5.3.4. Извлечение корня кубического из полного куба

227. Значение выражения $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}+1$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{2}-1$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{2}+2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{2}+3$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{3}+1$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $\sqrt{2}+1$.

Решение. Попытаемся представить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ в виде $x\sqrt{2}+y$, где x и y – рациональные числа. Решим уравнение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=x\sqrt{2}+y$. Возведем в куб и получим
$5\sqrt{2}+7=2\sqrt{2}x^3+6x^2y+3\sqrt{2}xy^2+y^3$.
Соберем и приравняем по отдельности слагаемые, содержащие и не содержащие $\sqrt{2}$,
$(5-2x^3-3xy^2)\sqrt{2}+7-6x^2y-y^3=0$, $\begin{cases}2x^3+3xy^2=5,\\ 6x^2y+y^3=7.\end{cases}$
Одно из решений очевидно, $x=1$, $y=1$. Имеются и другие решения, для которых неизвестные будут иррациональными выражениями. ■

228. Значение выражения $\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\sqrt{\sqrt{2}-1}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ -1 $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{\sqrt{2}+1}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

Решение 1. $z=\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^6=\left(\sqrt{2}-1\right)^3\left(7+5\sqrt{2}\right)^2=$
$=\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(7+5\sqrt{2}\right)^2=\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}+7\right)=$
$5\sqrt{2}+7$.
В процессе вычислений мы увидели, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7$. Теперь аналогично получим $\left(\sqrt{2}+1\right)^3=5\sqrt{2}+7$. Итак, $z^6=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$. Чтобы получить ответ, заметим, что $z>0$. ■

Решение 2. Используем решение предыдущей задачи,
$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$, $z=\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$,
$z=\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\sqrt{1+\sqrt{2}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. ■

229. Значение выражения $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{3}-1$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{3}+2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{2}+3$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{3}+1$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$ ♦ $\sqrt{3}+1$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}=x\sqrt{3}+y$, где x и y – рациональные числа. Тогда $6\sqrt{3}+10=3\sqrt{3}x^3+9x^2y+3\sqrt{3}xy^2+y^3$, $\begin{cases}3x^3+3xy^2=6,\\9x^2y+y^3=10,\end{cases}$ $x=1$, $y=1$. ■

230. Значение выражения $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}+1$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{3}+1$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=x\sqrt{3}+y\sqrt{2}$, где x и y – рациональные числа. Тогда
$9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=3\sqrt{3}x^3+9\sqrt{2}x^2y+6\sqrt{3}xy^2+2y^3$,
$\begin{cases}3x^3+6xy^2=9,\\9x^2y+2y^3=11,\end{cases}$ $x=1$, $y=1$. ■

5.3.5. Симметрические иррациональные выражения

231. Выражение $\sqrt{(a-b)^2+4ab}$ тождественно равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $|a+b|$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $|a-b|$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $|a|+|b|$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $|a|-|b|$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $|2ab|$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$ ♦ $|a+b|$.

Решение. Выражение $\sqrt{(a-b)^2+4ab}=\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ тождественно равно $|a+b|$. ■

232. Выражение $\frac{a}{a^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2}$ при $a<0$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pm 0,5$ $\boxed{\mathbf{2}}$ ± 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ $0,5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-0,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 1

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$ ♦ $-0,5$.

Решение. $\dfrac{a}{a^2+1}\sqrt{1+\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2}=\dfrac{a}{a^2+1}\sqrt{\dfrac{4a^2+a^4-2a^2+1}{4a^2}}=$
$=\dfrac{a}{a^2+1}\dfrac{\left|a^2+1\right|}{2|a|}$. Остается заметить, что $|a|=-a$. ■

233. Выражение ($\star$) $\left(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)^{1/2}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{a+b}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $a+b$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{-a-b}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Решение. Выражение ($\star\star$) $a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$ существует при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ при этом условии ($\star\star$) тождественно равно $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, поэтому выражение ($\star$) тождественно равно $\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right| = \sqrt{a}+\sqrt{b}$. ■

234. Выражение ($\star$) $\left(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)^{1/2}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{a-b}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{b}-\sqrt{a}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$.

Решение. Выражение ($\star\star$) $a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$ существует при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ при этом условии ($\star\star$) тождественно равно $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, поэтому выражение ($\star$) тождественно равно $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$ и упростить его (снять модуль) в отличие от предыдущей задачи невозможно. ■

5.3.6. Преобразование длинного радикала

Теоретические сведения Множество задач решаются с использованием тождеств

($\star$) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}$,

($\star\star$) $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}} = \left|\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right|$,

которые называют иногда формулами длинного радикала. Обе формулы справедливы при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ -a \leqslant b \leqslant a. \end{cases}$ Существует множество разновидностей, переходящих одна в другую после выполнения замены переменной:

$\sqrt{a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} = \sqrt{a-b}+\sqrt{b}$,

$\sqrt{a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} = \left|\sqrt{a-b}-\sqrt{b}\right|,$

обе формулы справедливы при $\begin{cases} b \geqslant 0, \\ a \geqslant b. \end{cases}$ Мы не рекомендуем Вам запоминать и использовать эти формулы, так как существует два простых и эффективных метода преобразования выражений типа $(\star)$ и $(\star\star)$, а именно,

(1) метод замены переменных,

(2) метод возведения в квадрат.

235. Если $a = \sqrt{\dfrac{2005}{2006}} + \sqrt{\dfrac{2007}{2006}}$, то значение выражения $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2\sqrt{a-1}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $2a-1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ -2 $\boxed{\mathbf{5}}$ $2\sqrt{a^2-1}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 2.

Решение 1. Пусть $(\star)$ $z = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. Возведем в квадрат выражение $(\star)$, получим $z^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-4a+4} \Leftrightarrow z^2 = 2a + 2|a-2|$.

Так как $a^2 = \dfrac{2005}{2006}\dfrac{2007}{2006} + 2\sqrt{\dfrac{2005 \cdot 2007}{2006^2}} = 2 + 2\sqrt{\dfrac{2006^2-1}{2006^2}}$, то $a^2 \in (2;\,4)$. К тому же $a > 0$, поэтому $a \in (\sqrt{2};\,2) \Rightarrow |a-2| = 2-a$ $\Rightarrow z^2 = 2a - 2(a-2) = 4$. Поскольку $z \geqslant 0$, то $z = 2$. ■

Решение 2. Выполним замену переменной $t = \sqrt{a-1}$. Тогда выражение $(\star)$ равно $z = \sqrt{t^2+2t+1} + \sqrt{t^2-2t+1}$, $z = |t+1| + |t-1|$. Используем оценку $a \in (\sqrt{2};\,2) \Rightarrow t \in (0;\,1)$, поэтому $z = t+1-(t-1) = 2$. ■

236. Если $a = \sqrt{\dfrac{2007}{2006}} + \sqrt{\dfrac{2006}{2007}}$, то выражение $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2\sqrt{a-1}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $2a-1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ -2 $\boxed{\mathbf{5}}$ $2\sqrt{a^2-1}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $2\sqrt{a-1}$.

Решение 1. Теперь $a > 0$ и $a^2 = 2 + \dfrac{2007}{2006} + \dfrac{2006}{2007} \in (4;\ 6)$, $a \in (2;\ 3)$. Пусть $z = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$. Действуя так же, как при решении предыдущей задачи, получим $z^2 = 2a + 2|a-2|$. Но теперь модуль раскрывается "с плюсом", $|a-2| = a-2$, так что $z^2 = 2a + 2(a-2)$, $z = \sqrt{4(a-4)}$. ■

Решение 2. Замена переменной $t = \sqrt{a-1}$ приводит к равенству $z = |t+1| + |t-1|$, где $t \in (1;\ \sqrt{2})$, поэтому
$z = t + 1 + (t-1) = 2t$. ■

237. Выражение $\sqrt{\left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right)^2 - 8\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 + 48}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\left|x - \dfrac{2}{x}\right|$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\left|x^2 - \dfrac{4}{x^2}\right|$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\left(x^2 - \dfrac{2}{x^2}\right)^2$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^2$.

Решение. Пусть $t = x + \dfrac{2}{x}$, $z = \sqrt{\left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right)^2 - 8\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 + 48}$, $z = \sqrt{(t^2-4)^2 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 16t^2 + 64} = \left|t^2 - 8\right|$. Заметим, что $t^2 - 8 = \left(x - \dfrac{2}{x}\right)^2$. ■

238. Если $x = \dfrac{a^7+1}{a^7-1}$ и $a \in (0;\ 1)$, то выражение
$\left(\sqrt[7]{\dfrac{x+1}{x-1}} + \sqrt[7]{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{1-a}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$.

Решение. Преобразуем $x+1=\dfrac{2a^7}{a^7-1}$, $x-1=\dfrac{2}{a^7-1}$, $\sqrt[7]{\dfrac{x+1}{x-1}}=a$. Теперь $\left(a+\dfrac{1}{a}-2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{a^2-2a+1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a}}$. Остается снять модуль, используя условие $a\in(0;\,1)$. ■

239. Вычислите $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$, если $a=\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{10+2\sqrt{21}}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $5+\sqrt{21}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ 2.

Решение. Пусть $z=\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$, $t=\sqrt{a^2-1}$. Тогда $z=\sqrt{t^2+2t+1}-\sqrt{t^2-2t+1}$ $|t+1|-|t-1|$. Так как $t>1$, то $z=2$. ■

240. Если $x\geqslant 4$, то выражение

$(\star)$ $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $2\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{x-2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\sqrt{x-2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{2x-4}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$ ♦ $2\sqrt{x-2}$.

Решение 1. Пусть $(\star\star)$ $z=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$. Очевидно, $z\geqslant 0$. Возведем выражение $(\star\star)$ в квадрат, $z^2=x+2\sqrt{2x-4}+x-2\sqrt{2x-4}+2\sqrt{x^2-4(2x-4)}$. Сравним $x\bigvee 2\sqrt{2x-4}\Leftrightarrow x^2\bigvee 8x-16\Leftrightarrow x^2-8x+16\bigvee 0$. Так как $x^2-8x+16=(x-4)^2\geqslant 0$, то $x\geqslant 2\sqrt{2x-4}$, поэтому все корни существуют. Учтем, что в указанном промежутке для x имеем $|x-4|=x-4$, так что $z^2=4x-8$. Еще раз вспомним, что $z\geqslant 0$ и получим ответ, $z=\sqrt{4x-8}$. ■

Решение 2. Выполним замену переменной $t=\sqrt{x-2}$. Тогда $z=\sqrt{t^2+2\sqrt{2}t+2}+\sqrt{t^2-2\sqrt{2}t+2}$. Выделим полные квадраты под знаками квадратных корней, $z=\sqrt{(t+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(t-\sqrt{2})^2}$, так что $z=t+\sqrt{2}+\left|t-\sqrt{2}\right|$. Так как $t\geqslant\sqrt{2}$, то $\left|t-\sqrt{2}\right|=t-\sqrt{2}$, $z=2t$. ■

241. Выражение $(\star)$ $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)^{1/2}\cdot\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1/2}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{a-b}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{b-a}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\sqrt{a-b}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\sqrt{b-a}$.

Решение. Выполним сначала приведение к общему знаменателю под знаками корней. Это преобразование не может изменить область допустимых значений, так что выражение $(\star)$, которое мы для краткости обозначим z, равно $\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab}\right)^{1/2}\cdot\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)^{-1/2}$. Теперь ясно, что $(\star)$ существует при $ab>0\bigcap b>a$. При этом условии $z=\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b-a}}$. ■

242. Выражение
$\left(x^2+2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\right)^{-1/2}-\left(x^2+2\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\right)^{-1/2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{-2}{x^2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{2}{x^2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 2

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $\dfrac{-2}{x^2}$.

Решение 1. Пусть
$z=\left(x^2+2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\right)^{-1/2}-\left(x^2+2\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\right)^{-1/2}$,
$t=\sqrt{x^2+1}\in[1;\ +\infty)$. Тогда
$z=(t^2+2t+1)^{-1/2}-(t^2-2t+1)^{-1/2}=\dfrac{1}{|t+1|}-\dfrac{1}{|t-1|}$.
Это выражение существует при $t>1$, и при этом $z=\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t-1}=\dfrac{-2}{t^2-1}$. ■

Решение 2. Данный пример представляет класс задач, в которых метод возведения в квадрат при недостаточном внимании приведет к ошибке. Легко получить выражение $z^2=\frac{4}{(t^2-1)^2}$. Чтобы получить верный ответ, нужно сделать простую оценку $z<0$. ■

5.3.7. Избавление от иррациональности в знаменателе

243. Значение выражения ($\star$) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ -1 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{3}+1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{2}+1$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 1

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ -1.

Решение. Домножим числитель и знаменатель выражения $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ на так называемое сопряженное выражение, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, и получим $A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$. Используем формулу сокращенного умножения, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Получим $A = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Аналогично поступим и со вторым слагаемым, $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$. Таким образом, значение выражения ($\star$) равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-1+\sqrt{2} = -1$. ■

244. Укажите числовое значение выражения
$\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} + \dfrac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{7}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{11}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ 0 $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{5}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\sqrt{5}$.

Решение. Избавимся от иррациональности в знаменателе каждой из дробей, $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} + \dfrac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}} =$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{11}-\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}. \ \blacksquare$$

245. Значение выражения ($\star$) $\sqrt{x^2-4x+4}$ при ($\star\star$) $x = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 2 $\boxed{\mathbf{4}}$ $2-\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt{3}-2$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\sqrt{3}$.

Решение. Так как под знаком квадратного корня в ($\star$) стоит полный квадрат, то это выражение тождественно равно $|x-2|$.

Избавимся от иррациональности в знаменателе ($\star\star$) и получим $x = 2+\sqrt{3}$. Так как $x > 2$, то $|x-2| = x-2 = \sqrt{3}$. ■

246. Найдите числовое значение выражения
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$
♦ 9

Решение. После избавления от иррациональности в знаменателе получим 198 слагаемых, из которых 196 сократятся, останется выражение $\sqrt{10}-\sqrt{1}$. ■

247. Решите уравнение
$$(\star)\quad \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{\sqrt{x+127}+\sqrt{x+128}}+\frac{1}{\sqrt{x+128}+\sqrt{x+129}}=8.$$
♦ $x = 15$.

