет. ■

111. Найдите все значения параметра m, при которых система $(\star)$ $\begin{cases} mx-2my=2-m, \\ 3x+my=2+m \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

♦ $m = -6$.

Решение. Найдем $\triangle = m^2 + 6m$. Заметим, что
$\triangle = 0 \Leftrightarrow m \in \{-6;\, 0\}$.

(1) Если $m = 0$, то $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2, \\ 3x = 2 \end{cases}$ и решений не имеет.

(2) Если $m = -6$, то $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 12y = 8, \\ 3x - 6y = -4 \end{cases}$ и имеет бесконечно много решений. ■

112. Найдите все значения параметра m, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x + (m+1)y = 3, \\ (m-1)x + 5y = m - 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

♦ $m = \pm 4$.

Решение. Найдем определитель системы,
$\triangle = 3 \cdot 5 - (m+1)(m-1)$. Условие равенства определителя приводит к уравнению $15 - m^2 + 1 = 0$, корни которого $m \in \{-4;\, 4\}$. Рассмотрим оба случая отдельно.

(1) $m = 4$, $\begin{cases} 3x + (m+1)y = 3, \\ (m-1)x + 5y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 3, \\ 3x + 5y = 3, \end{cases}$ решений бесконечно много.

(2) $m = -4$, $\begin{cases} 3x + (m+1)y = 3, \\ (m-1)x + 5y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 3, \\ -5x + 5y = -5, \end{cases}$ решений нет. ■

113. Укажите все значения параметра φ, при которых система уравнений $\begin{cases} x\cos\varphi - y\sin\varphi = \sin^2\varphi, \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi = \cos^2\varphi \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $\varphi \in (-\infty;\, +\infty)$.

Решение. Для этой системы $\triangle = 1$, поэтому для любого значения φ система имеет единственое решение. ■

114. Укажите все значения параметра φ, при которых система
$(\star)\quad \begin{cases} x - y\sin\varphi = \sin\varphi + \cos\varphi, \\ 2x\cos\varphi + y\sin 2\varphi = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi - 1 \end{cases}$
имеет бесконечное множество решений.

♦ $\varphi = \pi/2 + \pi n$.

Решение. Для системы $(\star)$ найдем $\triangle = 2\sin 2\varphi$, следует проверить значения $\varphi = \pi n/2$ и убедиться,что при $\varphi = \pi/2 + \pi n$ система $(\star)$ имеет бесконечное множество решений, а при $\varphi = \pi n$ система $(\star)$ решений не имеет. ■

115. Решите систему $\begin{cases}(m+1)x + my = 4m+1,\\(m-3)x + (3m-4)y = m-6.\end{cases}$

♦ Если $\begin{cases}m \neq 1,\\m \neq -2,\end{cases}$ то $x = \dfrac{11m+4}{2(m+2)}$, $y = -\dfrac{3(m-1)}{2(m+2)}$. Если $m = 1$, то $y = 5 - 2x$, где x — любое число. Если $m = -2$, то система не имеет решений.

Решение. Найдем
$\triangle = (m+1)(3m-4) - m(m-3) = 2m^2 + 2m - 4$.
Эта величина равна нулю для двух значений параметра $m \in \{-2;\, 1\}$. Эти значения рассмотрим отдельно.

(1) Если $m = -2$, то система примет вид $\begin{cases}-x - 2y = -7,\\-5x - 10y = -8,\end{cases}$ решений нет, так как уравнения не пропорциональны. В этом можно убедиться, умножив первое уравнение на 5 и сравнив со вторым.

(2) Если $m = 1$, то система примет вид $\begin{cases}2x + y = 5,\\-2x - y = -5,\end{cases}$ второе уравнение — следствие первого, бесконечное множество решений.

(3) Если $\begin{cases}m \neq -2,\\m \neq 1,\end{cases}$ то систему несложно решить методом исключения, или использовать формулы Крамера. ■

4.1.5. Системы со сложным параметром

116. При каких значениях параметра p система уравнений$(\star)$ $\begin{cases}3^{2x+\log_3 p} + \log_2\left(y^{-5}\right) = 4p+1,\\3^{2x} + \log_2\left(y^{p-6}\right) = 2p+3\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

♦ $p = 1$.

Решение. Выполним замену $u = 3^{2x}$, $v = \log_2 y$,

$(\star\star)$ $\begin{cases}pu - 5v = 4p+1,\\u + (p-6)v = 2p+3,\end{cases}$ и вычислим $\triangle = p^2 - 6p + 5$. Осталось исследовать $p \in \{1;\, 5\}$.

(1) $p = 1$, $(\star\star) \Leftrightarrow \begin{cases} u - 5v = 5, \\ u - 5v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow u - 5v = 5$. На плоскости (u, v) это прямая линия. Осталось проверить, что на ней найдется бесконечно много точек, для которых $u > 0$. Сделайте это самостоятельно, например, нарисовав эту прямую. Решение обязательно должно содержать доказательство этого утверждения.

(2) При $p = 1$ решений нет, проверьте это самостоятельно. ■

117. При каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases} 6x + 3^p \cdot y = p + 3, \\ 2^p \cdot x + 36y = p + 5 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

♦ $p = 3$.

Решение. Как всегда, начнем с вычисления $\triangle = 6^3 - 6^p$, решим уравнение $6^3 - 6^p = 0 \Leftrightarrow 6^3 = 6^p \Leftrightarrow 3 = p$, исследуем $p = 3$ и убедимся в наличии бесконечного количества решений. ■

118. Укажите наименьшее положительное значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x \cdot \operatorname{ctg} p + y = 2\sqrt{3}, \\ x \cdot (1 + 2\sin^2 p) + y \cdot \sin(2p) = 3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

♦ $p = \pi/6$.

Решение. На этот раз $\triangle = \sin 2p \operatorname{ctg} p - 1 - 2\sin^2 p$, для бесконечного множества решений необходимо $\triangle = 0$, откуда следует $\cos 2p = 1/2$, $p = \pi m \pm \pi/6$. Проверка показывает, что наименьшее положительное значение, $p = \pi/6$, приводит к системе, имеющей бесконечное множество решений. ■

4.1.6. Системы с несколькими параметрами

119. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x - 2y = b, \\ bx - 4y = a^2 - 3a \end{cases}$ имеет по крайней мере одно решение для любых значений параметра b.

♦ $a \in \{-1; 4\}$.

Решение. Для этой системы $\triangle = -4 + 2b$, поэтому при $b \neq 2$ будет $\triangle \neq 0$, система имеет ровно одно решение и требуемое имеет место. Если $b = 2$, то система имеет вид

$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 2x - 4y = a^2 - 3a, \end{cases}$ и имеет бесконечно много решений при $a^2 - 3a = 4$. Если же $a^2 - 3a \neq 4$, то решений нет. ■

120. Найдите значения параметров $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, при которых система $\begin{cases} px + 6y = q, \\ 6x + 9y = 5 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

♦ $p = 4,\ q = 10/3$.

Решение. Здесь $\triangle = 9p - 36$, так что $p = 4$. Теперь составим и решим пропорцию $6 : 9 = q : 5$. ■

121. Параметры $p > 0,\ q > 0,\ r$ выбраны так, что система $\begin{cases} px - 8y = 3, \\ 2x - qy = r \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение величины $p^2 + q^2$.

♦ 32.

Решение. Из условия наличия бесконечно большого количества решений следует, что $\triangle = 0$, так что $pq = 16$. Составим пропорцию $q : 8 = r : 3,\ r = 3q/8,\ p = 16/q$, Теперь вычислим целевую функцию, $p^2 + q^2 = 16^2/q^2 + q^2$. Обозначим $q^2 = z$, и пусть $f(z) = \dfrac{16^2}{z} + z,\ f' = -\dfrac{16^2}{z^2} + 1 = \dfrac{-16^2 + z^2}{z^2},\ f' = 0$ при $z = 16,\ q^2 = 16,\ q = \pm 4,\ p = \pm 4,\ p^2 + q^2 = 32$. ■

4.1.7. Система трех уравнений с тремя неизвестными

122. Найдите значение величины $x + y + z$, если

$$(\star)\quad \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y + 2z = 22, \\ 3x + 2y + 2z = 13. \end{cases}$$

♦ 7.

Решение. Сложим все три уравнения, $7(x + y + z) = 49 \Leftrightarrow x + y + z = 7$. Заметим, что на данный момент мы доказали такое утверждение: «Если система $(\star)$ имеет решение (x, y, z), то $x + y + z = 7$.» Таким образом, если данная задача встретилась в секции В, то никаких других пояснений не требуется (их никто не будет читать), а в секции С то придется доказать наличие решения. Это можно сделать, например, так, $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+7y+7z=49, \\ y-z=8, \\ y-x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=7, \\ z=y-8, \\ x=y-9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-9+y+y-8=7, \\ z=y-8, \\ x=y-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8, \\ z=0, \\ x=-1. \end{cases}$ ■

123. Билл купил 2 рака в винном соусе, 2 тигровые креветки, обернутые ветчиной (запеченных на березовых углях), 3 бокала темного "Grotwerg" и затратил на все это 14 у.е. Джек купил 2 рака, 3 креветки, 2 бокала за 22 у.е. Том купил 3 рака, 2 креветки, 2 бокала за 13 у.е. Экономный Макс купил одного рака, одну креветку и один бокал. Сколько заплатил Макс?

♦ 7.

Решение. Если обозначить стоимость продуктов соответственно x, y, z, и записать условия в виде системы, получится предыдущая задача. ■

124. Решите систему $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x+y+2z=9, \\ x+2y+2z=11. \end{cases}$

♦ $(x,\, y,\, z) = (1;\, 2;\, 3)$.

Решение. Вычтем первое уравнение из второго, получим $z=3$. Вычтем второе уравнение из третьего, получим $y=2$. ■

4.2. Нелинейные системы

4.2.1. Виетовские системы

125. Решите систему уравнений $(\star)$ $\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q. \end{cases}$

Решение.

(1) Если пара различных чисел (x, y) удовлетворяет условиям $\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q, \end{cases}$ то квадратное уравнение

$(\star\star)$ $x^2-px+q=0$

имеет положительный дискриминант $D=p^2-4q>0$, и его два

различных корня равны x и y. Будем называть уравнение $(\star\star)$ *равносильным* системе $(\star)$. В этом случае система $(\star)$ имеет два различных решения, а именно, $(x,\ y)$ и $(y,\ x)$.
(2) Если $p^2 - 4q = 0$, то $q \geqslant 0$ и единственный корень уравнения $(\star\star)$ равен $x = \frac{p}{2} = \sqrt{q}$, система $(\star)$ имеет единственное решение $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right) = (\sqrt{q},\ \sqrt{q})$.
(3) Если $p^2 - 4q < 0$, то и уравнение $(\star)$ и система $(\star\star)$ решений не имеют. ■

126. Решите систему уравнений $(\star)$ $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

♦ $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$.
Решение. Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет положительный дискриминант, поэтому оно имеет два различных корня. Найдем корни, используя стандартную формулу для корней квадратного уравнения, $x \in \{2;\ 3\}$. Следовательно, система $(\star)$ имеет ровно два различных решения, $(x,\ y) \in \{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$. ■

127. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = -1, \\ xy = 6. \end{cases}$

♦ $\{(2;\ 3),\ (-3;\ -2)\}$.
Решение. Эта система станет виетовской после выполнения замены переменной $-y = t$. Равносильное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + x - 6 = 0$. Далее решение проводится по стандартной схеме. ■

128. Решите систему уравнений $(\star)$ $\begin{cases} |x + y| = 11, \\ xy = 24. \end{cases}$

♦ $\{(3;\ 8),\ (8;\ 3), (-3;\ -8),\ (-8;\ -3)\}$.
Решение. Система $(\star)$ равносильна совокупности двух виетовских систем, $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = -11, \\ xy = 24, \end{cases}$ которые в свою очередь равносильны совокупности квадратных уравнений $x^2 - 11x + 24 = 0$ и $x^2 + 11x + 24 = 0$. Решите их самостоятельно. ■

129. Найдите два числа, произведение которых равно 56, а сумма равна 15.
♦ $\{7;\ 8\}$, взятые в любом порядке.

Решение. Система $\begin{cases} x+y=15, \\ xy=56 \end{cases}$ равносильна уравнению $x^2-15x+56=0$, корни которого $x \in \{7;\ 8\}$. ■

4.2.2. Системы, приводящиеся к линейным

130. Решите систему $\begin{cases} 36/x+48/y=11/3, \\ 30/x+24/y=29/6. \end{cases}$

♦ $(4;\ -6)$.

Решение. Замена $u=6/x$, $v=6/y$ приводит к линейной системе $\begin{cases} 6u+8v=11/3, \\ 5u+4v=29/6, \end{cases}$ решить которую можно, например, умножив второе уравнение на 2 и вычтя из него первое уравнение, $u=3/2$, $v=-2/3$. ■

131. Решите систему $(\star)$ $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^2y^3-x^3y^2=4. \end{cases}$

♦ $(x,y)=(1;\ 2)$.

Решение 1. Выполним замену $x^2y^3=u$, $x^3y^2=v$, тогда система $(\star)$ равносильна линейной системе $\begin{cases} u+v=12, \\ u-v=4. \end{cases}$ Решим ее методом алгебраических преобразований, $u=8$, $v=4$. Поэтому система $(\star)$ равносильна более простой системе $\begin{cases} x^2y^3=8, \\ x^3y^2=4, \end{cases}$ решить которую читатель сможет сам. ■

Решение 2. Разложим каждое из уравнений на множители, $\begin{cases} x^2y^2(y+x)=12, \\ x^2y^2(y-x)=4, \end{cases}$ и поделим уравнения одно на другое (это можно сделать, так как ни одна из переменных не может быть равна нулю), $\frac{x+y}{y-x}=3$, откуда $y=2x$, $12x^5=1$, $x=1$. ■

4.2.3. Симметрические системы

Теоретические сведения Система $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ называется симметрической, если $f(x,y)=f(y,x)$ и $g(x,y)=g(y,x)$.

Симметричные системы решаются методом замены переменных, $u = x + y$, $v = xy$. Если система становится симметрической после замены $\xi = x$, $\eta = -y$, то следует сделать замену $u = x - y$, $v = xy$. Основные формулы замены переменной: $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$, $x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 2uv^2$.

132. Решите систему ($\star$) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$

♦ $(x, y) \in \{(2; -1);\ (-1; 2)\}$.

Решение После выполнения замены переменных $u = x + y$, $v = xy$, система примет вид $u^3 - 3uv = 7$, $u = 1$, поэтому $v = -2$. Теперь из виетовской системы $x + y = 1$, $xy = -2$ найдем все решения системы ($\star$), $(x; y) \in \{(2; -1);\ (-1; 2)\}$. ■

133. Решите систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 21, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

♦ $(x; y) \in \{4; 1);\ (1; 4)\}$.

Решение Замена $u = x + y$, $v = xy$, приводит систему к виду $\begin{cases} u^2 - v = 21, \\ u + v = 9, \end{cases}$ поэтому $u^2 + u - 30 = 0$, $(u;\ v) \in \{(-6;\ 15) \bigcup (5;\ 4)\}$, осталось решить две виетовские системы, $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 15 \end{cases}$ (не имеет решений) и $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$ ■

134. Решите систему $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^3 - y^3 = 37. \end{cases}$

♦ $(x; y) \in \{(4; 3) \bigcup (-3; -4)\}$.

Решение Замена $u = x - y$, $v = xy$, приводит систему к виду $\begin{cases} u^2 + 3v = 37, \\ u(u^2 + 3v) = 37, \end{cases}$ поэтому $u = 1$, $v = 12$. ■

135. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершинами которого являются все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

♦ 16.

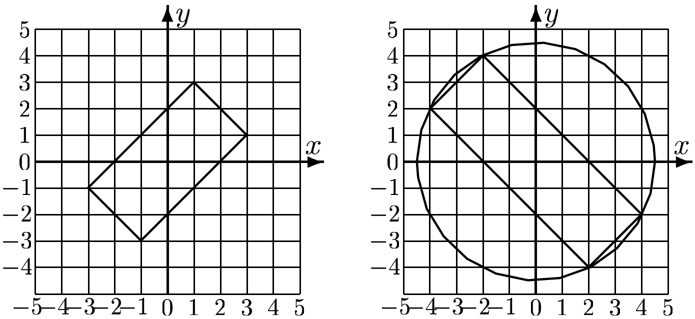


Рис. 49.

Решение. Пусть $u = x + y$, $v = xy$. Тогда
$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 91, \\ u^2 = 7 + 3v, \end{cases}$
$(7+3v)^2 - 4(7+3v) + 3v^2 = 91$, $v = 3$, $u^2 = 16$,
$(x;y) \in \{(1;\ 3) \bigcup (3;\ 1) \bigcup (-1;\ -3) \bigcup (-3;\ -1)\}$. Эти четыре точки являются вершинами прямоугольника со сторонами $2\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$, рис. 49a. ■

136. Найдите радиус окружности, проходящей через все точки $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12, \\ 124(x^3 + y^3) = 7(x^5 + y^5). \end{cases}$
♦ $r = 2\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $u = x + y$, $v = xy$. Тогда $u^2 - v = 12$,
$124(u^3 - 3uv) = 7(u^5 - 5u^3v + 5uv^2)$, $7v^2 - v - 30 = 0$,
$v \in \{-8;\ \frac{60}{7}\}$, $(x;y) \in \{(-2;\ 4) \bigcup (4;\ -2) \bigcup (-4;\ 2) \bigcup (2;\ -4)\}$.
Эти четыре точки совпадают с вершинами прямоугольника с основаниями $2\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$, имеющего оси симметрии $y = x$ и $x + y = 0$, рис. 49b. ■

137. Решите систему $\begin{cases} 6/x + 12/y = 5, \\ 36/x^2 + 144/y^2 = 13. \end{cases}$
♦ $(x, y) = \{(3;4) \bigcup (2;6)\}$.

Решение. Замена $u = 6/x$, $v = 12/y$ приводит систему к симметрической, $\begin{cases} u+v=5, \\ u^2+v^2=13. \end{cases}$ Решение предоставляем читателю. ■

4.2.4. Системы, включающие однородное уравнение

Теоретические сведения Однородным уравнением второй степени называется уравнение
$(\star)$ $ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$
Предположим, что $a \neq 0$. Если $y = 0$, то $x = 0$, а если $y \neq 0$, то $(\star)$ равносильно
$(\star\star)$ $au^2 + bu + c = 0,$
где $u = \frac{x}{y}$. Множество на плоскости, определяемое уравнением $(\star\star)$, зависит от знака величины $b^2 - 4ac$.
(1) Если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение $(\star\star)$ имеет два различных корня, а уравнение $(\star)$ определяет на плоскости $(x; y)$ пару пересекающихся прямых, точка пересечения совпадает с началом координат. Их угловые коэффициенты можно найти, решив уравнение $(\star\star)$ (угловые коэффициенты будут обратными числами по отношению к корням).
(2) Если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение $(\star\star)$ имеет единственный корень, а уравнение $(\star)$ определяет на плоскости $(x; y)$ прямую, проходящую через начало координат.
(3) Если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение $(\star\star)$ не имеет корней, а уравнение $(\star)$ определяет на плоскости $(x; y)$ единственную точку, совпадающую с началом координат.

138. Решите систему $\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0, \\ x + y = 12. \end{cases}$

♦ $(x, y) \in \{(4;\ 8);\ (3;\ 9)\}$.
Решение. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно y с параметром x. Решим его стандартным путем и получим $y \in \{2x;\ 3x\}$. Теперь из второго уравнения получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2x=12, \\ y=2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3x=12, \\ y=3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=3x. \end{cases} \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

139. Решите систему $\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0, \\ 5x^2 - 2xy + 3y^2 = 26. \end{cases}$

♦ $(x, y) \in \{\pm(1;\ 3);\ \pm(\sqrt{2};\ \sqrt{8})\}$.

Решение. Аналогично найдем $y \in \{2x;\ 3x\}$. Теперь из второго уравнения получим $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2 - 4x^2 + 12x^2 = 26, \\ y = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 5x^2 - 6x^2 + 27x^2 = 26, \\ y = 3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13x^2 = 26, \\ y = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 26x^2 = 26, \\ y = 3x \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 3x. \end{cases} \end{array}\right.$ ■

140. Решите систему $\begin{cases} 2x - 3y = 35, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -2. \end{cases}$

♦ $(7;\ -7)$.

Решение. Второе уравнение системы приводится к однородному второй степени, $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1 = 0$, откуда $\begin{cases} y = -x, \\ x \neq 0. \end{cases}$ ■

141. Найдите величину острого угла между горизонтальной осью координат и прямой, соединяющей точки $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 3 \end{cases}$ и неравенству $xy > 0$.

♦ $45°$ ♦ $(x, y) \in \{(1; 1);\ (-1; -1)\}$.

Решение 1. Это симметрическая система, и ее можно решить методом замены переменной, $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases}$ $\begin{cases} u^2 - v = 3, \\ 2u^2 - 5v = 3, \end{cases}$

$\begin{cases} 5u^2 - 5v = 15, \\ 2u^2 - 5v = 3, \end{cases}$ $u = \pm 2$ и т.д. ■

Решение 2. Более эффективно решение методами, предназначенными для однородных систем. Вычтем уравнения одно из другого, и получим однородное уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x$. Теперь из первого уравнения получим $3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$, два решения $(1;\ 1)$ и $(-1;\ -1)$. ■

142. Найдите целочисленные решения системы
$\begin{cases} 2x^2+3xy+5y^2=10, \\ x^2+2xy-5y^2=-2. \end{cases}$

♦ $(x,y)\in\{1;1);\ (-1;-1)\}$.

Решение. Умножим второе уравнение на 5 и сложим с первым,
$7x^2+13xy-20y^2=0 \quad \Leftrightarrow (x-y)(7x+20y)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=y, \\ &7x=-20y. \end{aligned}\right.$
Осталось составить и решить два квадратных уравнения. Сделайте это самостоятельно. ■

143. Решите систему $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

♦ $(x,\ y)\in\{(4;\ 2)\bigcup(-4;\ -2)\}$.

Решение. Выполним замену $u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{x}{y}$, получим систему $\begin{cases} uv=40, \\ \dfrac{u}{v}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=40, \\ u^2=400 \end{cases}$ $u^2=400$, $\Leftrightarrow \begin{cases} uv=40, \\ u\in\{20;\ -20\}. \end{cases}$ Имеется два решения, $\begin{cases} u=20, \\ v=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} u=-20, \\ v=-2. \end{cases}$ Второе из них не годится, так как $u\geqslant 0$. Поэтому $\begin{cases} u=20, \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=20, \\ \dfrac{x}{y}=2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2=20, \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\{-2;\ 2\}, \\ x=2y. \end{cases}$ Два решения получите самостоятельно. ■

144. Решите систему $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$

♦ $(x,\ y)\in\{(2;1)\bigcup(-1;2)\}$.