Решение. Обозначим буквой z левую часть уравнения ($\star$), и избавимся от иррациональности в знаменателе каждого из слагаемых, $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})+\dots+(\sqrt{x+128}-\sqrt{x+127})+(\sqrt{x+129}-\sqrt{x+128})=8$. После сокращения (которое не изменяет ОДЗ и поэтому является равносильным преобразованием) получим
$(\star\star)\ \sqrt{x+129}-\sqrt{x+1}=8.$
Перенесем второе слагаемое левой части в правую часть и заметим, что обе части больше нуля. Поэтому можно равенство ($\star\star$) возвести в квадрат, причем это преобразование будет равносильным, $(\sqrt{x+129})^2=(\sqrt{x+1}+8)^2$. Внутри ОДЗ $x+1 \geqslant 0$, $x+129 \geqslant 0$, поэтому равносильными ($\star$) будут и уравнения $x+129 = x+1+16\sqrt{x+1}+64$, $4=\sqrt{x+1}$, $16 = x+1$. ■

248. Выражение $z = \dfrac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a+1}}$ при $a > 0{,}5$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{-2}{\sqrt{2a-1}-\sqrt{2a+1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{2a-1}-\sqrt{2a+1}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\sqrt{2a}$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{2a+1}-\sqrt{2a-1}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $4a$

Ответ $\boxed{1}$ ♦ $\dfrac{-2}{\sqrt{2a-1}-\sqrt{2a+1}}$.

Решение 1. Избавимся от иррациональности в знаменателях, $z = (\sqrt{2a}+\sqrt{2a-1}) + (\sqrt{2a+1}-\sqrt{2a})$. Приведем подобные (легко убедиться, что это равносильное преобразование), $(\star)$ $z = \sqrt{2a-1}+\sqrt{2a+1}$. Теперь переведем иррациональность обратно в знаменатель. Для этого домножим и поделим $(\star)$ на $\sqrt{2a+1}-\sqrt{2a-1}$. Получим $z = \frac{2}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{2a-1}}$. ■

249. Решите уравнение $(\star)$ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2x-4} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x-53}$.
♦ $x = 19$.
Решение. Пусть $a = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Тогда уравнение $(\star)$ можно записать в виде $a^{2x-4} = b^{-x+53}$. Теперь заметим, что $ab = 1$, $b = a^{-1}$, поэтому уравнение $(\star)$ равносильно $a^{2x-4} = a^{-x+53}$. Следовательно, $2x-4 = -x+53$, $3x = 57$, $x = 19$. ■

5.3.8. Сравнение и оценка иррациональных выражений

Теоретические сведения Сравнением называется пара выражений, соединенная знаком $\bigvee$, например, $3 \bigvee 4$. Сравнение $x \bigvee y$ может иметь одно из трех значений, а именно $x < y$, $x = y$, $x > y$, где x и y — сравниваемые выражения. Теоретически возможны сравнения с параметром, в которых при некоторых значениях параметра сравнение имеет одно значение, а при других — противоположное. В данной книге такие сравнения не рассматриваются. Правила преобразования сравнений совпадают с правилами тождественных преобразований неравенств. Например, если сравнение $x \bigvee y$ имеет значение $x < y$, и к тому же $x > 0$ и $\alpha > 0$, то сравнение $x^\alpha \bigvee y^\alpha$ имеет то же значение, а именно $x < y$. Условимся считать всегда эквивалентными сравнения типа $x \bigvee y$ и $y \bigwedge x$. Например при $x > 0 \bigcap y > 0$ эквивалентны сравнения $x \bigvee y$ и $x^{-1} \bigwedge y^{-1}$. Решение сравнения состоит в последовательности эквивалентных преобразований, некоторые из которых могут состоять также в переходе от сравнения типа $x \bigvee y$ к сравнению типа $x_1 \bigwedge y_1$.

250. Сравните $x = \left(\sqrt{5}\right)^6$ и $y = \left(\sqrt{6}\right)^5$.

♦ $x > y$.

Решение. Заметим, что $x > 0$ и $y > 0$, поэтому сравнение $x \bigvee y$ можно возвести в степень 2, и при этом получится равносильное сравнение, $5^6 \bigvee 6^5$, $15625 \bigvee 7776$. ■

251. Сравните $x = \sqrt[6]{5}$ и $y = \sqrt[5]{6}$.

♦ $x > y$.

Решение. Так как $x > 0$ и $y > 0$, сравнение $x \bigvee y$ можно возвести в степень 30, и при этом получится равносильное сравнение, $6^6 \bigvee 5^5$. ■

252. Сравните $x = \sqrt[6]{6}$ и $y = \sqrt[5]{5}$.

♦ $x < y$.

Решение. И теперь $x > 0$ и $y > 0$, так что сравнение $x \bigvee y$ можно возвести в степень 30, получив равносильное сравнение $6^5 \bigvee 5^6$. ■

Решение всех остальных задач этого параграфа также начинаются с исследования знаков частей сравнения.

253. Сравните $x = \sqrt[12]{2}$ и $y = \sqrt[15]{3}$.

♦ $x < y$.

Решение. Возведем сравнение $x \bigvee y$ в степень 60, получив равносильное сравнение, $2^5 \bigvee 3^4$, $32 \bigvee 81$. ■

254. Сравните $x = \sqrt{88} - \sqrt{87}$ и $y = \sqrt{87} - \sqrt{86}$.

♦ $x < y$.

Решение. Переведем иррациональность в знаменатель,
$\frac{1}{\sqrt{88}+\sqrt{87}} \bigvee \frac{1}{\sqrt{87}+\sqrt{86}}$, $\sqrt{88} + \sqrt{87} \bigwedge \sqrt{87} + \sqrt{86}$. ■

255. Сравните $x = \sqrt{86} + \sqrt{89}$ и $y = \sqrt{87} + \sqrt{88}$.

♦ $x < y$.

Решение. Возведем сравнение $x \bigvee y$ в квадрат,
$86 + 2\sqrt{86 \cdot 89} + 89 \bigvee 87 + 2\sqrt{87 \cdot 88} + 88$, $\sqrt{86 \cdot 89} \bigvee \sqrt{87 \cdot 88}$, возведем в квадрат еще раз, $86 \cdot 89 \bigvee 87 \cdot 88$, используем формулы сокращенного умножения,
$(87{,}5 - 1{,}5)(87{,}5 + 1{,}5) \bigvee (87{,}5 - 0{,}5)(87{,}5 + 0{,}5)$,
$87{,}5^2 - 1{,}5^2 \bigvee 87{,}5^2 - 0{,}5^2$. ■

256. Сравните $x = \sqrt{87} + \sqrt{89}$ и $y = 2\sqrt{88}$.

♦ $x < y$.

Решение. Возведем сравнение $x \bigvee y$ в квадрат,
$x \bigvee y \Leftrightarrow 87 + 2\sqrt{87 \cdot 89} + 89 \bigvee 4 \cdot 88$.
Приведем подобные, $2\sqrt{87 \cdot 89} \bigvee 2 \cdot 88$. Умножим на 0,5, получим $\sqrt{87 \cdot 89} \bigvee 88$. Возведем в квадрат, $87 \cdot 89 \bigvee 88^2$. Используем формулы сокращенного умножения, $(88-1) \cdot (88+1) \bigvee 88^2$, и получим очевидное сравнение $88^2 - 1 \bigvee 88^2$. ■

257. Сравните значения выражений $x = \sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}$ и $y = 2\sqrt{a}$ при условии $a > 0 \bigcap 0 < b < a$.
♦ $x < y$.
Решение. Обозначим $x = \sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}$ и $y = 2\sqrt{a}$. Возведем сравнение $x \bigvee y$ в квадрат, $a - b + 2\sqrt{a^2 - b^2}a + b \bigvee 4a$. Приведем подобные, $2\sqrt{a^2 - b^2} \bigvee 2a$. Умножим на 0,5, получим $\sqrt{a^2 - b^2} \bigvee a$. Возведем в квадрат, $a^2 - b^2 \bigvee a^2$. ■

258. Сравните $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ и $y = 2\sqrt[3]{3}$.
♦ $x < y$.
Решение. Обозначим $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ и $y = 2\sqrt[3]{3}$. Возведем сравнение $x \bigvee y$ в куб, и получим равносильное сравнение $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \bigvee 3$. Возведем это сравнение в куб, и получим равносильное сравнение $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \bigvee 4{,}5$. которое имеет значение $<$, так как $\sqrt[3]{2} < 2$ и $\sqrt[3]{4} < 2$. ■

259. Сравните $x = \sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{a+b}$ и $y = 2\sqrt[3]{a}$
при условии $a > 0 \bigcap 0 < b < a$.
♦ $x < y$.
Решение. Обозначим $x = \sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{a+b}$ и $y = 2\sqrt[3]{a}$, $\frac{b}{a} = t$. Сравнение $x \bigvee y$ равносильно $\sqrt[3]{1-t} + \sqrt[3]{1+t} \bigvee 2$, $f(t) \bigvee 0$, где
$f(t) = \sqrt[3]{1-t} + \sqrt[3]{1+t} - 2$. Найдем производную
$f'(t) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-t)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+t)^2}}$. Так как $f(1) = 0$ и $f'(t) < 0$ при $t \in (0;\, 1)$, то $f(t) > 0$ на этом промежутке. ■

5.3.9. Оценка значений иррациональных выражений

Теоретические сведения Некоторые задачи решаются с использованием тождеств
(1) ($\star$) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ при $x \in [-1;\, 0) \bigcup (0;\, +\infty)$,

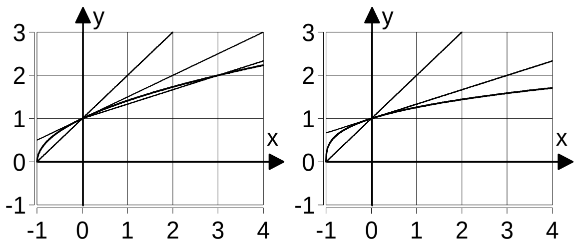

Рис. 57. Графическая иллюстрация неравенства Коши

(2) $\sqrt{1+x} > 1+x$ при $x \in (-1;\ 0)$,
(3) $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{3}$ при $x \in (0;\ 3)$.
Первое из них является частным случаем неравенства Коши. Приведем еще несколько частных случав неравенства Коши,
(4) ($\star\star$) $\sqrt[3]{1+x} < 1+\frac{x}{3}$ при $x \in [-1;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$,
(5) ($\star\star\star$) $\sqrt[4]{1+x} < 1+\frac{x}{4}$ при $x \in [-1;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$ и т.д., рис. 57.
В правой части всех неравенств ($\star$), ($\star\star$), ($\star\star\star$) стоит выражение касательной к графику левой части, проведенной в точке $x = 0$.

260. Найдите число, расположенное на числовой оси ближе всего к значению выражения $\sqrt{17} - \sqrt{15}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{8}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{16}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{1}{32}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ $\sqrt{17} - \sqrt{15} = \frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}$.

Решение 1. Пусть $x = \sqrt{17} - \sqrt{15}$. Переведем иррациональность в знаменатель, $x = \frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}$. Легко убедиться в том, что $\sqrt{17} + \sqrt{15} \in (7;\ 9)$, поэтому $x \in \left(\frac{2}{7};\ \frac{2}{9}\right)$. Теперь оценим разности. Для первого ответа из предложенных выберем наименьшее возможное расстояние, $\frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3}{14}$, для второго выберем большее из двух значений, $\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ и $\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ (это и есть наименьшее расстояние), для третьего ответа опять наименьшее, $\frac{2}{9} - \frac{1}{8} = \frac{7}{72}$. Таким образом, расстояние от $\frac{1}{4}$ до x не больше $\frac{1}{28}$, а для всех остальных ответов оно не меньше $\frac{7}{72} > \frac{1}{11}$. Следовательно, верен второй ответ. ■

Решение 2. На самом деле, $\sqrt{17}+\sqrt{15}$ значительно меньше отличается от 8, и можно заключить эту величину в значительно более узкий интервал, чем $\in(7;\,9)$. Как это сделать, показывает следующая задача. ■

261. Найдите натуральное число n, для которого значение выражения $2^n\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}-0{,}25\right)$ расположено на числовой оси ближе всего к числу 1.

⧫ 13.

Решение. Пусть $y=\sqrt{17}-\sqrt{15}-\frac{1}{4}$. Преобразуем эту величину к виду $y=\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}-\frac{1}{4}$ и приведем к общему знаменателю,
$y=\frac{8-\sqrt{17}-\sqrt{15}}{4(\sqrt{17}+\sqrt{15})}$. Заметим, что
$4-\sqrt{17}=-\frac{1}{4+\sqrt{17}}$, $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$, поэтому
$8-\sqrt{17}-\sqrt{15}=\frac{4+\sqrt{17}-(4-\sqrt{15})}{(4+\sqrt{17})(4+\sqrt{15})}$, $8-\sqrt{17}-\sqrt{15}=\frac{\sqrt{17}-\sqrt{15}}{(4+\sqrt{17})(4+\sqrt{15})}$,
$8-\sqrt{17}-\sqrt{15}=\frac{2}{(4+\sqrt{17})(4+\sqrt{15})(\sqrt{17}+\sqrt{15})}$,

$y=\frac{1}{2(4+\sqrt{17})(4+\sqrt{15})(\sqrt{17}+\sqrt{15})^2}$. Теперь проведем предварительную оценку, которая приведет нас к тому предполагаемому ответу, который мы будем затем исследовать точными методами.
Напишем равенства
$4+\sqrt{17}\simeq 2^3$, $4+\sqrt{15}\simeq 2^3$, $\sqrt{17}+\sqrt{15}\simeq 2^3$.
Поэтому
$y^{-1}\simeq 2^{13}$, $y\simeq 2^{-13}$.
Теперь сделаем точную оценку.
$2^{-13}\cdot y^{-1}=\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{\frac{17}{16}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{15}{16}}\right)\left(\sqrt{\frac{17}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}}\right)^2$,
$2^{-13}\cdot y^{-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{17}{16}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{15}{16}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{16^2-1}{16^2}}\right)$.
Так как $\sqrt{\frac{17}{16}}\in\left(1;\,1\frac{1}{32}\right)$, $\sqrt{\frac{15}{16}}\in\left(1-\frac{1}{16};\,1\right)$,
$\sqrt{\frac{16^2-1}{16^2}}\in\left(1-\frac{1}{256};\,1\right)$, $1+\sqrt{\frac{17}{16}}\in\left(2;\,2\frac{1}{32}\right)$,
$1+\sqrt{\frac{15}{16}}\in\left(2-\frac{1}{16};\,2\right)$, $1+\sqrt{\frac{16^2-1}{16^2}}\in\left(2-\frac{1}{256};\,2\right)$,
$\frac{1+\sqrt{\frac{17}{16}}}{2}\in\left(1;\,1\frac{1}{64}\right)$, $\frac{1+\sqrt{\frac{15}{16}}}{2}\in\left(1-\frac{1}{32};\,1\right)$, $\frac{1+\sqrt{\frac{16^2-1}{16^2}}}{2}\in\left(1-\frac{1}{512};\,1\right)$,
Теперь заметим, что

$1 - 3x + 3x^2 - x^3 < (1+a)(1+b)(1+c) < 1 + 3x + 3x^2 + x^3$
при $|a| < x \bigcap |b| < x \bigcap |c| < x$.
поэтому $y \in (1 - \frac{1}{32}; 1 + \frac{1}{32})$. Следовательно, верен четвертый ответ.
■

5.4. Задачи для самостоятельного решения

5.4.1. Алгебраические преобразования, 1

262. Значение выражения $101\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{97\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 101}\right)$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

263. Выражение $\sqrt{a\sqrt{a^3\sqrt{a^{-2}}}}$ тождественно равно

1 $a^{7/8}$ **2** $a^{8/7}$ **3** a **4** $a^{5/8}$ **5** $a^{5/9}$

264. Решите уравнение $\frac{\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[12]{x^2}\cdot x^{-1/2}}{\sqrt[4]{x^{2/3}}} = 2$.

1 $\sqrt[6]{2}$ **2** 64 **3** 32 **4** $\frac{1}{64}$ **5** $\frac{1}{32}$

265. Вычислите $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$, если $x : y = 1 : 2$.

1 1 **2** 2 **3** 2,5 **4** $\frac{1}{3}$ **5** -3

266. Значение выражения $10\sqrt{0,6} - 6\sqrt{5/3} + \sqrt{15}$ равно

1 $3\sqrt{15}$ **2** $2\sqrt{15}$ **3** $-\sqrt{15}$ **4** $-2\sqrt{15}$ **5** $\sqrt{15}$

267. Значение выражения $\sqrt{(0,36)^{-2} : \left(1\frac{2}{3}\right)^3 + (7,5)^0 : \left(2\frac{1}{3}\right)^{-1}}$ равно

1 ± 1 **2** 1 **3** ± 2 **4** 2 **5** 0,35

268. Значение выражения $\left(\frac{3}{4}\right)^2 : (1,(3))^{-3} + \sqrt{81} : (0,(6))^{-3}$ равно

1 ± 1 **2** 1 **3** 4 **4** 2 **5** 3

269. Значение выражения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{20}$ равно

1 144 **2** 240 **3** $120\sqrt{2}$ **4** $120\sqrt{3}$ **5** 120

270. Если первый член геометрической прогрессии с положительными членами равен $\sqrt{3}-1$, а третий равен $\sqrt{3}+1$, то четвертый член равен

1 $\sqrt{3}+3$ **2** $\sqrt{6}+3$ **3** $\sqrt{12}+\sqrt{8}$ **4** $2\sqrt{3}+3$ **5** $\sqrt{6}+\sqrt{8}$

271. Решите уравнение $\frac{\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[3]{x^{-0,25}}\cdot x^{5/12}}{x^{1/3}}=2$

1 $\sqrt[6]{2}$ **2** 64 **3** $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ **4** $\frac{1}{64}$ **5** $\sqrt[3]{2}$

272. Если $a-\frac{1}{a}=\frac{5}{6}$, то значение выражения $a^2+\frac{1}{a^2}$ равно

1 $\frac{97}{36}$ **2** $\frac{5}{2}$ **3** $\frac{61}{36}$ **4** $-\frac{47}{36}$ **5** $\frac{25}{36}$

273. Если $x+\frac{1}{x}=3$, то выражение $x^3+\frac{1}{x^3}$ равно

1 36 **2** 27 **3** 30 **4** 18 **5** 24

274. Если $x+\frac{1}{x}=3$, то значение выражения $x^4+\frac{1}{x^4}$ равно

1 119 **2** 123 **3** 81 **4** 47 **5** 51

275. Значение выражения $x+\frac{1}{x}$ не может быть равно

1 1234567891011121314151617181920 **2** $-\sqrt{5}$ **3** 2 **4** $\sqrt{3}$
5 -2

276. Найдите сумму квадратов двух чисел, сумма и произведение которых равны соответственно $\sqrt{15}$ и -2.

1 19 **2** 11 **3** 5 **4** 3 **5** 49

277. Значение выражения $\sin\frac{\pi\sqrt{(123-127)^2+12\cdot41\cdot127}}{6}$ равно

1 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **3** $-\frac{1}{2}$ **4** $\frac{1}{2}$ **5** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

278. Выражение $\frac{\left(a+\sqrt{ab}+b\right)^2-\left(a-\sqrt{ab}+b\right)^2}{(2a)^2b+a(2b)^2}$ тождественно равно

1 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$ **2** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **3** $\frac{2\sqrt{b}}{ab-1}$ **4** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ **5** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$

279. Вычислите $a^{-1/2}+\frac{a^{-1/2}-a^{1/2}}{a+a^{1/2}}$, если $a=3\frac{1}{3}$.

1 $0,3$ **2** $2,5$ **3** $-0,35$ **4** -25 **5** $0,35$

280. Выражение
$\frac{(a^3+b^3)(a-b)}{a^2-b^2} - 3\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} - (a+b)^2\right)$ равно

1 $(a+b)^2$ **2** $(a-b)^2$ **3** a^2+b^2 **4** a^2-b^2 **5** $2ab$

281. В начале года Билл положил 1 млн руб. в банк A, который начисляет 2% каждые 4 месяца, Джек положил такую же сумму в банк B, который начисляет 3% каждые 6 месяцев. Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

282. В начале года Билл положил 1 млн руб. в банк A, который начисляет 2% каждые 4 месяца, Джек положил такую же сумму в банк B, который начисляет 1,5% каждые 3 месяца. Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

283. В начале года Билл купил доллары на 1 млн руб., Джек купил евро на такую же сумму. Доллар по отношению к рублю становился дешевле на 4% каждые 4 месяца, евро по отношению к рублю становился дешевле на 6% каждые 6 месяцев. В конце года они перевели свои деньги в рубли (предполагаем, что обмен во всех случаях проводится по курсу без комиссии). Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

284. Вычислите значение выражения $9x^2-6x-5$ при $x=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

1 0 **2** 1 **3** $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **4** $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ **5** $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

285. Значение выражения $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}{23}$ при $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ равно

1 $-\frac{3}{4}$ **2** $\frac{3}{4}$ **3** $-\frac{9}{16}$ **4** $\frac{9}{16}$ **5** 1

286. Значение выражения $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ равно

1 $2\sqrt{3}-1$ **2** $2-\sqrt{3}$ **3** $2+\sqrt{3}$ **4** не существует **5** $2\sqrt{3}+1$

287. Укажите значение выражения $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

$\boxed{1}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{2}$ 4 $\boxed{3}$ $-\sqrt{3}$ $\boxed{4}$ $2\sqrt{6}$ $\boxed{5}$ $-2\sqrt{6}$

288. Выражение $\sqrt[3]{15\sqrt{3}+26}$ равно

$\boxed{1}$ $\sqrt{3}-1$ $\boxed{2}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{3}$ $\sqrt{3}+2$ $\boxed{4}$ $\sqrt{2}+3$ $\boxed{5}$ $\sqrt{3}+1$

289. Значение выражения $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ равно

$\boxed{1}$ 6 $\boxed{2}$ $2\sqrt{2}$ $\boxed{3}$ 8 $\boxed{4}$ $3\sqrt{2}$ $\boxed{5}$ $3-2\sqrt{2}$

290. Если $a = \frac{\sqrt{1234}+\sqrt{1236}}{\sqrt{1235}}$, то значение выражения $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ равно

$\boxed{1}$ $2\sqrt{a-1}$ $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $2\sqrt{1-a}$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $\sqrt{2a-1}$

291. Выражение $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$ при $0 \leqslant y \leqslant x$ равно

$\boxed{1}$ $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ $\boxed{2}$ $\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}$ $\boxed{3}$ $2\sqrt{x+y}$ $\boxed{4}$ $2\sqrt{x-y}$
$\boxed{5}$ не существует

292. Если $a = \sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{\frac{16}{17}}$, то значение выражения $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ равно

$\boxed{1}$ $2\sqrt{a+1}$ $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $2\sqrt{a-1}$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $-2\sqrt{a-1}$

293. Значение выражения $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$ равно

$\boxed{1}$ $\sqrt{3}-3$ $\boxed{2}$ $(2-\sqrt{3})^{-1}$ $\boxed{3}$ $2-\sqrt{3}$ $\boxed{4}$ $\sqrt{3}-2$ $\boxed{5}$ $3+\sqrt{3}$

294. Значение выражения $\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+2} - \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ равно

$\boxed{1}$ $\sqrt{3}+1$ $\boxed{2}$ 0 $\boxed{3}$ 1 $\boxed{4}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{5}$ $\sqrt{3}-1$

295. Сравните $a = \frac{\sqrt{37}-\sqrt{26}}{2}$ и $b = \sqrt{4^{-1}}$.

$\boxed{1}$ $a < b$ $\boxed{2}$ $a = b$ $\boxed{3}$ $a > b$

296. Выполните деление

(1) $\frac{-2x^2+7x-3}{2x^2-x}$, **(2)** $\frac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1}$, **(3)** $\frac{-3x^2+x+2}{9x^2-4}$, **(4)** $\frac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$, **(5)** $\frac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+3x^2+3x+2}$, **(6)** $\frac{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}{x^4-16}$, **(7)** $\frac{-x+\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$.

297. Выполните деление
(1) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$, **(2)** $\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x+y}$, **(3)** $\frac{x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3}{x+2y}$,
(4) $\frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{2xy}+y}$.

298. Выражение $A = 6x^4 - 5x^3y - 38x^2y^2 - 5xy^3 + 6y^4$ не делится нацело на
1 $x-3y$ **2** $3x-y$ **3** $x+2y$ **4** $2x+y$ **5** $2x+3y$

299. Корень уравнения $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^{x-1} = \left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{x-2}$ заключен в промежутке
1 $(-0,3;\ 0,4]$ **2** $(0,4;\ 1]$ **3** $(1;\ 1,5]$ **4** $(1,5;\ 1,8]$ **5** $(1,8;\ 2,5)$

5.4.2. Алгебраические преобразования, 2

300. Значение выражения $100\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{98\cdot99}+\frac{1}{99\cdot100}\right)$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

301. Значение выражения $101\left(\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\dots+\frac{1}{93\cdot97}+\frac{1}{97\cdot101}\right)$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

302. Выражение $\sqrt{6}\left(\sqrt{0,(6)}+\sqrt{6}\right)$ равно
1 6 **2** $\sqrt{3}$ **3** $\sqrt{8}$ **4** 8 **5** $2\sqrt{6}$

303. Если первый член геометрической прогрессии с положительными членами равен $2+\sqrt{3}$, а третий равен $2-\sqrt{3}$, то четвертый член равен
1 $\frac{4\sqrt{3}-7}{2}$ **2** $\sqrt{56}-\sqrt{49}$ **3** $7\sqrt{3}-4$ **4** $\sqrt{243}-\sqrt{49}$ **5** $7-4\sqrt{3}$

304. Укажите пару чисел, которые не являются взаимно обратными.
1 $x=100$ и $y=0,01$ **2** $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
3 $x=3+\sqrt{8}$ и $y=3-\sqrt{8}$ **4** $x=100$ и $y=0,0(1)$
5 $x=\sqrt{\frac{17}{11}}$ и $y=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{17}}$

305. Если $x + \frac{3}{x} = 4$, то значение выражения $x^2 + \frac{9}{x^2}$ равно
1 10 **2** 7 **3** 9 **4** 15 **5** 11

306. Если $x - \frac{1}{x} = 3$, то выражение $x^3 - \frac{1}{x^3}$ равно
1 36 **2** 27 **3** 30 **4** 18 **5** 24

307. Если $x - \frac{1}{x} = 3$, то значение выражения $x^4 + \frac{1}{x^4}$ равно
1 119 **2** 123 **3** 81 **4** 47 **5** 51

308. Вычислите $x^3 + 12x$, если $x = \sqrt[3]{\sqrt{73}+3} - \sqrt[3]{\sqrt{73}-3}$.
1 2 **2** 3 **3** 4 **4** 5 **5** 6

309. Укажите вторую цифру после запятой в десятичном представлении числа, равного $\frac{19^2-18^2}{13^2-12^2}$.
1 3 **2** 8 **3** 4 **4** 2 **5** 5

310. Укажите значение выражения $\frac{(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2}{x^3y+xy^3}$ при $x = \sqrt{5} - 2$, $y = \sqrt{5} + 2$.
1 2 **2** $\sqrt{5} - 2$ **3** $\sqrt{5} + 2$ **4** $\sqrt{5}$ **5** 4

311. Выражение $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$ равно
1 $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **2** 2 **3** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ **4** 1 **5** $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

312. В начале года Билл положил 1 млн руб. в банк A, который начисляет 6% каждые 4 месяца, Джек положил такую же сумму в банк B, который начисляет 9% каждые 6 месяцев. Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

313. В начале года Билл положил 1 млн руб. в банк A, который начисляет 8% каждые 4 месяца, Джек положил такую же сумму в банк B, который начисляет 6% каждые 3 месяца. Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

314. В начале года Билл купил доллары на 1 млн руб., Джек купил евро на такую же сумму. Доллар по отношению к рублю становился дешевле на 2% каждые 4 месяца, евро по отношению к рублю становился дешевле на 3% каждые 6 месяцев. В конце года они перевели свои деньги в рубли (предполагаем, что обмен во всех случаях проводится по курсу без комиссии). Найдите разницу вкладов в конце года. Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