Решение. Заметим, что из первого уравнения вытекает, что $x\neq y$, а из второго $x+y\neq 0$. Поэтому поделив уравнения одно на другое, получим равносильное однородное уравнение $2x^2-5xy+2y^2=0$, которое является следствием исходного, так что $x=2y$ или $y=2x$. Остальное доделайте самостоятельно. ■

145. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершинами которого являются все точки $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}|x+y|=1,\\|x-y|=1.\end{cases}$

♦ 2 ♦ $(x;y)\in\{(1;\ 0)\bigcup(0;\ 1)\bigcup(-1;\ 0)\bigcup(0;\ -1)\}$. Искомый многоугольник — квадрат со стороной $\sqrt{2}$.

Решение 1. Возведем каждое уравнение в квадрат и вычтем, получим следствие системы $(\star)$, $xy=0$, поэтому $x=0$ или $y=0$. ■

Решение 2. В данном случае система эффективно решается путем раскрытия модулей, в результате чего получается совокупность четырех простейших систем, например, $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=1,\end{cases}$ откуда $x=1$, $y=0$ и т.д. ■

146. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершинами которого являются все точки $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}xy=6,\\|x+y|=5.\end{cases}$

♦ 10 ♦ $(x,y)\in\{(2;\ 3)\bigcup(3;\ 2)\bigcup(-2;\ -3)\bigcup(-3;\ -2)\}$. Это прямоугольник со сторонами $\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$.

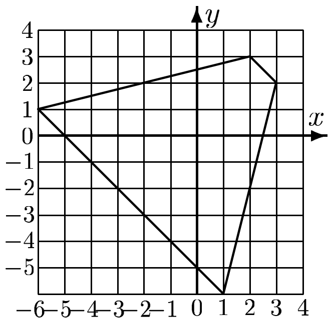
Решение. Решим две виетовских системы,
$\begin{cases}xy=6,\\x+y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}xy=6,\\x+y=-5,\end{cases}$ и найдем координаты вершин. ■

147. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершинами которого являются все точки $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6},\\x^2y+xy^2=30.\end{cases}$

♦ 40 ♦ $(x;y)\in\{(2;\ 3)\bigcup(3;\ 2)\bigcup(-6;\ 1)\bigcup(1;\ -6)\}$. Искомый многоугольник — равнобочная трапеция с основаниями $\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$ и высотой $5\sqrt{2}$, имеющая ось симметрии $y=x$.

Решение. Выполним замену $\begin{cases}u=x+y,\\v=xy,\end{cases}$ получим $\begin{cases}uv=30,\\6u=5v.\end{cases}$

Имеется два решения, $\begin{cases}u=5,\\v=6,\end{cases}$ $\begin{cases}u=-5,\\v=-6.\end{cases}$ Теперь требуется ре-



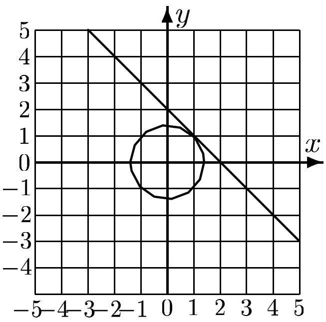


Рис. 50.

шить две виетовских системы, $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=-6. \end{cases}$ Сделайте это самостоятельно, рис. 50а. ■

4.2.5. Метод мажорант

Теоретические сведения (1) Система $\begin{cases} x+y=a+b, \\ x\leqslant a, \\ y\leqslant b \end{cases}$ равносильна $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$ В самом деле, если вдруг окажется, что $\begin{cases} x<a, \\ y=b, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=a, \\ y<b, \end{cases}$ или $\begin{cases} xa, \\ y<b, \end{cases}$ то $x+y<a+b$, что противоречит условиям задачи.

Частные случаи:

(2) Система $\begin{cases} x+y=0, \\ x\leqslant 0, \\ y\leqslant 0 \end{cases}$ равносильна $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

(3) Система $\begin{cases} x+y=0, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ равносильна $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

148. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1} + \sqrt{x^2-4x+3} = 0, \end{cases}$.

♦ $x = 1$, $y = 0{,}(3)$.

Решение. Все написанные далее системы равносильны,

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1} + \sqrt{x^2-4x+3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \sqrt{9y^2-6y+1} = 0, \\ \sqrt{x^2-4x+3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ |3y-1| = 0, \\ x \in \{1;\ 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} = 0, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1;\ -3\}, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

4.2.6. Сложные нелинейные системы

149. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 3, \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} = 3, \\ x + y + z = 36. \end{cases}$

♦ $x = y = z = 12$.

Решение. Пусть $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$, $w = \frac{z}{x}$.

Тогда $\begin{cases} u + v + w = 3, \\ uv + uw + vw = 3, \\ uvw = 1. \end{cases}$ Три числа u, v, w являются корнями уравнения $(t-u)(t-v)(t-w) = 0$, или $t^3 - (u+v+w)t^2 + (uv+uw+vw)t - uww = 0$. Все коэффициенты нам известны, так что уравнение имеет вид

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$, или, что то же самое, $(t-1)^3 = 1$, $t = 1$, откуда $u = v = w = 1$, поэтому $x = y = z = 12$. ■

150. Решите систему уравнений $\begin{cases} xyz = 64, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = \dfrac{3}{2}, \\ 6x + 3y + 2z = 36. \end{cases}$

♦ $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$.

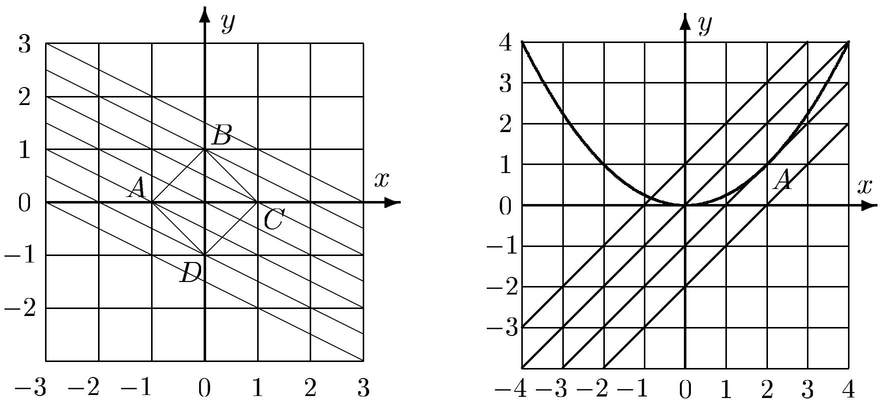
Решение. Выполним замену $u = x$, $2v = y$, $3w = z$, получим систему $\begin{cases} uvw = 8, \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{3}{2}, \\ u + v + w = 6. \end{cases}$ Возведем к квадрат третье уравнение, $u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw) = 36$, а второе уравнение приведем к общему знаменателю в левой части, $\dfrac{uv + uw + vw}{uvw} = \dfrac{3}{2}$. Исключим теперь uvw, используя первое уравнение, $\begin{cases} uv + uw + vw = 12, \\ u^2 + v^2 + w^2 = 12. \end{cases}$ В соответствии с неравенством Коши, $\dfrac{u^2 + v^2}{2} \geqslant uv$, $\dfrac{u^2 + w^2}{2} \geqslant uw$, $\dfrac{v^2 + w^2}{2} \geqslant vw$, причем равенство имеет место только при $u = v = w$. Сложим все три неравенства, и получим $u^2 + v^2 + w^2 \geqslant uv + uw + vw$, $u^2 + v^2 + w^2 = uv + uw + vw$, поэтому $u = v = w = 2$. ■

4.3. Системы с параметром

151. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x + y = \sqrt{a}, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $a = 4$.

Решение. При $a \geqslant 0$ первое уравнение определяет прямую, расстояние от которой до начала координат равно $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$. Второе уравнение определяет окружность, радиус которой равен $\sqrt{2}$. Единственное решение будет иметь место при условии касания окружности и прямой, рис. 50b. При этом расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу круга, поэтому $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. ■



$|x| + |y| = 1$ $\qquad$ $4y = x^2$

Рис. 51. Взаимное расположение ломаной и прямой с параметром

152. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x + 2y = a, \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

♦ $a \in (-2;\ 2)$

Решение. Первое уравнение определяет прямую, второе — квадрат с вершинами $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-1;\ 0)$, $D(0;\ -1)$. Система будет иметь ровно два решения для всех тех положений прямой, при которых она проходит между точками B и D, рис. 51а, которым соответствуют значания параметра соответственно 2 и -2. ■

153. Найдите все значения параметра a, при которых система $(\star)$ $\begin{cases} y = x - a, \\ 4y = x^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $a = 1$.

Решение 1. Подставим y из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение с параметром $(\star\star)$ $x^2 - 4x + 4a = 0$. Это уравнение имеет единственное решение при условии равенство нулю дискриминанта, $16 - 16a = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Если уравнение

($\star\star$) имеет единственное решение, то и система ($\star$) имеет единственное решение и наоборот. ■

Решение 2. Анализ графиков каждого из уравнений, прямой и параболы, рис. 51b, показывает, что единственное решение имеет место при условии касания графиков. В точке касания производные должны быть равны, поэтому в точке касания $1 = \frac{x}{2}$, $x = 2$. Далее найдем $y = 1$ из второго уравнения, а значение параметра — из первого. ■

154. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y - x = a, \\ (16x^2 - y^4)(16y^2 - x^4) = 0 \end{cases}$ имеет ровно шесть различных решений.

♦ $a \in \{-1; 1\}$.

Решение. Второе уравнение определяет четыре параболы
(1) $y = \frac{x^2}{4}$, **(2)** $y = -\frac{x^2}{4}$, **(3)** $x = \frac{y^2}{4}$, **(4)** $x = -\frac{y^2}{4}$,
рис. 53b. Ровно шесть решений будет при условии касания прямой ($\star$) $y - x = a$ и одновременно парабол (2), (3). Ровно шесть решений будет также при условии касания прямой ($\star$) и одновременно парабол (1), (4). ■

155. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x + y| = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = a \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

♦ $a \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Решение. Первое уравнение определяет пару параллельных прямых, расстояние от каждой из которой до начала координат равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Второе уравнение определяет окружность, радиус которой равен a, рис. 52a. Ровно четыре решения будут иметь место при условии двукратного пересечения окружности и каждой из двух прямых. При этом расстояние от центра окружности до прямых должно быть меньше радиуса круга, $\frac{1}{\sqrt{2}} < a$. ■

156. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно восемь различных решений.

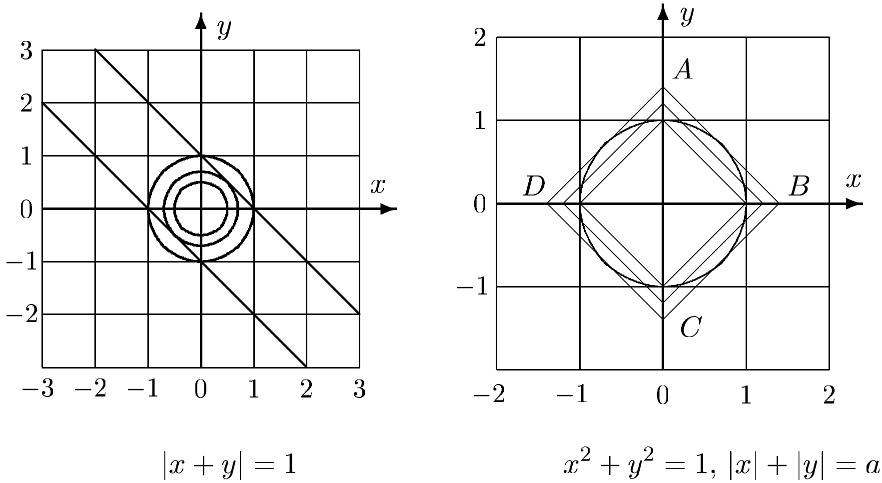


Рис. 52. Взаимное расположение ломаной и прямой с параметром

♦ $a \in (1;\ \sqrt{2})$.