315. Значение выражения
$10x(x-1)^{-1}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)^{-1}$
при условии $2x=\sqrt{5}-3$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

316. Значение выражения $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ равно

1 $2\sqrt{3}-1$ **2** $2-\sqrt{3}$ **3** $2+\sqrt{3}$ **4** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ **5** $2\sqrt{3}+1$

317. Выражение $\sqrt[3]{29\sqrt{2}+45}$ равно

1 $\sqrt{2}-1$ **2** $\sqrt{2}+1$ **3** $\sqrt{2}+2$ **4** $\sqrt{2}+3$ **5** $\sqrt{3}+1$

318. Укажите числовое значение выражения
$\left(\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}.$

1 0 **2** $\sqrt{2}$ **3** $\sqrt{2}-2$ **4** 2 **5** $2-\sqrt{2}$

319. Значение выражения $\sqrt{11-4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ равно

1 $2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **2** $2-\sqrt{3}$ **3** $\sqrt{3}-1$ **4** $\sqrt{3}-2$ **5** $1-2\sqrt{3}$

320. Значение выражения $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2\sqrt{8}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2\sqrt{8}}$ равно

1 -3 **2** 3 **3** -2 **4** $\sqrt{5}-\sqrt{8}$ **5** $\sqrt{5}+\sqrt{8}$

321. Значение выражения $\sqrt[3]{\sqrt{243}+\sqrt{242}}-\sqrt[3]{\sqrt{243}-\sqrt{242}}$ равно

1 $3\sqrt{3}$ **2** $3\sqrt{6}$ **3** $2\sqrt{2}$ **4** $3\sqrt{2}$ **5** $2\sqrt{6}$

322. Выражение $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$ при $0\geqslant y\geqslant -x$ равно

1 $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ **2** $\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}$ **3** $2\sqrt{x+y}$ **4** $2\sqrt{x-y}$
5 не существует

323. Если $a = \sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{\frac{15}{16}}$, то значение выражения $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}\ 2\sqrt{a+1}$ $\boxed{\mathbf{2}}\ 2$ $\boxed{\mathbf{3}}\ 2\sqrt{a-1}$ $\boxed{\mathbf{4}}\ 1$ $\boxed{\mathbf{5}}\ -2\sqrt{a-1}$

324. Разложите на множители:
(1) $x^3 + 6x^2y - 5xy^2 - 2y^3$, **(2)** $x^4 - 5x^3y + 7x^2y^2 - 13xy^3 + 10y^4$, **(3)** $x^4 + 1$, **(4)** $x^4 + 4$, **(5)** $x^2 + 1$, **(6)** $x^2 + 1$.

Ответы

262. $\boxed{5}$ **263.** $\boxed{3}$ **264.** $\boxed{2}$ **265.** $\boxed{4}$ **266.** $\boxed{5}$ **267.** $\boxed{4}$ **268.** $\boxed{3}$
269. $\boxed{5}$ **270.** $\boxed{5}$ **271.** $\boxed{2}$ **272.** $\boxed{1}$ **273.** $\boxed{4}$ **274.** $\boxed{4}$ **275.** $\boxed{4}$
276. $\boxed{1}$ **277.** $\boxed{1}$ **278.** $\boxed{5}$ **279.** $\boxed{1}$ **280.** $\boxed{1}$ **281.** $\boxed{3}$ **282.**
283. $\boxed{1}$ **284.** $\boxed{2}$ **285.** $\boxed{2}$ **286.** $\boxed{2}$ **287.** **288.** $\boxed{3}$ **289.** $\boxed{1}$
290. $\boxed{2}$ **291.** $\boxed{4}$ **292.** $\boxed{3}$ **293.** $\boxed{2}$ **294.** $\boxed{2}$ **295.** $\boxed{1}$
296. **297**. **298.** $\boxed{5}$ **299.** $\boxed{3}$ **300.** $\boxed{4}$ **301.** $\boxed{5}$ **302.** $\boxed{4}$
303. $\boxed{5}$ **304.** $\boxed{4}$ **305.** $\boxed{1}$ **306.** $\boxed{1}$ **307.** $\boxed{1}$ **308.** $\boxed{5}$ **309.** $\boxed{2}$
310. $\boxed{5}$ **311.** $\boxed{4}$ **312.** $\boxed{1}$ **313.** **314.** $\boxed{2}$ **315.** $\boxed{2}$ **316.** $\boxed{5}$
317. $\boxed{4}$ **318.** $\boxed{4}$ **319.** $\boxed{2}$ **320.** $\boxed{1}$ **321.** $\boxed{3}$ **322.** $\boxed{3}$
323. $\boxed{2}$ **324**.

Тема 6. Иррациональные уравнения и неравенства

6.1. Иррациональные функции

325. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Решение. Найдем ОДЗ и построим таблицы значений,
(1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$,

x	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4

График $y = \sqrt{x}$ показан на рис. $\boxed{\mathbf{325}}$.

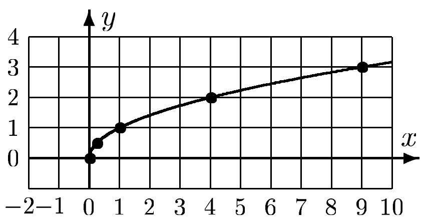

Рис. 58. График $y = \sqrt{x}$.

Обратим внимание на то, что касательная в точке $x = 0$ вертикальна.
(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty; +\infty)$,

x	0	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	1	8	27	64
$\sqrt[3]{x}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4

график $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на рис. 59.

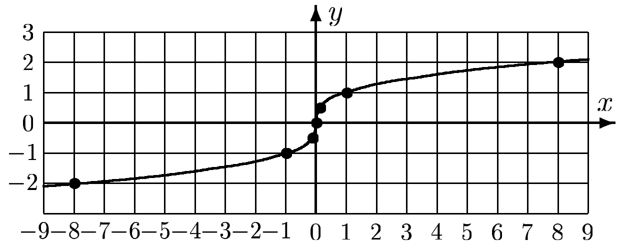

Рис. 59. График $y = \sqrt[3]{x}$

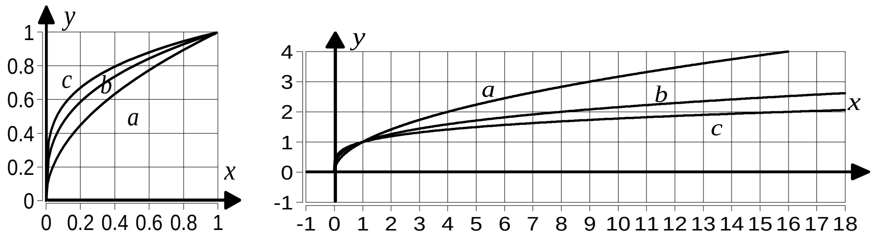

Рис. 60. Графики (a) $y = \sqrt{x}$, (b) $y = \sqrt[3]{x}$, (c) $y = \sqrt[4]{x}$,

(3) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \in [0;\ +\infty)$. сделайте самостоятельно.
Графики $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt[4]{x}$ показаны на рис. 60a на промежутке $[0;\ 1]$, на рис. 60b на промежутке $[1;\ 20]$. Заметим, что
(4) $0 < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < 1$ при $x \in (0;\ 1)$,
(5) $1 < \sqrt[4]{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ при $x \in (1;\ +\infty)$. ■

326. Нарисуйте график $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.
Решение. Найдем
$$\big(f(x)\big)^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + \\ +2\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$
После приведения подобных получим
$\big(f(x)\big)^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
Под корнем стоит полный квадрат, так что
$\big(f(x)\big)^2 = 2x + 2|x-2|$.
Выражение для $f(x)$ имеет вид

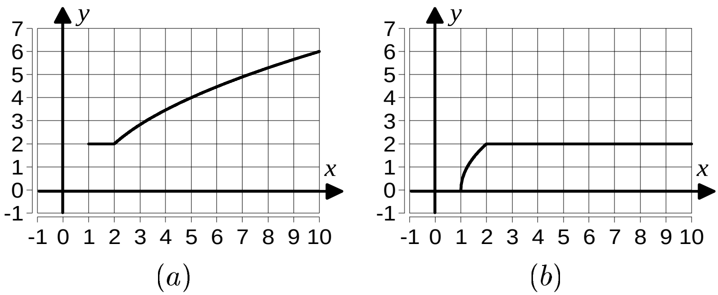

Рис. 61. Иррациональная функция

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x-1} \text{ при } x\geqslant 2,\\ 2 \text{ при } x\in[1;\,2].\end{cases}$$

График $y=2\sqrt{x-1}$ можно получить из графика $\sqrt{x}$ с помощью параллельного переноса вправо на 1 и растяжения вдоль оси y в 2 раза, при котором ось абсцисс не перемещается (это обстоятельство при растяжении и сжатии впоследствии оговаривать не будем), рис. 61a. ■

327. Нарисуйте график $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

Решение. Так же, как при решении предыдущей задачи, получим

$$f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } x\geqslant 2,\\ 2\sqrt{x-1} \text{ при } x\in[1;\,2].\end{cases}$$

График показан на рис. 61b. ■

6.1.1. Уравнения с искусственной ОДЗ

328. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+4x-3}+\sqrt{x^2-3x-4}=8$.

⧫ корней нет.

Решение. Область допустимых значений для этого уравнения определяется условием $\begin{cases}-x^2+4x-3\geqslant 0,\\ x^2-3x-4\geqslant 0\end{cases}$ и является пустым множеством. ■

329. Решите уравнение $(\star)$ $\frac{(x-1)(x-5)}{\sqrt{-(x-2)(x-6)}}=0$.

⧫ $x = 5$.

Решение. Дробь равна нулю, если и только если числитель равен нулю и одновременно знаменатель не равен нулю (подразумевается, что то и другое существует). Поэтому корни уравнения $(\star)$ определяются условием $\begin{cases} x \in \{1;\ 5\}, \\ -(x-2)(x-6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1;\ 5\}, \\ x \in (2;\ 6), \end{cases}$ так что годится только значение $x = 5$. ■

Теоретические сведения

(1) Уравнение
$u(x) \cdot v(x) = 0$

равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u(x) = 0, \\ g(x) \text{ существует}, \end{cases} \\ \begin{cases} v(x) = 0, \\ u(x) \text{ существует}. \end{cases} \end{array}\right.$

(2) Уравнение
$u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = 0$

равносильно совокупности трех систем, $\begin{cases} u(x) = 0, \\ v(x) \text{ существует}, \\ w(x) \text{ существует}, \end{cases}$

$\begin{cases} v(x) = 0, \\ u(x) \text{ существует}, \\ w(x) \text{ существует}, \end{cases}$ $\begin{cases} w(x) = 0, \\ u(x) \text{ существует}, \\ v(x) \text{ существует}, \end{cases}$ и т.д.

330. Решите уравнение $(x-1)(x-5) \cdot \sqrt{-(x-2)(x-6)} = 0$.

⧫ $x \in \{2;\ 5;\ 6\}$.

Решение. Корни уравнения определяются условием
$\begin{cases} x \in \{1;\ 5;\ 2;\ 6\}, \\ x \in [2;\ 6], \end{cases}$ годятся значения $x \in \{2,\ 5,\ 6\}$. ■

6.1.2. Метод исключения иррациональности в знаменателе

331. Решите уравнение

$(\star)$ $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \dots$

$$\cdots + \frac{1}{\sqrt{x+94}+\sqrt{x+93}} + \frac{1}{\sqrt{x+95}+\sqrt{x+94}} = 5.$$

♦ $x = 49$.

Решение. Избавимся от иррациональности во всех знаменателях, получим уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} + \dots$$
$$\dots + \sqrt{x+94} - \sqrt{x+93} + \sqrt{x+95} - \sqrt{x+94} = 5.$$

Все слагаемые, кроме двух, попарно сократятся, так что $(\star) \Leftrightarrow (\star\star)$ $\sqrt{x+95} = \sqrt{x} + 5$. Возведем это уравнение в квадрат, $x + 95 = x + 10\sqrt{x} + 25$. Это преобразование было равносильным, так как левая и правая части $(\star\star)$ больше нуля. Приведем подобные и получим ответ, $x = 49$. ■

6.1.3. Возведение в нечетную степень

Теоретические сведения При любом нечетном значении n

(1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \big(f(x)\big)^n = \big(g(x)\big)^n$,

(2) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$.

332. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt[3]{x^3 - 12x^2} = x - 4$.

♦ $x = \dfrac{4}{3}$.