Решение. Первое уравнение определяет квадрат с вершинами $A(a;\ 0)$, $B(0;\ a)$, $C(-a;\ 0)$, $D(0;\ -a)$. Второе уравнение определяет окружность, радиус которой равен 1, рис. 52b. Ровно восемь решений будут иметь место при условии двукратного пересечения окружности и каждой из сторон квадрата. Заметим, что расстояние от начала координат до каждой из сторон квадрата лежит в пределах от $\frac{a}{\sqrt{2}}$ до a. Именно в этих пределах и должен находиться радиус круга. ■

157. Найдите все значения параметра $b > 0$, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+9=0, \\ x+y=b, \end{cases}$ имеет ровно шесть различных решений.

♦ $b \in (6-3\sqrt{2};\ 3) \bigcup (3;\ 3\sqrt{2})$.

Решение. Первое уравнение определяет четыре окружности с центрами $A(3;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$, $C(-3;\ -3)$, $D(3;\ -3)$. Радиусы всех окружностей равны 3. Второе уравнение определяет прямую.

Ровно шесть решений будут иметь место при условии двукратного пересечения окружностей A, B, D, крайние положения соответствуют касанию окружности A в точке $x = y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ и одновременному касанию B, D. Наиболее эффективен способ решения, основанный на понятии вектора, рис. 53а. Вектор OA начинается в точке (0; 0) и оканчивается в точке (3; −3). Вектор AB начинается в точке (3; −3) и оканчивается в точке касания. Так как этот вектор направлен в точку касания, то он перпендикулярен касательной, так что его угловой коэффициент равен 1. Его длина равна радиусу круга, так что $\overrightarrow{AB} = (\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}})$. Наконец, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} = (3 + \frac{3}{\sqrt{2}}; -3 + \frac{3}{\sqrt{2}})$. Иначе говоря, точка B имеет координаты $x = 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y = -3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$. Чтобы определить b, используем уравнение $x + y = b$. Аналогично определяется и второе граничное значение параметра b, для этого придется использовать векторы $\overrightarrow{OM} = (3; 3)$, $\overrightarrow{MN} = (-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}})$, и $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$. На рис. 53а показаны граничные значения параметра. Значение $b = 3$ исключено, так как при этом точки пересечения указанных окружностей сливаются попарно, что приводит к уменьшению числа решений с шести до четырех. ■

4.3.1. Комбинация параболы и стандартной кривой

158. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $(\star)$ $\begin{cases} y = |x|, \\ y = x^2 + b \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

♦ $b \in 0{,}25 \bigcup b \in (-\infty; 0)$.

Решение. Графики функций, вхлдящих в правые части уравнений системы $(\star)$, показаны на рис. 54а. Система будет иметь ровно два решения в двух случаях, **(1)** при касании параболы и каждой и графиков двух линейных функций, $y = x$, $y = -x$. **(2)** при условии расположения вершины параболы ниже вершины модуля (0; 0). Касание имеет место при условии нулевого дискриминанта уравнения $x^2 - x + b = 0$. ■

159. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + b = x^2 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

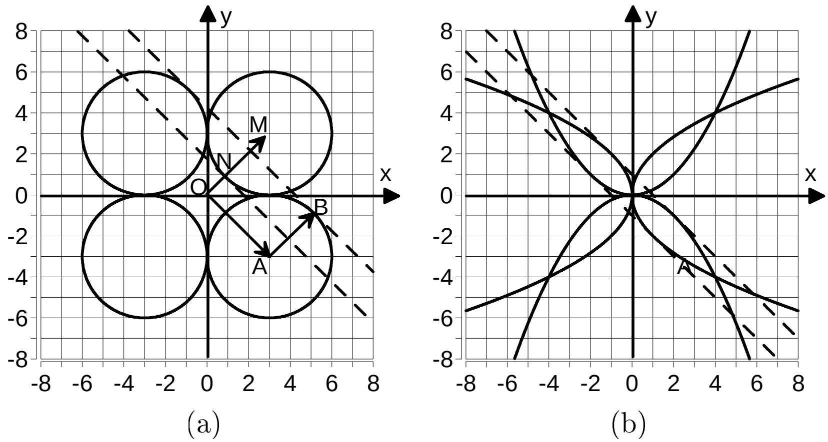


Рис. 53. Графическая иллюстрация решения систем уравнений с двумя переменными

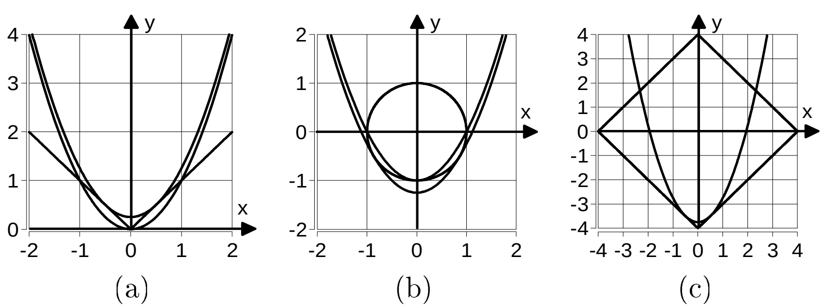
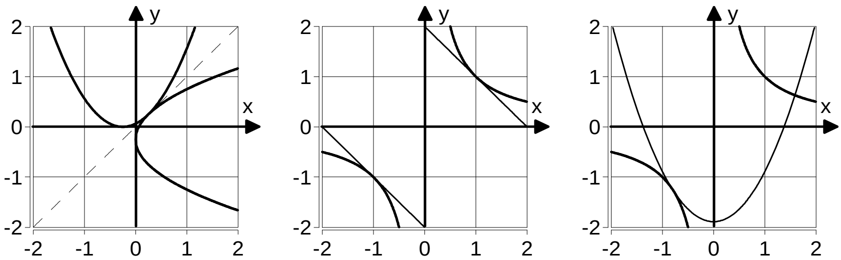


Рис. 54. Взаимное расположение параболы и прямой, параболы и окружности



(a) (b) (c)

Рис. 55. Взаимное расположение параболы и гиперболы

♦ $b \in \{1{,}25\} \bigcup (-1;\, 1)$.

Решение. Графики функций $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $y = x^2 - b$ при $b = -1{,}25$ и $b = -1$ показаны на рис. 54b. Система будет иметь ровно два решения в двух случаях, **(1)** при касании параболы и нижней полуокружности $y = -\sqrt{1 - x^2}$, **(2)** при условии расположения вершины параболы выше нижней вершины окружности, но ниже верхней вершины окружности. Касание будет иметь место при условии нулевого дискриминанта уравнения $y^2 + y + b - 1 = 0$. При этом найдется единственное значение $y = -0{,}5$, и два противоположных по величине значения x. ■

160. Сколько существует целочисленных значений параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ 4y + b = 4x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения?

♦ 48 ♦ $b \in \{15\} \bigcup (16;\, 64)$.

Решение. Графики функций $y = 4 - |x|$, $y = -4 + |x|$, $y = x^2 - \frac{b}{4}$ при $b = -3{,}75$ показаны на рис. 54c. Система будет иметь ровно четыре решения в двух случаях, **(1)** при касании параболы и каждой из двух прямых $y = x - 2$, $y = -x - 2$, **(2)** при условии расположения вершины параболы выше правой (и одновременно левой) вершины квадрата, но ниже нижней вершины квадрата. Касание будет иметь место при условии нулевого дискриминанта уравнения $4(x - 4) + b = 4x^2$. ■

161. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} y = (x-b)^2, \\ x = (y-b)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $b = -0{,}25$.

Решение. График функции $y = (x-b)^2$ и множество точек $x = (y-b)^2$ симметричны относительно прямой $y = x$, причем $y = (x-b)^2$ — парабола с вершиной $(b;\ 0)$. Единственное решение будет иметь место при условии касания двух линий, $y = (x-b)^2$ $y = b + \sqrt{x}$, причем точка касания — на прямой $y = x$. Из этого следует, что уравнение $x = (x-b)^2$ должно иметь единственное решение, так что дискриминант должен быть равен нулю, $4b + 1 = 0$, рис. 55. ■

162. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений ($\star$) $\begin{cases} x + y = b, \\ xy = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $b = \pm 2$.

Решение. Виетовская система ($\star$) имеет единственное решение в тех и только тех случаях, когда квадратное уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ имеет дискриминант, равный нулю. Графики функций $y = \frac{1}{x}$, $y = -2 - x$, $y = 2 - x$ показаны на рис. 55b. ■

163. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений ($\star$) $\begin{cases} x + y = b - 1, \\ xy = 3b - 8 \end{cases}$ имеет единственное решение.

♦ $b \in \{3;\ 11\}$.

Решение. Виетовская система ($\star$) имеет единственное решение в тех и только тех случаях, когда квадратное уравнение $x^2 - (b-1)x + 3b - 8 = 0$ имеет дискриминант, равный нулю, $(b-1)^2 - 4(3b-8) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 14b + 33 = 0$. Сумма корней этого квадратного уравнения с положительным дискриминантом равна 14, несложно найти и сами корни, $b \in \{3;\ 11\}$. ■

164. Найдите все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - b \end{cases}$ имеет ровно два решения.

♦ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Решение. Анализ графиков функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2 - b$, рис. 55c, показывает, что по крайней мере одно решение $(x > 0)$ имеется при любом b, а два решения имеются при условии, что парабола касается гиперболы. Если это имеет место при некотором значении b_0, то при $b < b_0$ будет ровно одно решение, а при $b > b_0$ будет ровно три решения системы. Приравнивая $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2 - b$ получим кубическое уравнение $x^3 - bx - 1 = 0$. Это уравнение имеет ровно два решения в том случае, когда график кубической параболы $y = x^3 - bx - 1$ касается оси x. Следовательно, значение b_0 можно найти из системы $\begin{cases} y = 0, \\ y' = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^3 - bx - 1 = 0, \\ 3x^2 - b = 0. \end{cases}$ Решая систему, получим $b_0 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. ■

4.4. Задачи для самостоятельного решения

4.4.1. Алгебраические системы, 1

165. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$

166. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

167. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz = 5, \\ xy + yz = 8. \end{cases}$

168. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - xyz = 1, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = -4/3. \end{cases}$

4.4.2. Алгебраические системы, 2

169. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 102 + x + y, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$

170. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

171. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ xy + yz + xz = 3, \\ xyz = 1. \end{cases}$

172. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x - y = 6. \end{cases}$

Ответы

165. ♦ $(\pm 2;\ \pm 1)$ и т.д., 8 решений. **166.** ♦ $(1;\ -1;\ 2) \cup (1;\ 2;\ -1) \cup (-1;\ 1;\ 2) \cup (-1;\ 2;\ 1) \cup (2;\ 1;\ -1) \cup (2;\ -1;\ 1)$. **167.** ♦ $(1;\ 2;\ 3) \cup (1;\ 4;\ 1) \cup (5;\ 2;\ -1) \cup (5;\ 4;\ -3)$. **168.** ♦ $\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{1/5}$. **169.** ♦ $(6;\ 9)$ и т.д., 2 решения. **170.** ♦ $(1;\ -2;\ 3) \cup (1;\ -3;\ 2) \cup (2;\ -1;\ 3) \cup (2;\ -3;\ 1) \cup (3;\ -1;\ 2) \cup (3;\ -2;\ 1)$. **171.** ♦ $(1;\ 1;\ 1)$. **172.** ♦ $(1;-1);(1;2)$.