Решение. Возведем обе части уравнения $(\star)$ в куб и получим равносильное уравнение $x^3 - 12x^2 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$, которое после приведения подобных примет вид $48x = 64$. ■

6.1.4. Возведение в четную степень

Теоретические сведения При любом четном значении n

(1) Уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем, $\begin{cases} \big(f(x)\big)^n = \big(g(x)\big)^n, \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \big(f(x)\big)^n = \big(g(x)\big)^n, \\ f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

(2) Уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем, $\begin{cases} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}, \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-g(x)}, \\ f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

333. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt[4]{-4x^3-4x+41}=x-1$.
$\blacklozenge$ $x=2$.
Решение. Если x — корень уравнения $(\star)$, то $x-1\geqslant 0$. Возведем обе части уравнения $(\star)$ в четвертую степень и получим равносильную систему

$$(\star\star)\ \begin{cases}-4x^3-4x+41=x^4-4x^3+6x^2-4x+1,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

После приведения подобных получится биквадратное уравнение $x^4+6x^2-40=0$, $x^2\in\{-10;\,4\}$, $x\in\pm 2$. Из двух полученных значений следует оставить то, которое удовлетворяет условию $x\geqslant 1$. Заметим, что если вместо системы $(\star)$ написать только первое уравнение этой системы, получится следствие (т.е. уравнение, множество решений котрого модержит множество решений $(\star)$ и может иметь также посторонние решения, потребуется проверка). $\blacksquare$

6.1.5. Метод разложения на множители

Теоретические сведения При $a<b$

$$\textbf{(1)}\ \sqrt{(x-a)(x-b)}=\begin{cases}\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{b-x}\text{ при }x\in(-\infty;\,a],\\ \text{не существует при }x\in(a;\,b),\\ \sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-b}\text{ при }x\in[b;\,+\infty).\end{cases}$$

$$\textbf{(2)}\ \sqrt{(x-a)(b-x)}=\begin{cases}\text{не существует при }x\in(-\infty;\,a),\\ \sqrt{x-a}\cdot\sqrt{b-x}\text{ при }x\in[a;\,b],\\ \text{не существует при }x\in(b;\,+\infty).\end{cases}$$

334. Решите уравнение
$2\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2+2x-8}+\sqrt{x^2-10x+16}$.
$\blacklozenge$ $x\in\{2;\,-8\}$.
Решение 1. Разложим каждый квадратный трехчлен на множители,
$(\star)$ $2\sqrt{(x-1)(x-2)}-\sqrt{(x-2)(x+4)}-\sqrt{(x-2)(x-8)}=0$.
Область допустимых значений $x\in(-\infty;\,-4]\bigcup\{2\}\bigcup[8;\,+\infty)$.
Рассмотрим три случая,
(1) $x\in(-\infty;\,-4]$. Уравнение $(\star)$ на этом промежутке равносильно уравнению

$2\sqrt{(1-x)(2-x)} - \sqrt{(2-x)(-4-x)} - \sqrt{(2-x)(8-x)} = 0$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}\sqrt{2-x} - \sqrt{2-x}\sqrt{-4-x} - \sqrt{2-x}\sqrt{8-x} = 0,$
которое можно разложить на множители,
$(\star\star)\ \sqrt{2-x}\big(2\sqrt{1-x} - \sqrt{-4-x} - \sqrt{8-x}\big) = 0.$
Так как на рассматриваемом промежутке $\sqrt{2-x} > 0$, то $(\star\star)$ равносильно уравнению $2\sqrt{1-x} = \sqrt{-4-x} + \sqrt{8-x}$, которое можно возвести в квадрат и получить равносильное уравнение $4-4x = -4-x+2\sqrt{-4-x}\sqrt{8-x}+8-x$, после приведения подобных $\sqrt{-4-x}\sqrt{8-x} = -x$. Возведем обе части в квадрат и получим равносильную систему, $\begin{cases}(-4-x)(8-x) = x^2,\\ -x \geqslant 0.\end{cases}$ Первое уравнение системы после приведения подобных становится линейным, $x^2-4x-32 = x^2$, $x = -8$. При этом значении x все преобразования равносильны, так что $x = -8$ является корнем.
(2) Ясно, что $x = 2$ — корень.
(3) Пусть теперь $x \in [8;\ +\infty)$. Раскладываем на множители,
$2\sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-2)(x+4)} - \sqrt{(x-2)(x-8)} = 0$
(сравните это с разложением $(\star\star)$),
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2}\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}\sqrt{x-8} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\big(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} - \sqrt{x-8}\big) = 0.$
Рассуждая аналогично, убедимся, что корней нет. ■

335. Решите неравенство
$2\sqrt{x^2-3x+2} \geqslant \sqrt{x^2+2x-8} + \sqrt{x^2-10x+16}.$
⧫ $x \in \{2\} \bigcup [-8;\ -4]$.
Решение 1. ОДЗ то же, что и в предыдущей задаче. Рассмотрим три случая,
(1) $x \in (-\infty;\ -4]$. Неравенство $(\star)$ на этом промежутке равносильно неравенству $2\sqrt{1-x} \geqslant \sqrt{-4-x} + \sqrt{8-x}$
$\Leftrightarrow 4-4x \geqslant -4-x+2\sqrt{-4-x}\sqrt{8-x}+8-x$
$\Leftrightarrow \sqrt{-4-x}\sqrt{8-x} \leqslant -x.$
Теперь возведем обе части в квадрат и получим равносильную систему, $\begin{cases}(-4-x)(8-x) \leqslant x^2,\\ x \leqslant -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geqslant -8,\\ x \leqslant -4\end{cases} \Leftrightarrow x \in [-8;\ -4].$
(2) Аналогично придем к выводу о том, что $x = 2$ — решение.
(3) Пусть теперь $x \in [8;\ +\infty)$. Рассуждая аналогично, найдем, что решений на этом промежутке нет. ■

6.2. Метод замены переменной

6.2.1. Одна новая переменная

При выполнении замены переменной выделяются два этапа решения, прямая замена и обратная замена. Множество допустимых значений для новой переменной можно не анализировать. На этапе обратной замены все лишние значения будут отброшены из-за того, что получится уравнение, не имеющее корней.

336. Решите уравнение $\sqrt{x} = x - 2$.
♦ $x = 4$.

Решение 1, замена переменных. Выполним замену $t = \sqrt{x}$. Уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$, его корни $t \in \{-1; 2\}$. Заметим, что на этом этапе исследование множества допустимых значений параметра t не обязательно. Выполняем обратную замену, **(1)** $\sqrt{x} = -1$, корней нет, **(2)** $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. ■

Решение 2, замена переменных, другая форма записи. Выполним замену $t = \sqrt{x}$. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} t^2 - t - 2 = 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \{-1; 2\}, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$. Выполняем обратную замену, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. ■

Решение 3, равносильные преобразования. Запишем серию равносильных преобпразований, $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x-2)^2, \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1; 4\}, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$. ■

337. Решите неравенство ($\star$) $\sqrt{x} > x - 2$.
♦ $x \in [0; 4)$.

Решение 1, замена переменных. Выполним замену $t = \sqrt{x}$. Неравенство примет вид $t^2 - t - 2 < 0$, его множество решений $t \in (-1; 2)$. Выполняем обратную замену, $\sqrt{x} \in (-1; 2)$, $x \in [0; 4)$. ■

Решение 2, замена переменных, другая форма записи. Выполним замену $t = \sqrt{x}$, $t \geqslant 0$. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} t^2 - t - 2 < 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-1; 2), \\ t \in [0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0; 2)$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in [0; 2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \in [0; \sqrt{4}) \Leftrightarrow x \in [0; 4)$. ■

Решение 3, метод равносильных преобразований. Неравенство ($\star$) равносильно совокупности систем
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2<0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \left(\sqrt{x}\right)^2>(x-2)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ x\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 2,\\ x^2-5x+4<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leqslant x<2\\ \begin{cases}x\geqslant 2,\\ x\in(1;\ 4)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leqslant x<2\\ 2\leqslant x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 0\leqslant x<4.$ ■

338. Решите уравнение $6\sqrt{x-3}=x+5$.
⧫ $x\in\{7;\ 19\}$.
Решение. Выполним замену $t=\sqrt{x-3}$. Уравнение примет вид $t^2-6t+8=0$, его корни $t\in\{2;\ 4\}$. Выполним обратную замену, $x-3\in\{4;\ 16\}$, $x\in\{7;\ 19\}$. ■

339. Решите неравенство $6\sqrt{x-3}\leqslant x+5$.
⧫ $x\in[3;\ 7]\bigcup[19;\ +\infty)$.
Решение. Выполним замену $t=\sqrt{x-3}$. Неравенство примет вид
$t^2-6t+8\geqslant 0$, множество решений $t\in(-\infty;\ 2]\bigcup[4;\ +\infty)$. Выполним обратную замену, рассмотрим два случая.
(1) $\sqrt{x-3}\leqslant 2$, $x-3\in[0;\ 4]$, $x\in[3;\ 7]$.
(2) $\sqrt{x-3}\geqslant 4$, $x-3\in[16;\ +\infty)$, $x\in[19;\ +\infty)$. Графическая иллюстрация решения показана на рис. 62а. ■

340. Решите уравнение $5\sqrt{\dfrac{3x-2}{5-2x}}+6\sqrt{\dfrac{5-2x}{3x-2}}=13$.
⧫ $x\in\{2;\ \frac{95}{93}\}$.
Решение. Выполним замену $t=\sqrt{\frac{3x-2}{5-2x}}$ и преобразуем уравнение к виду $5t+\frac{6}{t}=13$. После приведения к общему знаменателю получим
$\frac{5t^2-13t+6}{t}=0$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases}5t^2-13t+6=0,\\ t\neq 0,\end{cases}$ множество всех решений которой состоит из двух чисел, $t\in\{2;\ \frac{3}{5}\}$. Обратная замена приводит к двум

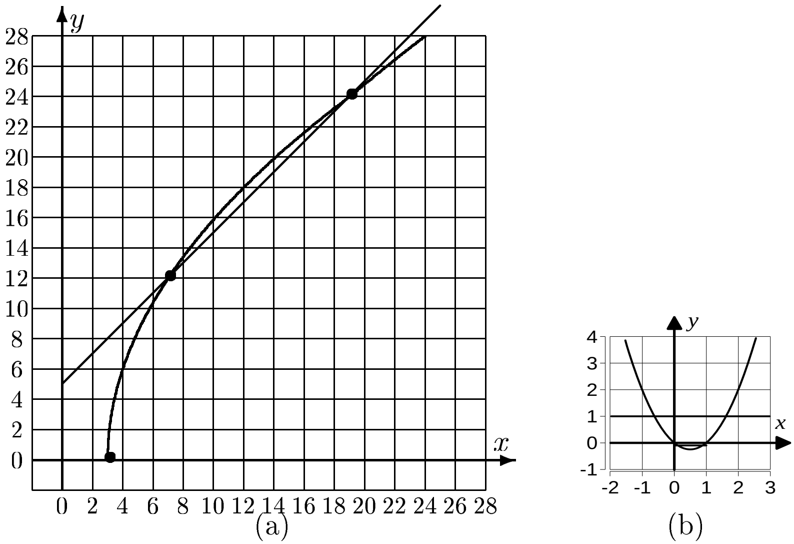

Рис. 62. Графическая иллюстрация решения

элементарным иррациональным уравнениям с дробно-линейной функцией под корнем,
(1) $\sqrt{\frac{3x-2}{5-2x}} = 2$, $x = 2$. **(2)** $\sqrt{\frac{3x-2}{5-2x}} = \frac{3}{5}$, $x = \frac{95}{93}$. ■

341. Решите неравенство $5\sqrt{\dfrac{3x-2}{5-2x}} + 6\sqrt{\dfrac{5-2x}{3x-2}} \geqslant 13$.

♦ $x \in \left(\frac{2}{3};\ \frac{95}{93}\right] \bigcup \left[2;\ \frac{5}{2}\right)$,

Решение. Та же замена приводит к неравенству $\frac{5t^2-13t+6}{t} \geqslant 0$, множество всех решений которой найдем методом интервалов (корни квадратного трехчлена в числителе мы уже знаем из решения предыдущей задачи), $t \in \left(0;\ \frac{3}{5}\right] \bigcup \left[2;\ +\infty\right)$. Выполним обратную замену. **(1)** $0 < \sqrt{\frac{3x-2}{5-2x}} \leqslant \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{2}{3};\ \frac{95}{93}\right]$. **(2)** $\sqrt{\frac{3x-2}{5-2x}} \geqslant 2$, $x \in \left[2;\ \frac{5}{2}\right)$. ■

342. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 15x + 57} = -x^2 + 15x - 55$.

♦ $x \in \{7;\ 8\}$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x^2 - 15x + 57}$ и запишем уравнение в виде $t = -t^2 + 2$. Это уравнение имеет два корня, $t \in \{-2;\ 1\}$. первый из которых приводит к неразрешимому уравнению, а второй дает $x^2 - 15x + 56 = 0$, $x \in \{7;\ 8\}$. ■

343. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 15x + 57} \leqslant -x^2 + 15x - 55$.
♦ $x \in [7;\ 8]$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x^2 - 15x + 57}$, и запишем неравенство в виде $t \leqslant -t^2 + 2$. Решения образуют промежуток $t \in [-2;\ 1]$. Выполним обратную замену, $0 \leqslant x^2 - 15x + 57 \leqslant 1$. Правое неравенство имеет решения $x \in [7;\ 8]$, левое — тождественное. ■

344. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \leqslant 4x - x^2 + \sqrt{3}$.
♦ $x \in [0;\ 1] \bigcup [3;\ 4]$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, и запишем неравенство в виде $t \leqslant -t^2 + 3 + \sqrt{3}$. Решения образуют промежуток $t \in [-1 - \sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. Выполним обратную замену, $-1 - \sqrt{3} \leqslant \sqrt{x^2 - 4x + 3} \leqslant \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 4x + 3 \leqslant 3$. Правое неравенство имеет решения $(\star)$ $x \in [0;\ 4]$, решения левого образуют два промежутка, $(\star\star)$ $x \in (-\infty;\ 1] \bigcup [3;\ +\infty)$. Пересечением $(\star)$ и $(\star\star)$ дает ответ. ■

345. Решите уравнение
$\sqrt{x - 6 + 2\sqrt{x - 7}} + \sqrt{x + 2 - 6\sqrt{x - 7}} = 6$.
♦ $x = 23$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x - 7}$ и запишем уравнение в равносильном виде $\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 6$. Извлечем корни из полных квадратов, $|t + 1| + |t - 3| = 6$. Это уравнение имеет два корня, $t \in \{-2;\ 4\}$, первый из которых приводит к неразрешимому уравнению на этапе обратной замены. Второй корень, $t = 4$, дает $x = 23$. ■

346. Решите неравенство
$\sqrt{x - 6 + 2\sqrt{x - 7}} + \sqrt{x + 2 - 6\sqrt{x - 7}} \leqslant 6$.
♦ $x \in [7;\ 25]$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x - 7}$ и запишем неравенство в виде $|t + 1| + |t - 3| \leqslant 6$. Решения образуют промежуток

$t \in [-2;\, 4]$. Выполним обратную замену, $\sqrt{x-7} \in [-2;\, 4]$. Учитывая тождество $\sqrt{x-7} \geqslant 0$, решим неравенство $\sqrt{x-7} \leqslant 4$, и получим $x \in [7;\, 23]$. ■

347. Найдите наибольшее (или единственное) значение параметра p, при котором все решения неравенства $(\star)$ $\sqrt{x+1+p} \geqslant x+1$ образуют промежуток, длина которого равна 4.

⧫ $p = 2$.

Решение. Выполним замену $t = \sqrt{x+1+p}$. Вместо $(\star)$ получим систему неравенств $(\star\star)$ $\begin{cases} t^2 - t - p \leqslant 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$ Лучший метод решения основывается на анализе графиков левой и правой частей, рис. 62b.

(1) При $p \in (-\infty;\, -0{,}25)$ решений нет,

(2) при $p \in [-0{,}25;\, 0]$ решения образуют промежуток

$(\star\star\star)$ $t \in \left[\frac{1-\sqrt{1-4p}}{2};\, \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2}\right]$,

причем обе границы неотрицательны.

(3) При $p > 0$ левая граница отрезка $(\star\star\star)$ становится отрицательной и ее следует заменить нулем, $(\ddagger)$ $t \in [0;\, \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2}]$. Для переменной x получится отрезок длиной 4 в том случае, когда промежуток $(\ddagger)$ совпадает с отрезком $[0;\, 2]$, т.е. $\frac{1+\sqrt{1-4p}}{2} = 2$, $\sqrt{1-4p} = 3$, $1 - 4p = 9$, $p = 2$. ■

348. Найдите наибольший корень уравнения
$3\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}x^3 - 2x\sqrt{1-x^2} - 4x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) = 0$.

⧫ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $x = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $3x - 4x^3 = \sin 3t$, $2x\sqrt{1-x^2} = \sin 2t$, $4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} = \sin 4t$. Уравнение можно записать в виде $\sqrt{3}\sin 3t - \sin 2t - \sin 4t = 0$. Сложим второе и третье слагаемые, $\sqrt{3}\sin 3t - 2\sin 3t\cos t = 0$. Разложим на множители, $2\sin 3t(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos t) = 0$. Полный ответ включает две серии, $t = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. В промежуток $t \in [-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}]$. входят пять чисел. Соответствующие значения x равны $0;\, \pm\frac{1}{2};\, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

6.2.2. Использование двух новых переменных

349. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$.

♦ $x = -1$.
Решение. Пусть $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{3x+12}$. Тогда уравнение ($\star$) равносильно уравнению $u + \sqrt{u^2+v^2} = v \Leftrightarrow \sqrt{u^2+v^2} = v - u$, $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2 = u^2+v^2-2uv, \\ v \geqslant u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 0, \\ v \geqslant u. \end{cases}$ Осталось рассмотреть два случая, $u = 0$ или $v = 0$. ■

350. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+8} - \sqrt{x^2-4x+3} = 1$.
♦ $x = 2 \pm \sqrt{5}$.
Решение. Введем две новых переменных, $u = \sqrt{x^2-4x+8}$, $v = \sqrt{x^2-4x+3}$. Тогда уравнение примет вид
($\star$) $u - v = 1$.
Величины u и v связаны, кроме того, соотношением
($\star\star$) $u^2 - v^2 = 5$.
Решим систему уравнений ($\star$) и ($\star\star$) (достаточно подставить первое во второе) и получим $u = 3$, $v = 2$. Осталось решить любое из двух уравнений $x^2-4x+3 = 4$, $x^2-4x+8 = 9$. ■

351. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4x+8} - \sqrt{x^2-4x+3} \geqslant 1$.
♦ $x \in [2-\sqrt{5};\ 1] \bigcup [3;\ 2+\sqrt{5}]$.
Решение. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, придем к системе ($\star$) $\begin{cases} u - v \geqslant 1, \\ u^2 - v^2 = 5, \end{cases}$ найти нужно все неотрицательные решения. Из второго (уравнения) получим $u = \sqrt{v^2+5}$. Теперь первое (неравенство) дает $\sqrt{v^2+5} - v \geqslant 1$, $\sqrt{v^2+5} \geqslant v+1$, $v^2+5 \geqslant v^2+2v+1$, $v \leqslant 2$. Итак, ($\star$) равносильно неравенству $\sqrt{x^2-4x+3} \leqslant 2$, системе неравенств $0 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 4$, множество всех решений которой совпадает с пересечением промежутков $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 1] \bigcup [3;\ +\infty), \\ x \in [2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}], \end{cases}$ так что $x \in [2-\sqrt{5};\ 1] \bigcup [3;\ 2+\sqrt{5}]$. ■

352. Решите уравнение $\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+3x+2} = 2x+1$.
♦ $x \in \left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3}\right\}$.
Решение. Введем две новых переменных, $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+5x+3}, \\ v = \sqrt{x^2+3x+2}. \end{cases}$
Тогда уравнение примет вид $u - v = u^2 - v^2$. Используя формулы сокращенного умножения, запишем уравнение в виде $u - v = (u-v)(u+v)$ и разложим на множители,

$(u-v)(1-u-v)=0.$
Возможны два варианта, $u=v$ или $u+v=1$.
(1) В первом случае $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+3}=\sqrt{x^2+3x+2}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3=x^2+3x+2, \\ x^2+3x+2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0, \\ x\in(-\infty;\,-2]\bigcup[-1;\,+\infty) \end{cases}$
$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.
(2) Во втором случае $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+3}=-\sqrt{x^2+3x+2}+1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3=x^2+3x+2-2\sqrt{x^2+3x+2}+1, \\ -\sqrt{x^2+3x+2}+1\geqslant 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{x^2+3x+2}, \\ \sqrt{x^2+3x+2}\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x^2+3x+2, \\ 0\leqslant x^2+3x+2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}.$
Легко заметить, что при решении иррациональных уравнений мы использовали метод равносильных преобразований. Неоднократно мы обращали внимание на то, что это наиболее надежный с точки зрения надежности метод, который требует однако от исполнителя весьма высокого уроврвня мастерства. В данном случае (как и во многих других) можно использовать метод неравносильных преобразований (по простому, метод возведения в квадрат). При этоом не может произойти потеря корней, но могут появиться лишние корни. При использовании этого метода необходима проверка каждого из корней (не в черновике, но в основном тексте решения). Проверять следует не равенство левой и правой частей уравнения при данном значении неизвестной, а совпадение знака левой и правой частей до возведения в квадрат. Проделайте это самостоятельно. ■

353. Решите уравнение
$(\star)$ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-56}=\sqrt[3]{6(x-28)}$.
♦ $x\in\{-8;\ 28;\ 64\}$.

Решение. Пусть $u=\sqrt[3]{x}$, $v=\sqrt[3]{x-56}$. Тогда
$\sqrt[3]{6(x-28)}=\sqrt[3]{3(u^3+v^3)}$. Уравнение$(\star)$ равносильно
$(u+v)^3=3(u^3+v^3)$. Используем формулы сокращенного умножения, $(u+v)((u+v)^2-3(u^2-uv+v^2))=0$.
(1) $u+v=0$, $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{x-56}$, $x=-x+56$, $x=28$.
(2) $u^2+2uv+v^2=3u^2-3uv+3v^2$, $2u^2-5uv+2v^2=0$, $t=\frac{u}{v}$,

$t^2+5t+1=0$, $t\in\{\frac{1}{2};\ 2\}$. Выполним обратную замену, $\frac{x}{x-56}=8$, $x=64$, $\frac{x}{x-56}=\frac{1}{8}$, $x=-8$. ■

354. Решите неравенство $(\star)$ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-56}\geqslant\sqrt[3]{6(x-28)}$.
♦ $x\in[-8;\ 28]\bigcup[64;\ +\infty)$.
Решение. Неравенство $(\star)$ равносильно $(u+v)^3\geqslant3(u^3+v^3)$. Дальше аналогично. ■

355. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{2x-26}=\sqrt[3]{3x-33}$.
♦ $x\in\{7;\ 11;\ 13\}$.
Решение. Пусть $u=\sqrt[3]{x-7}$, $v=\sqrt[3]{2x-26}$.
Уравнение примет вид $u+v=\sqrt[3]{u^3+v^3}$, $(u+v)^3=u^3+v^3$, $3uv(u+v)=0$. Рассмотрим три случая. **(1)** $u=0$, $x_1=7$. **(2)** $u+v=0$, $x_2=11$. **(3)** $v=0$, $x_3=13$. ■

356. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{2x-26}\leqslant\sqrt[3]{3x-33}$.
♦ $x\in(-\infty;\ 7]\bigcup[11;\ 13]$.
Решение. Выполним ту же замену, $u=\sqrt[3]{x-7}$, $v=\sqrt[3]{2x-26}$. Получим равносильное неравенство $3uv(u+v)\leqslant0$. Теперь придется рассмотреть четыре случая, **(1)** $\begin{cases}u\leqslant0,\\v\leqslant0,\\u+v\leqslant0,\end{cases}$
(2) $\begin{cases}u\leqslant0,\\v\geqslant0,\\u+v\geqslant0,\end{cases}$ **(3)** $\begin{cases}u\geqslant0,\\v\leqslant0,\\u+v\geqslant0,\end{cases}$ **(4)** $\begin{cases}u\geqslant0,\\v\geqslant0,\\u+v\leqslant0.\end{cases}$ Сделайте это самостоятельно.
■

357. Решите уравнение
$\sqrt[3]{3(x^2-8x+7)}+\sqrt[3]{5(x^2-8x+15)}=\sqrt[3]{8(x^2-8x+12)}$.
♦ $x\in\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7\}$.
Решение. Пусть $u=\sqrt[3]{3(x^2-8x+7)}$, $v=\sqrt[3]{5(x^2-8x+15)}$.
Так как $3(x^2-8x+7)+5(x^2-8x+15)=8(x^2-8x+12)$, то уравнение примет вид $u+v=\sqrt[3]{u^3+v^3}$. Точно так же, как в предыдущей задаче, получим
(1) $u=0$, $3(x^2-8x+7)=0$, $x\in\{1;\ 7\}$.
(2) $u+v=0$, $5(x^2-8x+15)=0$, $x\in\{2;\ 6\}$.
(3) $v=0$, $8(x^2-8x+12)=0$, $x\in\{3;\ 5\}$. ■

358. Решите неравенство
$\sqrt[3]{3(x^2-8x+7)}+\sqrt[3]{5(x^2-8x+15)}\leqslant\sqrt[3]{8(x^2-8x+12)}$.
♦ $x\in[1;\,2]\bigcup[3;\,5]\bigcup[6;\,7]$.
Решение. Та же замена
$u=\sqrt[3]{3(x^2-8x+7)}$, $v=\sqrt[3]{5(x^2-8x+15)}$
приведет к равносильному неравенству $u+v\leqslant\sqrt[3]{u^3+v^3}$. Возведем в третью степень, перенесем все в левую часть и разложим на множители, $(u+v)(u^2+2uv+v^2-(u^2-uv+v^2)\leqslant 0$. Получится совокупность черырех систем неравенств, аналогичная рассмотренной в предыдущей задаче. Решите ее самостоятельно. ■

359. Решите неравенство
$\sqrt{x^2-4x+3}+10-x\geqslant\sqrt{2(x^2-4x+3)+2(x-10)^2}$.
♦ $x=\frac{97}{16}=6\frac{1}{16}$.
Решение. Пусть $u=\sqrt{x^2-4x+3}$, $v=10-x$. Неравенство примет вид
$(\star)$ $u+v\geqslant\sqrt{2u^2+2v^2}$.
Возведем в квадрат, учитывая, что необходимо проверить знак левой части, $\begin{cases}u^2+v^2+2uv\geqslant 2u^2+2v^2.\\ u+v\geqslant 0.\end{cases}$ Приведем подобные, $(u-v)^2\leqslant 0$, поэтому $u=v$. Теперь ясно, что левая часть $(\star)$ заведомо неотрицательна. Выполним обратную замену, $\sqrt{x^2-4x+3}=10-x$, $x^2-4x+3=x^2-20x+100$, $x=\frac{97}{16}$. Это и есть единственный корень. ■

360. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt[4]{x+40}+\sqrt[4]{57-x}=5$.
♦ $x\in\{-24;\,41\}$.
Решение. Пусть $u=\sqrt[4]{x+40}$, $v=\sqrt[4]{57-x}$. Тогда $(\star)$ равносильно системе $\begin{cases}u+v=5,\\ u^4+v^4=97.\end{cases}$ Как и любая симметрическая система, эта система упрощается использованием специальной замены переменной, $p=u+v$, $q=uv$. Используя тождество $u^4+v^4=(p^2-2q)^2-2q^2$, приведем $(\star)$ к виду $\begin{cases}p=5,\\ (p^2-2q)^2-2q^2=97.\end{cases}$ После приведения подобных получим квадратное уравнение $q^2-50q+264=0$, $q=25\pm 19$, $q\in\{6;\,44\}$.
Теперь решим две симметрические системы,

(1) $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=44 \end{cases}$ (решений не имеет),

(2) $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6, \end{cases}$ $(u;\, v) \in (2;\, 3) \bigcup (3;\, 2)$. ■

361. Решите неравенство $(\star)$ $\sqrt[4]{x+40} + \sqrt[4]{57-x} \leqslant 5$.

⧫ $x \in [-40;\, -24] \bigcup [41;\, 57]$.

Решение. Будем рассматривать неравенство $(\star)$ на ОДЗ, $x \in [-40;\, 57]$. Используем ту же замену, что и в предыдущей задаче. Получим систему

$$(\star\star) \quad \begin{cases} u + \sqrt[4]{97-u^4} \leqslant 5, \\ 0 \leqslant u \leqslant 5. \end{cases}$$

На промежутке $u \in [0;\, 5]$. $(\star\star)$ равносильно неравенству $(\sqrt[4]{97-u^4})^4 \leqslant (5-u)^4$. Это неравенство равносильно системе неравенств $0 \leqslant 97-u^4 \leqslant (5-u)^4$. Раскроем скобки и приведем подобные, $u^4 - 10u^3 + 75u^2 - 250u + 264 \geqslant 0$. Из решения предыдушей задачи мы уже знаем два корня уравнения $(\ddagger)$ $u^4 - 10u^3 + 75u^2 - 250u + 264 = 0$, а именно, $u \in \{2;\, 3\}$. Для нахождения остальных корней следует поделить многочлен в левой части $(\ddagger)$ на $u^2 - 5u + 6$. Сделайте это самостотельно и убедитесь, что других корней на интересующем нас промежутке $u \in [0;\, \sqrt[4]{97}]$ нет. ■

362. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt[3]{x-27} + \sqrt{36-x} = 3$.

⧫ $x \in \{0;\, 27;\, 35\}$.