Тема 5. Алгебраические преобразования

5.1. Функции и выражения

Разберемся в том, что такое функция, выражение, значение выражения и т.д. Функция — понятие неопределяемое, его можо только пояснить.

5.1.1. Функция

Назовем функцией правило, которое по заданному значению переменной (переменных) из некоторого заданного множества позволяет получить некоторое число. Это число называется значением функции при заданном значении переменной (переменных). При вычислении значения функции применяются стандартные правила выполнения арифметических операций, в том числе и правила применения скобок. Как правило, если не указано нечно иное, то переменной в функции считается величина, обозначенная буквой x.

5.1.2. Параметры

Функция может содержать несколько переменных, например, $\sqrt{x^2 - a^2}$. Некоторые из переменных могут произвольным образом именоваться параметрами, в данном случае это будет, скорее всего, величина a. В задачах с параметром нередко приходится составлять и исследовать уравнения, в которых параметр (например, a) является неизвестной величиной, а неизвестная величина (например, x) исполняет роль параметра.

5.1.3. Отличие переменных и параметров

Практическое различие между переменными и параметрами появляется при вычислении производной. Считается, что производная вычисляется по переменной, но не по параметру. Иначе говоря, предполагается, что параметр при вычислении производной имеет некоторое заданное и фиксированное числовое значение.

5.1.4. Функции без переменных

Выражение для функции в некоторых случаях может не содержать переменной вообще. Например, если решается уравнение $||x-3|-2|=1$, то целесообразно построить на одном чертеже графики функций $f(x)=||x-3|-2|$ и $g(x)=1$. Если исследуется количество корней уравнения $||x-3|-2|=p$, то целесообразно построить на одном чертеже графики функций $f(x)=||x-3|-2|$ и $g(x)=p$. В этом случае выражение для одной из функций, $g(x)$, не содержит переменной, но содержит параметр. Однако следует рассматривать эту функцию именно как функцию от своей переменной x, но не от переметра p. При изменении параметра весь график функции будет опрелеленным образом изменяться, и природа этого изменения также является обьектом исследования.

5.1.5. Выражения

Выражение ничем не отличается от функции. Это тоже функция, но в ней не предполагается выделение одной из переменных, все переменные – параметры равноценны. Следовательно, это тоже правило, которое позволяет и т.д. Поэтому выражение, как и функция, вообще говоря, не является числом, но может иметь некоторое числовое значение (числом мы будем называть натуральное, целое, рациональное или действительное число). Например, $\sqrt{3}+1$ это выражение, которое читается примерно так, "вычислить значение $\sqrt{3}$ и прибавить к нему 1". При вычислении значения выражения без параметров или выражения с параметрами, числовое значение которых указано, получается число, оно и называется значением выражения (или, более точно, числовым значением выражения).

5.1.6. Тождественное преобразование

Правило вычисления значения функции или выражения может быть преобразовано так, что в результате получится другое правило, которое на всей допустимой области изменения переменных и параметров исходного выражения дает то же самое числовое значение. Такое преобразование выражения называется тождественным, и оно дает опять функцию или выражение. Таким образом, ОДЗ тождественно преобразованного функции (выражения) не может быть уже, чем у исходного.

5.1.7. Упрощение

В некотором смысле новое выражение может быть проще исходного, и тогда говорят об "упрощении". На самом деле далеко не всегда можно сделать однозначный вывод о том, какое выражение проще, имеются некоторые традиции, которые связаны с историей развития математики. Например, считается, что выражение, в котором корни находятся в числителе, проще того, в котором корни находятся в знаменателе. Это далеко не всегда верно. Например, выражение ($\star$) $\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}$ проще, чем ($\star\star$) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$. Совершенно ясно, что ближайшее к ($\star$) рациональное число вида $\frac{1}{n}$, $n \in \{1;\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 9\}$ равно $\frac{1}{4}$, а для ($\star\star$) это далеко не столь очевидно. Поэтому задания типа "Упростите ...", широко распространенные в ЕГЭ, совершенно бессмысленны, так как сформулировать разумное правило, которое позволило бы сравнить сложность выражений, практически невозможно. Если Вам все же предлагают упростить выражение типа $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, лучше всего учесть эти традиции и дать ответ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, справедливый при $x \geqslant 1$.

5.2. Основные формулы

5.2.1. Преобразования рациональных чисел

173. Выражение $(1,(3))^{-2} : (0,75)^3 + (\sqrt{3})^4 : (1,5)^3$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ -1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 4 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 4.

Решение. Преобразуем все десятичные дроби в рациональные, корни запишем в виде степеней с дробным показателем, избавимся от "бухгалтерского" символа деления, $x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} + (3^{1/2})^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$.
Преобразуем отрицательные степени дробных выражений в положительные, используем правило сложной степени, $(a^b)^c = a^{bc}$, получим $x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $x = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$. ■

174. Найдите значение выражения
$99\left(\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{95\cdot97} + \frac{1}{97\cdot99}\right)$.
♦ 16.

Решение. Заметим, что $\frac{2}{3\cdot5} = \frac{5-3}{3\cdot5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$, $\frac{2}{5\cdot7} = \frac{7-5}{5\cdot7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, и т.д., поэтому вся сумма S состоит из четного числа слагаемых, из которых все, кроме двух, сократятся, а останется $S = \frac{99}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{99}\right) = 16$. ■

175. Найдите значение выражения $\frac{3{,}2^2+6{,}4^2}{1{,}6^2-3{,}2^2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-6\dfrac{2}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $6\dfrac{2}{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-7,5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-5\dfrac{2}{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $7,5$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $-6\dfrac{2}{3}$.

Решение. Вынесем $1{,}6^2$ из всех слагаемых числителя и знаменателя, $\frac{2^2+4^2}{1^2-2^2} = \frac{20}{-3}$. ■

5.2.2. Формулы сокращенного умножения

Теоретические сведения К числу формул сокращенного умножения относятся следующие тождества,

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
(3a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
(3b) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$,
(4a) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
(4b) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$,
(5) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,
(6) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$,
(7) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
(8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
(9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Легко убедится в том, что

(10) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$,
(11) $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$,
(12) $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$,
(13) $a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$, и т.д.

Для четных степеней имеется только одна формула "с минусом", для нечетных — две формулы, "с плюсом" и "с минусом".

Замена переменной приводит к следующим широко применяемым тождествам[2],

(14) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$,

(15) $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b})$, и т.д.

176. Найдите значение выражения $(\star)$ $0{,}87^2 + 0{,}26 \cdot 0{,}87 + 0{,}0169$.
♦ 1.

Решение. Заметим, что $0{,}26 = 0{,}13 \cdot 2$, поэтому $(\star)$ равно $0{,}87^2 + 2 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}13 + 0{,}13^2 = (0{,}87 + 0{,}13)^2$. ■

177. Значение выражения $(\star)$ $\frac{19^2 - 18^2}{56^2 - 19^2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0,75 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}01(3)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0{,}01(3)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{5}{73}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{5}{73}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 0,01(3).

Решение. Не следует производить вычисление квадратов натуральных чисел в числителе и знаменателе. Вместо этого используем формулу разности квадратов,
$\frac{(19-18)(19+18)}{(56-19)(56+19)} = \frac{37}{75 \cdot 37} = \frac{1}{75} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{100} = 1{,}(3) \cdot \frac{1}{100}$. ■

178. Значение выражения $\sqrt{(43 + 17)^2 - 4 \cdot 43 \cdot 17}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 26 $\boxed{\mathbf{2}}$ 52 $\boxed{\mathbf{3}}$ 50 $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{6 \cdot 43 \cdot 17}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 60

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 26.

Решение. Заметим, что $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$, поэтому $\sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = |a - b|$. ■

179. Выражение

$(\star)$ $\left(a^{-1/2} - b^{-1/2}\right)^{-1} : \left(a^{-1} - b^{-1}\right)^{-1}$

тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Решение. Выражение $(\star)$ существует при

[2]Напомним, что тождество — это равенство, верное при всех допустимых значениях параметров, входящих в левую и правую часть. Тождеством целесообразно называть также неравенство, обладающее тем же свойством.

$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases}$ При этих условиях $a^{-1} - b^{-1} = \left(a^{-1/2}\right)^2 - \left(b^{-1/2}\right)^{-1/2} =$
$= \left(a^{-1/2} - b^{-1/2}\right) \cdot \left(a^{-1/2} + b^{-1/2}\right)$, а все выражение ($\star$) тождественно равно $a^{-1/2} + b^{-1/2}$. Это просто другая форма записи ответа 2. Заметим, что ОДЗ результата шире чем ОДЗ исходного выражения, так как теперь ОДЗ не содержит условия $a \neq b$. ■

180. Выражение
($\star$) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \cdot \left(a^{-1/2} - b^{-1/2}\right) \cdot (a - b)^{-1}$
тождественно равно
1 $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ **2** $\sqrt{ab}$ **3** $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ **4** $-\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ **5** $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$

Ответ **5**♦ $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

Решение. Выражение ($\star$) существует при $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases}$ При этих условиях $a - b = \left(a^{1/2} - b^{1/2}\right) \cdot \left(a^{1/2} + b^{1/2}\right)$, а выражение ($\star$) тождественно равно $\dfrac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a^{-1/2} - b^{-1/2}\right)}{\left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)\left(a^{1/2} + b^{1/2}\right)} = \dfrac{a^{-1/2} - b^{-1/2}}{a^{1/2} - b^{1/2}} =$
$= \dfrac{b^{1/2} - a^{1/2}}{\sqrt{ab}\left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)} = \dfrac{-1}{\sqrt{ab}}$. И здесь ОДЗ результата шире чем ОДЗ исходного выражения. Это важно при использовании тождественных преобразований при решении уравнений и неравенств. ■

181. Значение выражения ($\star$) $\frac{a^3+b^3}{a+b} - \frac{a^3-b^3}{a-b}$
при $a = \sqrt{17} + \sqrt{7}$, $b = \sqrt{17} - \sqrt{7}$ равно
1 20 **2** $2\sqrt{17}$ **3** $2\sqrt{7}$ **4** -20 **5** $-2\sqrt{7}$

Ответ **4**♦ -20.