Решение. Пусть $u = \sqrt[3]{x-27}$, $v = \sqrt{36-x}$. Тогда $(\star)$ равносильно системе $\begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^2=9. \end{cases}$ Решим методом исключения, $v = 3-u$, $u^3 + 9 - 6u + u^2 = 9$, $u(u^2+u-6) = 0$, $u \in \{0;\, 2;\, -3\}$. ■

363. Решите неравенство $(\star)$ $\sqrt[3]{x-27} + \sqrt{36-x} \leqslant 3$.

⧫ $x \in [0;\, 27] \bigcup [35;\, 36]$.

Решение. Та же замена, $u = \sqrt[3]{x-27}$, $v = \sqrt{36-x}$, приводит $(\star)$ к неравенству $u(u^2+u-6) \geqslant 0$, все решения которого $u \in [-3;\, 0] \bigcup [2;\, +\infty)$. После выполнения обратной замены два получившихся промежутка для переменной x следует пересечь с ОДЗ, которая в данной задаче совпадает с промежутком $x \in (-\infty;\, 36]$. ■

6.3. Равносильные преобразования

Теоретические сведения Рассмотрим уравнение

$(\star)$ $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

(1) Если для некоторого значения x выполнено неравенство $g(x) \geqslant 0$, то к левой и правой частям $(\star)$ можно применить функцию $g(t) = t^2$, которая возрастает на промежутке $t \in [0; +\infty)$. В результате получится равносильное уравнение $(\star\star)$ $(\sqrt{f(x)})^2 = (g(x))^2$. В левой части этого равенства можно использовать тождество $(\sqrt{z})^2 = z$, в результате чего ОДЗ, вообще говоря, расширится, и получится уравнение-следствие

$(\star\star\star)$ $f(x) = (g(x))^2$.

В данном случае это уравнение равносильно $(\star\star)$, так как в правой части $(\star\star\star)$ стоит полный квадрат, который для всех значений x из ОДЗ неотрицателен. Поэтому к левой и правой частям $(\star\star\star)$ можно применить монотонную функцию $h(t) = \sqrt{t}$, в результате чего получим снова $(\star\star)$.

(2) Если для некоторого значения x выполнено неравенство $g(x) < 0$, то это значение x не является корнем $(\star)$.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6.2. Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = \big(g(x)\big)^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Аналогично, можно убедиться в том, что справедлива

Теорема 6.3. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

В этом случае добавлять условие $g(x) \geqslant 0$ не обязательно, так как оно следует из этой системы. Систему можно заменить на $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ При решении нужно выбирать то условие из двух, которое проще проверить.

Теоретические сведения Рассмотрим неравенство

$(\star)$ $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$.

(1) Если для некоторого значения x выполнено неравенство $g(x) \geqslant 0$, то к левой и правой частям $(\star)$ можно применить функцию $g(t) = t^2$, которая возрастает на промежутке $t \in [0; +\infty)$. В результате получится равносильное неравенство $(\star\star)$ $(\sqrt{f(x)})^2 \leqslant (g(x))^2$. В левой части этого равенства можно использовать тождество $(\sqrt{z})^2 = z$, в результате чего ОДЗ, вообще говоря, расширится, и получится неравенство-следствие
$(\star\star\star)$ $f(x) = (g(x))^2$.
Это неравенство, вообще говоря, не равносильно $(\star\star)$, в чем легко убедиться, приведя пример (сделайте это сами). Чтобы сохранить равносильность, нужно обеспечить неизменность ОДЗ, для чего достаточно добавить условие $f(x) \geqslant 0$. Итак,

Теорема 6.4. Неравенство $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) \leqslant \big(g(x)\big)^2, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$
Аналогично можно убедиться в том, что

Теорема 6.5. Неравенство $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$ равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant \big(g(x)\big)^2, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$

Теорема 6.6. Неравенство $\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{g(x)}$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

364. Решите уравнение $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} = 2$.
♦ $x = 6$.

Решение. Перед возведением в квадрат перенесев второе слагаемое в левой части, $\sqrt{22 - x} = \sqrt{10 - x} + 2$. Так как обе части неотрицательны, то возведение в квадрат — равносильное преобразование, $\big(\sqrt{22 - x}\big)^2 = 10 - x + 4\sqrt{10 - x} + 4$, $22 - x = 10 - x + 4\sqrt{10 - x} + 4$. Так как мы использовали тождество $\big(\sqrt{22 - x}\big)^2 = 22 - x$, в последующем придется проверить,

что $22 - x \geqslant 0$. Приведем подобные, $2 = \sqrt{10 - x}$. Снова возводим в квадрат (преобразование опять равносильное), $4 = 10 - x$, $x = 6$. Так как при $x = 6$ верно неравенство $22 - x \geqslant 0$, то равносильность не была нарушена.
■

365. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt{3 + 2x} + \sqrt{5 + x} = 5$.
⧫ $x = 77 - 10\sqrt{57}$.
Решение 1. Возведем обе части в квадрат. Преобразование равносильное, так как обе части положительны,
$(\star) \Leftrightarrow 3 + 2x + 2\sqrt{3 + 2x}\sqrt{5 + x} + 5 + x = 25$.
Приведем подобные, $2\sqrt{3 + 2x}\sqrt{5 + x} = 17 - 3x$. Снова возводим в квадрат, при этом могут появиться посторонние корни. В дальнейшем понадобится проверка условия $17 - 3x \geqslant 0$. Итак, $4(3 + 2x)(5 + x) = (17 - 3x)^2$. Приведем подобные, $x^2 - 154x + 229 = 0$. Решим это квадратное уравнение, $x = 77 \pm 10\sqrt{57}$. Условию $17 - 3x \geqslant 0$ удовлетворяет меньший из корней. ■
Решение 2. Если перед возведением в квадрат перенести один из радикалов в правую часть, $\sqrt{3 + 2x} = 5 - \sqrt{5 + x}$, то объем вычислений уменьшится, но понадобится еще одна проверка. Уже при первом возведении в квадрат возможно появление посторонних корней. Сравните объем работы самостоятельно. ■

366. Решите неравенство $(\star)$ $\sqrt{3x + 21} \leqslant \sqrt{2x + 6} + 2$.
⧫ $x = 5$.
Решение. Так как обе части неотрицательны, то возведение в квадрат — равносильное преобразование,
$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 21 \leqslant 2x + 6 + 4\sqrt{2x + 6} + 4, \\ 3x + 21 \geqslant 0. \end{cases}$$
Второе условие можно снять, так как оно является тождественным внутри ОДЗ квадратного корня. Приведем подобные, $x + 11 \leqslant 4\sqrt{2x + 6}$. Снова возводим в квадрат (преобразование опять равносильное, так как на области определения левая часть больше нуля), $x^2 + 22x + 121 \leqslant 32x + 96$, $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$, единственное решение $x = 5$. ■

367. Решите уравнение $2\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{5}\,(x - 2)$.
⧫ $x \in \{4;\ 8\}$.

Решение. Заметим, что левая часть неравенства неотрицательна. Поэтому возведение в квадрат будет равносильным преобразованием, если потребовать того же от правой части, $\begin{cases} 4(x^2-2x-3)=5(x-2)^2, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$ Квадратное уравнение $x^2-12x+32=0$ имеет корни $x \in \{4;\ 8\}$, оба удовлетворяют условиям задачи. ■

368. Решите неравенство (‡) $2\sqrt{x^2-2x-3} \geqslant \sqrt{5}\,(x-2)$.
⧫ $x \in (-\infty;\ -1] \bigcup [4;\ 8]$.

Решение. Левая часть неравенства неотрицательна, правая часть может быть любого знака. При возведении в квадрат придется рассмотреть два случая.

(1) Если правая часть неотрицательна, $x \geqslant 2$, то неравенство можно возвести в квадрат и получить равносильную систему, $(\star)\ \begin{cases} 4\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)^2 \geqslant 5(x-2)^2, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$ В первом неравенстве системы можно заменить $(\sqrt{x^2-2x-3})^2$ на x^2-2x-3, одновременно добавив в систему условие $x^2-2x-3 \geqslant 0$, поэтому $(\star) \ \Leftrightarrow \ (\star\star)\ \begin{cases} 4\big(x^2-2x-3\big) \geqslant 5(x-2)^2, \\ x \geqslant 2, \\ x^2-2x-3 \geqslant 0. \end{cases}$ Заметим, что если третье условие не наложить, то расширится ОДЗ и, вообще говоря, можно ожидать появления посторонних решений. В данном конкретном случае появление посторонних решений невозможно, так как из первого неравенства системы $(\star\star)$, $4(x^2-2x-3) \geqslant 5(x-2)^2$, следует, что $4(x^2-2x-3) \geqslant 0$, поэтому $(\star\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2-2x-3) \geqslant 5(x-2)^2, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

(2) Если правая часть отрицательна, то неравенство (‡) является тождественным, т.е. справедливо при всех допустимых значениях переменной. В этом случае равносильная система имеет вид $\begin{cases} x^2-2x-3 \geqslant 0, \\ x < 2. \end{cases}$ Решения двух полученных систем следует обьединить, так что исходное неравенство (‡) равносильно совокупности систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4(x^2-2x-3)\geqslant 5(x-2)^2,\\ x\geqslant 2.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-3\geqslant 0,\\ x<2.\end{cases}\end{array}\right.$

Решая квадратные неравенства, получим равносильную совокупность,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[4;\,8],\\ x\geqslant 2.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;\,-1]\bigcup[3;\,+\infty),\\ x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,-1]\bigcup[4;\,8].\ \blacksquare$$

369. Решите неравенство ($\star$) $\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 3x-6$.

♦ $x\in(-\infty;\,2]$.

Решение. Действуя аналогично, убедимся, что исходное неравенство ($\star$) равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6\geqslant 9x^2-36x+36\\ x\geqslant 2.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-5x+6\geqslant 0,\\ x<2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая квадратные неравенства, заменим совокупность на равносильную,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[\frac{15}{8};\,2],\\ x\geqslant 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;\,2]\bigcup[3;\,+\infty),\\ x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,2].\ \blacksquare$$

370. Решите уравнение $\sqrt{5x-4}+\sqrt{6x-5}=\sqrt{7x-6}+\sqrt{8x-7}$.

♦ $x=1$.

Решение. Перенесем слагаемые,

($\star$) $\sqrt{6x-5}-\sqrt{7x-6}=\sqrt{8x-7}-\sqrt{5x-4}$.

Обратим внимание на то, что левая и правая части, вообще говоря, могут быть как больше нуля, так и меньше нуля. Возведем это уравнение в квадрат и получим следствие (т.е. такое уравнение, среди корней которого находятся все корни уравнения ($\star$) , но могут быть и посторонние),

$6x-5-2\sqrt{6x-5}\sqrt{7x-6}+7x-6=$

$$= 8x - 7 - 2\sqrt{8x-7}\sqrt{5x-4} + 5x - 4.$$

Приведем подобные,
$(\star\star)$ $\sqrt{6x-5}\sqrt{7x-6} = \sqrt{8x-7}\sqrt{5x-4}$.
Снова возведем в квадрат и опять получим следствие,
$(\star\star\star)$ $(6x-5)(7x-6) = (8x-7)(5x-4)$.
На сей раз множество корней могло расшириться за счет того, что ОДЗ $(\star\star\star)$ шире, чем ОДЗ $(\star\star)$. Приведем подобные, $2x^2 - 4x + 2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет единственный корень $x = 1$. Теперь можно или проверить этот корень подстановкой в $(\star)$, или проверить равносильность преобразований. И то и другое в данном случае несложно (обычно проще проверять равносильность). Сделайте это самостоятельно. Заметим, что при планировании решения данной задачи Вы заранее не могли знать, что в конце концов получится единственное решение данного неравенства. В принципе, может получиться множество сложной структуры с какими-то иррациональными границами, и тогда проверка будет сама по себе сложной задачей. Поэтому скорее всего, для любого иррационального уравнения или неравенства следует сначала потратить несколько минут на попытку получить следствие путем однократного или многократного применения неравносильных преобразований. Если получится множество простой структуры, допускающее проверку, то следует выполнить такую проверку, обязательно записав это действие в решение, иначе даже правильный ответ не будет оценен максимальным баллом. Если же проверка вызывает затруднения, следует начать решение заново, на сей раз используя только равносильные преобразования. ■

371. Решите уравнение $(\star)$ $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.
⧫ $x = 5$.

Решение. Возведем в квадрат обе части $(\star)$, причем данное преобразование является равносильным, так как обе части $(\star)$ положительны,
$(\star) \Leftrightarrow (\star\star)$ $x + \sqrt{x+11} +$

$$+2\sqrt{x+\sqrt{x+11}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}} +$$

$$+x - \sqrt{x+11} = 16,$$

Приведем подобные, обратив внимание на то, что сокращение двух иррациональных выражение $\pm\sqrt{x+11}$ не приведет к расширению ОДЗ, поскольку эти выражение остаются в результате,
$(\star\star) \Leftrightarrow (\star\star\star)\ \ 2x+2\sqrt{x+\sqrt{x+11}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=16.$
Теперь применим тождество $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. При этом ОДЗ может расшириться, но не может сузиться, так что получится следствие. Используем формулу сокращенного умножения под знаком корня, и получим следствие,
$(\star\star\star) \Rightarrow (\ddagger)\ \ x+\sqrt{x^2-x-11}=8.$
При этом могли появиться посторонние корни, так как область определения выражения $\sqrt{ab}$ шире, чем у выражения $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Потребуется проверка. Уединим радикал (т.е. корень) в левой части уравнения $(\star\star)$ и получим равносильное уравнение
$(\ddagger) \Leftrightarrow (\ddagger\ddagger)\ \ \sqrt{x^2-x-11}=8-x.$
Еще раз возведем в квадрат, отмечая возможность появления посторонних корней,
$(\ddagger\ddagger) \Rightarrow x^2-x-11=64-16x+x^2 \Leftrightarrow 15x=75.$
Наконец, выполняем проверку для уравнений $(\star\star\star)$ и $(\ddagger)$. В принципе, можно проверить и само исходное уравнение, и в даном случае это не сложно. Но иногда сделать это непросто, поэтому рекомендуем следить за теми преобразованими, при выполнении которых могут появиться посторонние корни. ■

372. Решите уравнение
$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$
⧫ $x\in\{-1;\ 0\}$.

Решение. Выполним замену $t=x^2+x+1$ и получим равносильную систему $\begin{cases}\sqrt{t+3}+\sqrt{t}=\sqrt{2t+7},\\ t=x^2+x+1.\end{cases}$ Так как обе части неотрицательны, то после возведения в квадрат получим равносильную систему $\begin{cases}(\sqrt{t+3}+\sqrt{t})^2=(\sqrt{2t+7})^2,\\ t=x^2+x+1.\end{cases}$ Тождественное преобразование $(\sqrt{z})^2=z$ приведет к расширению ОДЗ и даст, таким образом, следствие (т.е. ни один корень не пропадет, но могут появиться посторонние корни). В данном случае посторонние корни получиться не могут, так как для всех x будет $t=x^2+x+1>0$.

$$\begin{cases} t+3+2\sqrt{t+3}\sqrt{t}+t=2t+7, \\ t=x^2+x+1. \end{cases}$$

Первое уравнение равносильно уравнению $\sqrt{t+3}\sqrt{t}=2$.
И опять возведение в квадрат — равносильное преобразование, $(\sqrt{t+3})^2(\sqrt{t})^2=4$, а тождественное преобразование корней квадратных расширит ОДЗ и даст уравнение — следствие $t^2+3t-4=0$, корни которого $t\in\{-4;\ 1\}$. Уравнение $x^2+x+1=-4$ корней не имеет. Уравнение $x^2+x+1=1$ имеет два корня, $x\in\{-1;\ 0\}$. Теперь необходимо или сделать проверку корней, или проверить равносильность. И то, и другое в данном случае не сложно. ■

373. Решите уравнение
$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$
⧫ $x=2$.
Решение. Выполним замену $t=\sqrt{x+7}$ и запишем уравнение в виде равносильной системы,

$$(\star)\quad \begin{cases} \sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2-t-6}=4, \\ t=\sqrt{x+7}. \end{cases}$$

Область допустимых значений переменной t в выражении $(\star)$ равна $t\in(-\infty;\ -2]\bigcup[3;\ +\infty)$. Так как $t\geqslant 0$, то $t\in[3;\ +\infty)$. Проанализируем множества значений слагаемых в левой части уравнения $(\star)$. Вот что при этом получится:

$$\begin{cases} \sqrt{t^2+2t+1}\geqslant 4, \\ \sqrt{t^2-t-6}\geqslant 0, \\ \sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2-t-6}=4, \end{cases} \quad \text{поэтому} \quad \begin{cases} \sqrt{t^2+2t+1}=4, \\ \sqrt{t^2-t-6}=0. \end{cases}$$

Следовательно, $t=3$ и $x=2$. ■

6.3.1. Неравенства с изолированными решениями

Многие сложные задачи ЕГЭ (секция С) содержат дополнительный усложняющий элемент–изолированные решения неравенств. Этот параграф посвящен задачам, в которых множество всех решений неравенства состоит из нескольких промежутков и нескольких изолированных решений.

374. Решите неравенство $(\star)$ $\sqrt{-x^2+6x-5}\leqslant 5-x$.
⧫ $x\in[1;\ 3]\bigcup\{5\}$.
Решение 1 (метод равносильных преобразований).

Неравенство ($\star$) равносильно системам

$$\begin{cases} -x^2+6x-5 \geqslant 0, \\ -x^2+6x-5 \leqslant (5-x)^2, \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;\ 5], \\ x \in (-\infty;\ 3] \bigcup [5;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 5]. \end{cases}$$

Пересечение всех трех множеств состоит из двух непересекающихся промежутков, $x \in [1;\ 3] \bigcup \{5\}$. ■

Решение 2 (метод разложения на множители).

Внутри области определения, $x \in [1;\ 5]$, можно разложить левую и правую части ($\star$) на множители,

$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x} \leqslant \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{5-x}$.

Теперь перенесем все в левую часть и разложим на множители,

($\star\star$) $\sqrt{5-x}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}\right) \leqslant 0$.

Неравенство $f(x)g(x) \leqslant 0$ равносильно совокупности систем,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Запишем эту совокупность для ($\star\star$),

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{5-x} \leqslant 0, \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{5-x} \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5-x} \geqslant 0, \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{5-x} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система имеет единственное решение, $x=5$. Вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} x \leqslant 5, \\ \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 5], \\ x \in [1;\ 3], \end{cases}$$

что приводит, естественно, к тому же ответу. ■

Решение 3 (графический метод).

Нарисуем графики левой и правой частей ($\star$), рис. 63а. Сразу находим решение $x=5$. Границы промежутков найдем из уравнения

$$\sqrt{-x^2+6x-5} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{-x^2+6x-5}\right)^2 = (5-x)^2, \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15=0, \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{3;\ 5\}.\ ■$$

375. Решите неравенство (⋆) $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}} \leqslant 1.$

♦ $x \in \{-3\} \bigcup (1;+\infty).$

Решение 1. Неравенство (⋆) равносильно

$$(\star\star)\ \ \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x+3}} \leqslant 0.$$

Неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$ равносильно совокупности систем,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Запишем эту совокупность для неравенства (⋆⋆),

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \leqslant 0, \\ 2-\sqrt{x+3} > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \geqslant 0, \\ 2-\sqrt{x+3} < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ \begin{cases} x \geqslant -3, \\ \sqrt{x+3} \geqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

Решение 2. Целесообразно было бы перед тем, как решать (⋆), выполнить замену переменной, $t=\sqrt{x+3}$. Тогда

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{2-t} \leqslant 0, \\ t=\sqrt{x+3}. \end{cases}$$

Метод интервалов дает

$$\begin{cases} t \in (-\infty;\ 0] \bigcup [2;\ +\infty], \\ t=\sqrt{x+3}, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \{0\} \bigcup [2;\ +\infty], \\ t=\sqrt{x+3}. \end{cases}$$

При использовании замены труднее потерять изолированное решение. ■

376. Решите неравенство (⋆) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$

♦ $x \in [-2;\ -1] \bigcup \{3\}.$

Решение. Приведем к общему знаменателю,

$$(\star) \Leftrightarrow \sqrt{6+x-x^2}\cdot\frac{-x-1}{(x+4)(2x+5)} \geqslant 0.$$

Метод интервалов дает $x \in [-2;\ -1] \bigcup \{3\}$. ■

377. Решите неравенство $\sqrt{-x^2+4|x-1|+1} \leqslant \dfrac{9-3x}{5}$.

♦ $x \in [-5;\,-2] \bigcup \left[\frac{11}{17};\,\frac{26}{17}\right] \bigcup \{3\}$.

Решение 1. Пусть
$(\star)$ $f(x) = \sqrt{-x^2+4|x-1|+1}$,
$(\star\star)$ $g(x) = \dfrac{9-3x}{5}$.
(1) При $x \leqslant 1$ получим $|x-1| = 1-x$,
$f(x) = \sqrt{-x^2+4(1-x)+1} = \sqrt{-x^2-4x+5} = \sqrt{-(x+2)^2+9}$.
Область определения $x \in [-5;\,1]$, график функции $f(x)$ — верхняя полуокружность с центром в точке $(-2;\,0)$ и с радиусом 3.
(2) При $x \geqslant 1$ аналогично получим
$f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{-(x-2)^2+1}$,
область определения $x \in [1;\,3]$, график — верхняя полуокружность с центром в точке $(2;\,0)$ и с радиусом $r = 1$. Нарисуем графики левой и правой частей $(\star)$, рис. 63b.
(3) Уравнение $\sqrt{-x^2-4x-5} = \frac{9-3x}{5}$ имеет корни $x \in \{-3;\,\frac{11}{17}\}$.
(4) Уравнение $\sqrt{-x^2+4x-3} = \frac{9-3x}{5}$ имеет корни $x \in \{\frac{26}{17};\,3\}$.
Важно заметить, что в решении присутствует изолированная точка $x = 3$. По графикам определяем набор промежутков, составляющий ответ, $x \in [-5;\,-2] \bigcup \left[\frac{11}{17};\,\frac{26}{17}\right] \bigcup \{3\}$. ■

Решение 2. Приведем решение методом равносильных преобразований. Впрочем, вероятность проделать все эти преобразования без ошибок и разобраться к тому же, какой конец промежутка лежит левее, а какой конец – правее концов другого промежутка, практически равна нулю.

$$\sqrt{-x^2+4|x-1|+1} \leqslant \frac{9-3x}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 1, \\ \sqrt{-x^2+4(1-x)+1} \leqslant \dfrac{9-3x}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{-x^2+4(x-1)+1} \leqslant \dfrac{9-3x}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

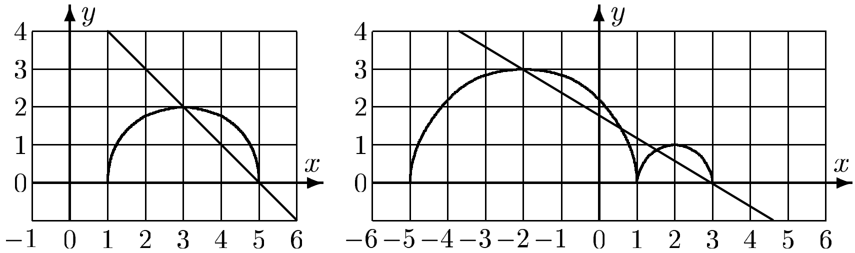

Рис. 63. Иррациональная функция

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 1, \\ 5\sqrt{-x^2-4x+5} \leqslant 9-3x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 5\sqrt{-x^2+4x-3} \leqslant 9-3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 1, \\ -x^2-4x+5 \geqslant 0, \\ 9-3x \geqslant 0, \\ 25(-x^2-4x+5) \leqslant (9-3x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ -x^2+4x-3 \geqslant 0, \\ 9-3x \geqslant 0, \\ 25(-x^2+4x-3) \leqslant (9-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 1, \\ -25x^2-100x+125 \leqslant 81-54x+9x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -25x^2+100x-75 \leqslant 81-54x+9x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 1, \\ -34x^2-46x+44 \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -34x^2+154x-156 \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [11/17;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \in (-\infty;\ 26/17] \bigcup [3;\ +\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-5;\ -2] \bigcup [11/17; 1], \\ x \in [26/17;\ 3]. \end{array}\right. \qquad \blacksquare$$

378. Решите неравенство ($\star$) $\dfrac{\sqrt{24+2x-x^2}}{2-x} \leqslant 0.$

♦ $x \in \{-4\} \bigcup (2;\ 6]$.

Решение. В данном случае можно использовать метод интервалов. Знаковый портрет функции $f(x)$ в левой части ($\star$) настолько прост, что обойдемся без иллюстрации. Область определения $x \in [-4;\ 2) \bigcup (2;\ 6]$, причем в точках $x \in \{-4;\ 2\}$ будет $f(x) = 0$, а в точке $x = 2$ функция меняет знак. Поэтому множество всех решений состоит из изолированной точки и полуоткрытого промежутка. ■

6.4. Задачи для самостоятельного решения

6.4.1. Иррациональные уравнения и неравенства, 1

379. Решите неравенство $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

380. Решите неравенство $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x-1}$.

381. Решите неравенство $\sqrt{-5+6x-x^2} > 8-2x$.

382. Решите неравенство $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

383. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{x-1}} = 2$.

384. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{x-1}} = 1$.

385. Решите неравенство $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} < 4$.

386. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x-4} < x-2$.

387. Решите уравнение $\sqrt[4]{57+x} + \sqrt[4]{25-x} = 4$.

388. Решите неравенство $\sqrt[4]{57+x} + \sqrt[4]{25-x} \leqslant 4$.

389. Решите уравнение $\sqrt[3]{76+x} - \sqrt[3]{76-x} = 2$.

390. Решите уравнение $\sqrt{4x^2+9x+5} = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x^2+x-1}$.

391. Решите неравенство $\sqrt{16x^2+18x+5} > \sqrt{4x^2-1} + \sqrt{8x^2+2x-1}$.

6.4.2. Иррациональные уравнения и неравенства, 2

392. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} < x+3$.

393. Решите неравенство $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$.

394. Решите неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 3x-6$.

395. Решите неравенство $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

396. Решите неравенство
$\sqrt{4x^2-15x+14} > \sqrt{x^2-6x+8} + \sqrt{2x^2-11x+14}$.

397. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x-1}}=2$.

398. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x-1}}=4$.

Решение. ■

399. Решите неравенство $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+9}<6$.

400. Решите неравенство $\sqrt{-x^2-5x-4}\geqslant 3-3|x+2|$.

401. Решите уравнение $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$.

402. Решите неравенство $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}\geqslant 8$.

403. Решите уравнение $\sqrt[3]{140+x}-\sqrt[3]{140-x}=2$.

404. Решите неравенство
$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x^2+2x-4}\leqslant 0$.

Ответы

379. ♦ $-1\leqslant x<\frac{5-\sqrt{29}}{10}$. **380.** ♦ $x>2/\sqrt{3}$. **381.** ♦ $x\in(3;5]$.
382. ♦ $x\in(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ (\sqrt{13}-1)/6)$. **383.** ♦ $x\in[2;\ +\infty)$.
384. ♦ $x=\frac{5}{4}$. **385.** ♦ $x\in\left[-2;\ \frac{97}{64}\right)$ **386.** ♦ $4\leqslant x<8$.
387. ♦ $x\in\{24;\ -56\}$. **388.** ♦ $x\in[-57;\ -56]\cup[24;\ 25]$.
389. ♦ $x=49$. **390.** ♦ $x\in\{-1;\ 5\}$.
391. **392.** ♦ $x<-7/9$. **393.** ♦ $2/3<x\leqslant 3$. **394.** ♦ $x=2$.
395. ♦ $x\in(-2;\ -1]\cup[-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3})$. **396.** **397.** ♦ $x\in[1;\ 2]$.
398. ♦ $x=5$.

Решение. ■ **399.** ♦ $x\in\left[-5;\ \frac{19}{9}\right)$. **400.** ♦ $x\in[-4;\ -5/2]\cup[-13/10;\ -1]$. **401.** ♦ $x=\pm 49$. **402.** ♦ $x\in[-49;\ 49]$.
403. ♦ $x=76$. **404.** ♦ $x\in\left[2;\ \frac{\sqrt{34}-1}{2}\right]$.