Решение. Обозначим величину ($\star$) буквой z. Используем формулы разности и суммы кубов,
$z = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b} - \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}$

$= a^2 - ab + b^2 - (a^2 + ab + b^2) = -2ab$. Найдем также
$ab = \left(\sqrt{17} + \sqrt{7}\right)\left(b = \sqrt{17} - \sqrt{7}\right) = \left(17 - 7 = 10\right)$.
■

182. Найдите значение выражения
$(\star)$ $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} - \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$
при $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
♦ $\sqrt{2}$.
Решение. Используем в $(\star)$ формулы разности и суммы кубов,
$z = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} = = a + b - (a - b) = 2b$. ■

183. Найдите значение выражения $\dfrac{x + \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} + \dfrac{x - \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$
при $x = 9$ и $y = 4$.
♦ 1,2.
Решение. Используем формулы сокращенного умножения третьего порядка,
$\frac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} + \frac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x - y} = \dfrac{2 \cdot 3}{5} = 1{,}2$. ■

184. Выражение
$(\star)$ $\left(a^{-1/2} - b^{-1/2}\right)^{-1} : \left(a^{-3/2} - b^{-3/2}\right)^{-1}$
тождественно равно
$\boxed{1}$ $\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ $\boxed{3}$ $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
$\boxed{4}$ $a^{-1} - a^{-1/2}b^{-1/2} + b^{-1}$ $\boxed{5}$ $a^{-1} + a^{-1/2}b^{-1/2} + b^{-1}$
Ответ $\boxed{5}$♦ $a^{-1} + a^{-1/2}b^{-1/2} + b^{-1}$.

Решение. Используем правила действий со степенями и преобразуем $(\star)$ к виду $z = \frac{a^{-\frac{3}{2}}-b^{-\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}$.
В числителе используем формулу разности кубов,
$z = \frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-1}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}\right)}{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}} = a^{-1} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}$. ■

185. Найдите значение выражения

$(\star)$ $\left(\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4}+\frac{a^2b^4-a^4b^2}{a^4+b^4-2a^2b^2}\right):(a-b)-b$

при $a=5,\ b=3$.

⧫ 5 ⧫ Выражение тождественно равно a.

Решение. Обозначим выражение $(\star)$ z,

$$z=\left(\frac{(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}+\frac{a^2b^2(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)^2}\right):(a-b)-b=$$

$$=\left(\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2-b^2}+\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\frac{1}{a-b}-b=$$

$$=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{1}{a-b}-b\ =\frac{(a^2-b^2)^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{1}{a-b}-b$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a+b}-b=a.\ \blacksquare$$

186. Найдите значение выражения

$(\star)$ $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

при $a=8,\ b=-27$.

⧫ -6.

Решение. Используем в числителе $(\star)$ формулы суммы кубов и разности кубов для выражений $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\pm\left(\sqrt[3]{b}\right)^3$. Выражение $(\star)$ тождественно равно

$$\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=2\sqrt[3]{b}.\ \blacksquare$$

187. Найдите значение выражения

$(\star)$ $\sqrt{13}-0{,}5\cdot\left(\sqrt{\sqrt{13}+3}-\sqrt{\sqrt{13}-3}\right)^2.$

⧫ 2.

Решение. Обозначим буквой z выражение $(\star)$. Используем формулу квадрата разности,

$$z=\sqrt{13}-0{,}5\cdot(\sqrt{13}+3-\sqrt{\sqrt{13}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{13}-3)=$$

$$=\sqrt{13}-0{,}5\cdot(2\sqrt{13}-\sqrt{13-4})=\sqrt{13}-\sqrt{13}+2.\ \blacksquare$$

188. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

♦ 1.

Решение. Обозначим буквой z левую часть заданного выражения. Последовательно перемножаем корни справа налево,

$z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$

$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4-2}}{\sqrt{2}}=1.$ ■

5.2.3. Однородные дробные выражения

Теоретические сведения Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией нулевой степени, если $\forall t\in R\Longrightarrow f(tx,ty)=f(x,y)$. Чтобы вычислить значение однородной функции нулевой степени $f(x,y)=\frac{px+qy}{ax+by}$ при условии, что величины x,y находятся в заданном пропорциональном отношении, $x:y=m:n$, можно заменить x,y на заданные в пропорции значения. Функция $f(x,y,z)$ называется однородной функцией нулевой степени, если $\forall t\in R,\ t\neq 0\Longrightarrow f(tx,ty,tz)=f(x,y,z)$. Чтобы вычислить значение однородной функции нулевой степени $f(x,y,z)=\frac{px+qy+rz}{ax+by+cz}$ при условии, что величины x,y,z находятся в заданном пропорциональном отношении, $x:y:z=m:n:k$, можно заменить x,y,z на заданные в пропорции значения. Другой способ решения: положите $x=m\cdot t$, $y=n\cdot t$, $z=k\cdot t$. Третий способ: поделите числитель и знаменатель на z и используйте пропорциональные отношения $x:z=m:k$, $y:z=n:k$.

189. Известно, что $(\star)\ \frac{x+2y}{x+4y}=3$. Найдите значение выражения $(\star\star)\ \frac{3x+y}{x-2y}$.

♦ 2

Решение. Из условия $(\star)$ следует, что $(\star\star\star)\ x=-5y$, причем $x\neq 0$. Осталось подставить $(\star\star\star)$ в $(\star\star)$. ■

190. Если ($\star$) $x^2 - 7xy + 12y^2 = 0$ и $y \neq 0$, то наименьшее возможное значение $\frac{x}{y}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$ ♦ 3.

Решение. Из условия ($\star$) следует, что или $x = y = 0$, или $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 7\frac{x}{y} + 12 = 0$, поэтому $\frac{x}{y} \in \{3; 4\}$. ■

191. Вычислите ($\star$) $\frac{x-2y+3z}{3x-2y+z}$, если ($\star\star$) $x : y : z = 1 : 2 : 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$ ♦ 3.

Решение. Равенство ($\star\star$) означает, что найдется такое $t \neq 0$, что $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$. Поэтому значение выражения ($\star$) равно $\frac{t-4t+9t}{3t-4t+3t} = \frac{6t}{2t} = 3$. ■

5.2.4. Преобразование многочленов

Теоретические сведения Несмотря на большое разнообразие

внешнего вида выражений, прочти всегда можно выявить внутреннюю структуру с помощью двух простых правил.

(1) Если выражение содержит несколько слагаемых, в каждом из которых присутствует некоторый параметр в некоторой степени, то следует вынести за скобку наименьшую из всех степеней (которая может быть как положительной, так и отрицательной.)

(2) После этого следует по возможности переставить слагаемые в таком порядке, чтобы степени одного из параметров образовывали арифметическую прогрессию.

192. Выражение ($\star$) $\frac{x^{4/3}-1}{x+x^{1/3}} + x^{-1/3}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x^{-\frac{2}{3}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x^{\frac{2}{3}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x^{\frac{1}{3}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x^{-\frac{1}{3}}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$ ♦ $x^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Все преобразования выполняем внутри ОДЗ. Заметим, что в задачах такого типа от нас не трубуют указывать ОДЗ в ответе. Поэтому будем следить только за тем, чтобы не сузить ОДЗ. Расширять ОДЗ имеем право. Таким образом, мы

имеем право сокращать числитель и знаменатель, так как при этом ОДЗ не может сузиться, но может расшириться. Обозначим буквой z левую часть выражения ($\star$). В знаменателе ($\star$) вынесем за скобки $x^{1/3}$, и получим
$z = \frac{x^{4/3}-1}{x^{1/3}(x^{2/3}+1)} + x^{-1/3}$.
Теперь в числителе используем формулу разности квадратов,
$z = \frac{(x^{2/3}-1)(x^{2/3}+1)}{x^{1/3}(x^{2/3}+1)} + x^{-1/3}$.
Сократим $x^{2/3}+1$, и получим
$z = \frac{x^{2/3}-1}{x^{1/3}} + x^{-1/3} = x^{1/3} - x^{-1/3} + x^{-1/3} = x^{1/3}$.
Это равенство, верное при всех допустимых значениях параметров, является тождеством. ■

193. Укажите значение выражения ($\star$) $54ab^2+8a^3-27b^3-36a^2b$ при $a=2$, $b=0{,}(3)$.

$\boxed{\mathbf{1}}\ \frac{35}{6}$ $\boxed{\mathbf{2}}\ \frac{25}{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}\ 27$ $\boxed{\mathbf{4}}\ -8$ $\boxed{\mathbf{5}}\ 8$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 27.

Решение. Обозначим буквой z левую часть выражения ($\star$). Переставим слагаемые так, чтобы степени параметра a образовывали убывающую арифметическую прогрессию с разностью -1,
$z = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.
Сгруппируем сомножители,
$z = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot 3b + 3\cdot(2a)\cdot(3b)^2 - (3b)^3$.
Получилась формула куба разности, $z = (2a-3b)^3$. ■

194. Выражение ($\star$) $\left(\sqrt[3]{2a^2}+2\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4a}\right)$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}\ a^4-4a$ $\boxed{\mathbf{2}}\ a^4+4a$ $\boxed{\mathbf{3}}\ \left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4a}\right)^3$ $\boxed{\mathbf{4}}\ \left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4a}\right)^3$

$\boxed{\mathbf{5}}\ \sqrt[3]{2a^4}-\sqrt[3]{128a}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\sqrt[3]{2a^4}-\sqrt[3]{128a}$.

Решение. Обозначим буквой z левую часть выражения ($\star$). Вынесем из первой скобки $2^{\frac{1}{3}}$, а из второй скобки $a^{\frac{1}{3}}$,
$z = (2a)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4a}+\sqrt[3]{16}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{4}\right)$. Теперь легко узнать формулу разности кубов, $z=(2a)^{\frac{1}{3}}\cdot(a-4)$. ■

195. Выражение $(\star)$ $\dfrac{\left(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4}\right)^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 1 $\boxed{\mathbf{5}}$ $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$ ♦ 1.

Решение. Используем оба правила,

$$(\star)=\frac{\left(ab^{3/4}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^3\right)^{2/3}}{a^{2/3}b^{1/2}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=\frac{a^{2/3}b^{1/2}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}{a^{2/3}b^{1/2}\left(a^{1/3}b^{1/4}-2\right)^2}=1.\ \blacksquare$$

5.2.5. Выделение полного квадрата

196. Найдите значение выражения $(\star)$ $16x^2-16x-71$ при $x=\dfrac{2-5\sqrt{3}}{4}$.

♦ 0.

Решение 1. Эффективный способ решения задач подобного вида состоит в выделении полного квадрата,
$16x^2-16x-71=(4x-2)^2-75$.
Теперь выполняем последовательно указанные арифметические действия, $4x=2-5\sqrt{3}$, $4x-2=-5\sqrt{3}$, $(4x-2)^2=75$, $(4x-2)^2-75=0$. $\blacksquare$

Решение 2. Сопряженное выражение $x_2=\dfrac{2+5\sqrt{3}}{4}$ вместе с заданным $x_1=\dfrac{2-5\sqrt{3}}{4}$ — корни квадратного уравнения $16x^2-16x-71=0$. $\blacksquare$

197. Найдите значение выражения $9x^2-12x+1$ при $x=\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$.

♦ 4.

Решение. Выделим полный квадрат, $9x^2-12x+1=(3x-2)^2-3$, далее $3x=\sqrt{7}+2$, $3x-2=\sqrt{7}$, $(3x-2)^2=7$, $(3x-2)^2-3=4$. $\blacksquare$

198. Найдите значение выражения $9x^2 - 5x - 6$ при $x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

♦ $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Решение. Выделим "неполный" квадрат,
$9x^2 - 5x - 6 = 9x^2 - 6x + 1 + x - 7 = (3x-1)^2 + x - 7.$
Затем
$3x = \sqrt{7} + 1$, $3x - 1 = \sqrt{7}$, $(3x-1)^2 = 7$,
$(3x-2)^2 + x - 7 = x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$. ■

199. Найдите значение выражения
$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ при $x = \frac{\sqrt{7}-5}{2}$.

♦ $\dfrac{27}{8}$.

Решение. Сгруппируем слагаемые,
$z = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) =$
$= [x(x+5)][(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] =$
$= (x^2+5x)(x^2+5x+4)(x^2+5x+6).$
Выделим полные квадраты,
$$z = \frac{\big((2x+5)^2 - 25)\big)\big((2x+5)^2 - 9)\big)\big((2x+5)^2 - 1\big)}{4^3}.$$
Теперь найдем последовательно $2x + 5 = \sqrt{7}$, $(2x+5)^2 = 7$,
$$z = \frac{(7-25)(7-9)(7-1)}{4^3} = \frac{(-18)(-2)\cdot 6}{4\cdot 4\cdot 4} = \frac{27}{8}\ . \blacksquare$$

5.2.6. Симметрические выражения

Теоретические сведения (1) Если $x + \frac{1}{x} = a$, $|a| \geqslant 2$, то

$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2-2)^2 - 2$.
(2) Если $x - \frac{1}{x} = b$, то
$x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2 + 2$, $x^3 - \frac{1}{x^3} = b^3 + 3b$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = (b^2+2)^2 - 2$.
(3) Аналогично преобразуются симметрические выражения с коэффициентами. Например, если $x + \frac{m}{x} = a$, $m > 0$, $|a| \geqslant 2\sqrt{m}$, то $x^2 + \frac{m^2}{x^2} = a^2 - 2m$, $x^3 + \frac{m^3}{x^3} = a^3 - 3ma$, и т.д.

200. Известно, что $(\star)$ $x + \dfrac{1}{x} = 3$. Найдите значение выражения $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

♦ 7

Решение. Возведем обе части $(\star)$ в квадрат, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 9$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = 9$. ■

201. Извество, что $(\star)$ $x + \dfrac{1}{x} = 6$. Найдите значение выражения $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$.

♦ $y = 198$.

Решение. Возведем обе части $(\star)$ в куб,
$x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3x\dfrac{1}{x}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 216$, $x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3 \cdot 6 = 216$. ■

202. Найдите сумму квадратов двух чисел, сумма и произведение которых равны соответственно 5 и 6.

♦ 13.

Решение. Пусть неизвестные числа равны x и y. Тогда $x + y = 5$, $xy = 6$, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 25 - 12 = 13$. В данном случае возможны два решения, $x = 2$, $y = 3$ или $x = 3$, $y = 2$. ■

203. Найдите сумму кубов двух чисел, сумма и произведение которых равны соответственно 5 и 6.

♦ 35.

Решение. Получим аналогично $x + y = 5$, $xy = 6$,
$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 125 - 3 \cdot 6 \cdot 5$. И здесь легко найти x и y, но лучше этого не делать. Во множестве задач эти числа будут иррациональными, и возводить их в квадрат или в куб не просто. ■

204. Вычислите $a^3 + 9a$, если $(\star)$ $a = \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1}$.

♦ 2.

Решение. Возведем обе части $(\star)$ в куб,
$(\star\star)$ $a^3 = \sqrt{28} + 1 - 3\sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}\cdot$
$\cdot\sqrt[3]{\sqrt{28} - 1}\left(\sqrt[3]{\sqrt{28} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1}\right) - (\sqrt{28} - 1)$.

Заметим, что
$\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}=3.$
Используем в $(\star\star)$ равенство $(\star)$ и приведем подобные. Получим $a^3=2-9a.$ ■

205. Найдите значение выражения
$\sqrt{8}\Big(\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}-\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}\Big).$
♦ 8.

Решение 1. Возведем в куб равенство
$z=\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}-\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}.$
Получится
$z^3=22\sqrt{2}-3\Big(\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}\Big)\cdot$
$\cdot\Big(\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}-\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}\Big).$
После приведения подобных получим
$z^3=22\sqrt{2}-3z\sqrt[3]{243-242}$, поэтому $z^3=22\sqrt{2}-3z.$
Запишем это уравнение в виде
$\frac{z^3}{2\sqrt{2}}+\frac{3z}{2\sqrt{2}}-11=0\Leftrightarrow\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^3+\frac{3}{2}\frac{z}{\sqrt{2}}-11=0,$
и сделаем замену переменной $z=t\sqrt{2}$. Получим уравнение с целочисленными коэффициентами $2t^3+3t-22=0$, которое имеет очевидный корень $t=2$. Остальные корни найдите и исследуйте самостоятельно. ■

Решение 2. Найдем такие рациональные числа x и y, что
$(\star)\quad\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=x\sqrt{2}+y\sqrt{3}.$
Возведем $(\star)$ в куб,
$9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})^3,$
используем формулу куба суммы и приведем подобные,
$\sqrt{2}(2x^3+9xy^2)+\sqrt{3}(6x^2y+3y^3)=9\sqrt{3}+11\sqrt{2}.$
Приравняем по отдельности слагаемые, содержащие $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$,
$\begin{cases}2x^3+9xy^2=11,\\6x^2y+3y^3=9.\end{cases}$
Одно из решений очевидно, $x=y=1$. Впрочем, несложно решить эту систему. Поделим уравнения одно на другое, $\dfrac{x}{y}\dfrac{2x^2+9y^2}{6x^2+3y^2}=\dfrac{11}{9}$. Введем новую переменную $t=\dfrac{x}{y}$, полу-

чим $t\dfrac{2t^2+9}{6t^2+3}=\dfrac{11}{9}$. Это уравнение очевидным способом приводится к кубическому, один из корней которого $t = 1$. Итак, $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Совершенно аналогично получим $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. ■

206. Найдите значение выражения
$\sqrt{2}\frac{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}$.

⧫ 3.

Решение. Найдем такие рациональные x и y, что
$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}$.
Действуем по схеме, использованной в предыдущей задаче, найдем $x = 3$, $y = 1$, поэтому $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$. Аналогично получим $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$. ■

5.2.7. Вычисление сложных процентов

207. В начале года в магазинах А и В цена автомобиля была одинакова и равна 1 млн руб. В магазине А цена повышалась на 4% каждые 4 месяца, а в магазине В цена повышалась на 6% каждые 6 месяцев. Найдите разницу в цене автомобиля в двух магазинах в конце года.

⧫ 1264.

Решение. В конце года цена автомобиля в магазине А будет равна $A = 100^3\cdot 1{,}04^3$, а в магазине В будет равна $B = 100\cdot 100^2\cdot 1{,}06^2$. Преобразуем эти выражения к виду $A = (100+4)^3$, $B = 100\cdot(100+6)^2$. Используем формулы сокращенного умножения, $A = 100^3+3\cdot 100^2\cdot 4+3\cdot 100\cdot 4^2+4^3$, $B = 100^3+2\cdot 100^2\cdot 6+100\cdot 6^2$. Не следует спешить производить вычисления, так как многие слагаемые сократятся при вычислении разницы,
$$\begin{cases} A = 100^3+12\cdot 100^2+48\cdot 100+64,\\ B = 100^3+12\cdot 100^2+36\cdot 100.\end{cases}$$
Итак, цена в магазине А будет больше на 1264 руб. ■

208. В начале года Билл положил 1 млн руб. в банк А, который начисляет 4% каждые 4 месяца, Джек положил такую же сумму в банк В, который начисляет 3% каждые 3 месяца. Найдите разницу вкладов в конце года.
♦ 644,81.
Решение. В конце года величина вклада А будет равна $A = 100^3 + 12 \cdot 100^2 + 48 \cdot 100 + 64$. Величина вклада В будет равна $B = 0{,}01 \cdot (100 + 3)^4$. Используем формулы сокращенного умножения, $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$, $B = 0{,}01 \cdot (100^4 + 4 \cdot 100^3 \cdot 3 + 6 \cdot 100^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 100 \cdot 3^3 + 3^4$, $B = 100^3 + 12 \cdot 100^2 + 54 \cdot 100 + 108 + 0{,}81$. Итак, вклад В будет больше на 644,81 руб. ■

209. В начале года Билл купил доллары на 1 млн руб., Джек купил евро на такую же сумму. Доллар по отношению к рублю становился дешевле на 4% каждые 4 месяца, евро по отношению к рублю становился дешевле на 3% каждые 3 месяца. В конце года они перевели свои деньги в рубли (предполагаем, что обмен во всех случаях проводится по курсу без комиссии). Найдите разницу вкладов в конце года.
♦ 556,81.
Решение. Пусть $\begin{cases} A = 100^3 - 12 \cdot 100^2 + 48 \cdot 100 - 64, \\ B = 100^3 - 12 \cdot 100^2 + 54 \cdot 100 - 108 + 0{,}81. \end{cases}$
Сумма В будет больше на 556,81 руб. ■

Теоретические сведения

(1) Если $A = (1 + \frac{m}{100})^n$, $B = (1 + \frac{n}{100})^m$, где m и n — натуральные числа, $0 < m < n$, то $A > B$.
(2) Если $A = (1 + \frac{p}{n})^n$, $B = (1 + \frac{p}{m})^m$, где m и n — натуральные числа, $0 < m < n$, p — действительное число, $|p| < n$, то $A > B$.

Три последних задачи иллюстрировали это утверждение.[3]

[3]Если n — большое число, p — не очень большое число, то $(1 + \frac{p}{n})^n \approx e^p$, число $e \approx 2{,}71828\ldots$ — так называемое основание натуральных логарифмов. Это утверждение не входит в школьную программу, смысл требований "большое число", "не очень большое число", а также пронятие $\approx$ будет подробно пояснены в курсе математического анализа. Однако, всякий грамотный человек, читающий газеты, знает, что для удвоения ВВП за 10 лет требуется прирост около 7% в год. Оценим: $1{,}07^{10} \approx 2{,}71^{0{,}7} = 1{,}967\ldots$ Если Вам предлагают кредит в 1 млн руб. из расчета 10% годовых, то за 10 лет сумма кредита станет равной примерно 2,72 млн руб.

5.2.8. Разложения на множители

Теоретические сведения Разность любых натуральных степеней и сумма нечетных натуральных степеней разлагаются на множители:
$x^8 - y^8 = (x-y)(x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7)$,
$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.

Эти формулы являются обобщением известных формул разности кубов и разности квадратов.
Эти формулы применяются для вычисления суммы отрезка геометрической прогрессии, например, $3^7 + 3^6 + 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^8-1}{3-1}$.
Аналогично можно вычислить сумму "обобщенной" геометрической прогрессии,
$3^7 + 3^6 \cdot 2 + 3^5 \cdot 2^2 + 3^4 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^4 + 3^2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^6 + 2^7 = \frac{3^8-2^8}{3-2}$.

5.2.9. Деление многочленов

Теоретические сведения Если многочлен

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$,
где $a_n \neq 0$, обращается в нуль в точке $x = x_0$, то найдется такой многочлен на 1 меньшего порядка
$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$,
что $f(x) = g(x)(x - x_0)$, причем $b_{n-1} = a_n$.

210. Решите уравнение $x^3 - 20x^2 + 103x - 84 = 0$.
♦ $x \in \{1;\ 7;\ 12\}$.
Решение. Так как $1 - 20 + 103 - 84 = 0$, то $x = 1$ — корень. Поэтому найдутся такие числа b, c, что
$(\star)\ \ x^3 - 20x^2 + 103x - 84 = (x-1)(x^2 + bx + c)$.
Ставним свободные члены левой и правой частей $(\star)$, получим уравнение $-84 = -c$. Таким образом,
$(\star\star)\ \ x^3 - 20x^2 + 103x - 84 = (x-1)(x^2 + bx + 84)$.
Сравним члены содержашие x в левой и правой частей $(\star\star)$, получим уравнение $103 = 84 - b$, откуда $b = -19$. Таким образом,
$x^3 - 20x^2 + 103x - 84 = (x-1)(x^2 - 19x + 84)$.

Оставшиеся два корня находим из квадратного уравнения $x^2 - 19x + 84 = 0$, $x \in \{7;\ 12\}$ ■

Теоретические сведения Операцию сравнения коэффициентов в левой и правой частях удобно оформлять в виде деления столбиком. Приведем примеры деления без остатка и с остатком.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -20x^2 & +103x & -84 & x-1 \\ \hline
x^3 & -x^2 & & & x^2-19x+84 \\
& -19x^2 & +103x & -84 & \\
& -19x^2 & +19x & & \\
& & 84x & -84 & \\
& & 84x & -84 & \\
& & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -20x^2 & +103x & & x-1 \\ \hline
x^3 & -x^2 & & & x^2-19x+84 \\
& -19x^2 & +103x & & \\
& -19x^2 & +19x & & \\
& & 84x & & \\
& & 84x & -84 & \\
& & & 84 &
\end{array}$$

В последней строке находится остаток. Нуль является признаком того, что делимое делится на делитель нацело. Примеры показывают, что $\dfrac{x^3 - 20x^2 + 103x - 84}{x-1} = x^2 - 19x + 84$, $\dfrac{x^3 - 20x^2 + 103x}{x-1} = x^2 - 19x + 84 + \dfrac{84}{x-1}$.

211. Разложите на множители выражение $2x^2 - 5xy + 2y^2$.

♦ $(x-2y)(2x-y)$.

Решение. Предположим, что $y \neq 0$. Тогда

$f = 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{5}{2}\frac{x}{y} + 1\right)$.

Выполним замену

$t = \dfrac{x}{y}$, $f = 2y^2\left(t^2 - \dfrac{5}{2}t + 1\right)$.

Корни квадратного трехчлена равны $t \in \{\frac{1}{2};\, 2\}$. Поэтому
$f = 2y^2\left(\frac{x}{y} - 2\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right)$. ■

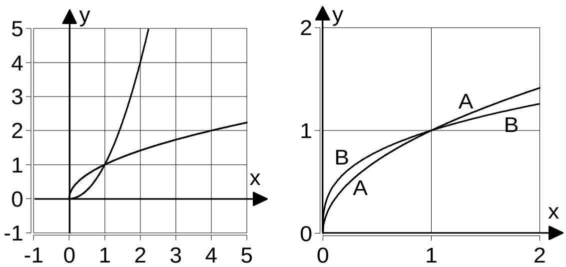
212. Разложите на множители выражение
$4y^4 - 20xy^3 + 33x^2y^2 - 20x^3y + 4x^4$.
♦ $(x - 2y)^2(2x - y)^2$.
Решение. Аналогично получим $f = y^4(4t^4 - 20t^3 + 33t^2 - 20t + 4)$. Корни симметрического многочлена находятся заменой $z = t + \frac{1}{t}$, $z \in \{\frac{1}{2};\, 2\}$. Поэтому $f = y^4(t-2)^2 \cdot (2t-1)^2$. ■

213. Разложите на множители выражение $x^4 + y^4$.
♦ $(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$.
Решение. Заметим, что $x^4 + y^4 = x^2y^2\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) =$
$$= x^2y^2\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\right] = x^2y^2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \sqrt{2}\right). \ \blacksquare$$

5.3. Иррациональные выражения

5.3.1. Графики квадратного и кубического корней

Как известно, число $\sqrt{a}$ при $a \geqslant 0$ определяется двумя условиями,
(1) $\sqrt{a} \geqslant 0$, **(2)** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
Квадратный корень из неотрицательного числа существует и имеет единственное значение, так как функция $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ монотонна и непрерывна. Более подробно пояснять эти понятия мы не будем.
Используя признаки делимости, можно доказать, что квадратный корень из целого числа — целое число или иррациональное число. Квадратный корень из рационального числа — иррациональное число, если только числитель и знаменатель несократимой дроби под знаком корня не являются оба полными квадратами.
Свойства корней квадратного и кубического удобно исследовать, имея в виду, что функция $y = \sqrt{x}$ является обратной по отношению к функции $y = x^2$, $x \geqslant 0$, а функция $y = \sqrt[3]{x}$ является



(a) (b)

Рис. 56. Квадратный и кубический корни

обратной по отношению к функции $y = x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому напомним свойства взаимно обратных функций.
Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$. Если "прямая" функция $y = f(x)$ строго монотонна, то обратная функция определена на множестве значений функции $y = f(x)$ и принимает все значения из области определения функции $y = f(x)$. Обратная функция также строго монотонна и имеет тот же характер монотонности. Для получения явного выражения обратной функции следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно x и затем сделать замену y на x и x на y.
На рис. 56a показаны графики $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на промежутке $x \in [0; 5)$, на рис. 56b показаны графики $y = \sqrt{x}$ (помечен A) и $y = \sqrt[3]{x}$ (помечен B) на промежутке $x \in [0; 2)$.
Приведем примеры взаимно обратных функций.
(1) $y = x^2, x \geqslant 0$ и $y = \sqrt{x}$, **(2)** $y = x^2, x \leqslant 0$ и $y = -\sqrt{x}$,
(3) $y = -x^2, x \leqslant 0$ и $y = -\sqrt{-x}$, **(4)** $y = -x^2, x \geqslant 0$ и $y = \sqrt{-x}$,
(5) $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, **(6)** $y = -x^3$ и $y = \sqrt[3]{-x}$, **(7)** $y = x^3 + 1$ и $y = \sqrt[3]{x-1}$,
(8) $y = (x-1)^3$ и $y = \sqrt[3]{x} + 1$, **(9)** $y = \frac{x}{x-1}$ и $y = \frac{x}{x-1}$.

5.3.2. Свойства корней

Во всех формулах этого параграфа $n \in N$; $m \in N$.

214. Перечислим основные формулы (справедливые для всех значений переменной из области определения, если не указано особое).

(1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, **(2)** $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$, **(3)** $x^m \cdot y^m = (xy)^m$,
(4) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, **(5)** $x^0 = 1,\ x > 0$, **(6)** $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, x \neq 0$,
(7) $x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$, **(8)** $x^{-m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-m}$, **(9)** $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$,
(10) $x^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, **(11)** $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$, **(12)** $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$,
(13) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$, **(14)** $\sqrt{x^2} = |x|$, **(15)** $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$,
(16) $\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$, **(17)** $\sqrt[3]{x^3} = x$, **(18)** $\sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$,
(19) $\sqrt{x^3} = \left(\sqrt{x}\right)^3$, **(20)** $\sqrt{x^4} = \left(\sqrt{x}\right)^4$.

215. Выражение $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^{-3}}}}$ при $a > 0$ тождественно равно
$\boxed{1}$ $a^{7/8}$ $\boxed{2}$ $a^{8/7}$ $\boxed{3}$ a $\boxed{4}$ $a^{5/8}$ $\boxed{5}$ $a^{5/9}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $a^{5/8}$.

Решение. $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^{-3}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 a^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a^{\frac{5}{4}}} = a^{\frac{5}{8}}$. ■

216. Найдите значение выражения $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10}$.
♦ 120.

Решение. $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} = 12\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 12 \cdot 10$. ■

217. Найдите значение выражения $(\star)$ $\sqrt{6}\left|7\sqrt{6} - 6\sqrt{8}\right| + 12\sqrt{12}$.
♦ 42.

Решение. Исследуем знак выражения под знаком модуля, $7\sqrt{6} - 6\sqrt{8} = \sqrt{294} - \sqrt{288} > 0$, поэтому модуль снимается с плюсом, так что $(\star)$ равно $\sqrt{6}\left(7\sqrt{6} - 6\sqrt{8} + 6\sqrt{8}\right) = 42$. ■

218. Решите уравнение $(\star)$ $\frac{\sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[15]{x^3} \cdot x^{11/12}}{x^{2/3} \cdot x^{3/8}} = 2$.
♦ $x = 32$.

Решение. $\dfrac{\sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[15]{x^3} \cdot x^{11/12}}{x^{2/3} \cdot x^{3/8}} = \dfrac{x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{3}{15}} \cdot x^{\frac{11}{12}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{8}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{11}{12}}}{x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}}} =$
$= x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{11}{12}-\frac{2}{3}-\frac{3}{8}} = x^{\frac{1}{5}}$, поэтому $(\star) \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^5$. ■

219. Найдите значение выражения $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt[10]{3} \cdot \frac{1-3^{0,5}}{3^{-0,4}}$.
♦ 4.

Решение. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt[10]{3}\cdot\dfrac{1-3^{0,5}}{3^{-0,4}} =$
$= \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 3^{\frac{1}{10}+\frac{4}{10}}\cdot(1-\sqrt{3}) =$
$= \sqrt{3}+1-\sqrt{3}\cdot(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}+3.$ ■

220. Найдите значение выражения $\frac{7\cdot5^a\cdot4^b}{5^{a-1}\cdot2^{2b}+5^a\cdot2^{2b-1}}$
при $a = 3{,}14159265359$.
♦ 10.

Решение. $7\cdot\dfrac{5^a\cdot4^b}{5^{a-1}\cdot2^{2b}+5^a\cdot2^{2b-1}} = 7\cdot\dfrac{5^a\cdot4^b}{\frac{1}{5}\cdot5^a\cdot4^b+\frac{1}{2}5^a\cdot4^b} =$
$= 7\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = 1.$ ■

221. Найдите значение выражения $\left(3\sqrt{0,(3)}-2\sqrt{1,5}+2\sqrt{3/2}\right)^2$.
♦ 3.

Решение. $3\sqrt{0,(3)}-2\sqrt{1,5}+2\sqrt{3/2} = 3\sqrt{\frac{1}{3}}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}.$
■

222. Найдите значение выражения
$\left[\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2+2\right]^2.$
♦ 20.

Решение. Пусть $x = \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2$. Используем формулу сокращенного умножения $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, получим
$x = \sqrt{5}+2-2\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}-2.$
Перемножим корни и приведем подобные. Получим
$x = 2\sqrt{5}-2\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2} = 2\sqrt{5}-2.$ ■

5.3.3. Извлечение корня квадратного из полного квадрата

223. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1\right)^2$.

♦ 3.

Решение. Пусть $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. Заметим, что
$x = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\cdot 1 + 1^2}$, поэтому
$x = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$. ■

224. Значение выражения $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{21}-\sqrt{1}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{21}+\sqrt{1}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $x = \sqrt{10-2\sqrt{21}}$. Заметим, что
$x = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$, поэтому
$x = \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2} = \left|\sqrt{7}-\sqrt{3}\right| = \sqrt{7}-\sqrt{3}$. ■

225. Значение выражения $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $2\sqrt{5}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $4\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $4\sqrt{5}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $2\sqrt[4]{15}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $2\sqrt{3}$.

Решение 1. Пусть $x = \sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}}$. Тогда $x^2 = 16 - 2\sqrt{64-60} = 12$. Так как к тому же $x > 0$, то $x = \sqrt{12}$. ■

Решение 2. Заметим, что $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3}$. Поэтому $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$. Аналогично, $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. ■

226. Значение выражения ($\star$) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-4}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 4 $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\sqrt{6}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-2\sqrt{6}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $-\sqrt{3}$.

Решение. Любым из способов, использованных в предыдущей задаче, получим $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$, $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3}$. Поэтому значение выражения ($\star$) равно $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{3-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-2)}$. Осталось избавиться от иррациональности в знаменателях, $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)}{2}$, и привести подобные члены. ■