Государственный университет — Высшая школа экономики

А.А.Быков

Решение задач ЕГЭ по математике

Текстовые задачи,
тригонометрия,
показательная и логарифмическая функции

Для учащихся 10-х и 11-х классов

Москва 2009

Содержание

Тема 8. Натуральные и рациональные числа

8.1. Натуральные и целые числа

8.1.1. Арифметические действия с натуральными числами

Теоретические сведения Десятичная цифра – это один символ из набора 0; . . . ; 9. Цифра не имеет числового значения. Для цифр вводятся понятия "равно" (очевидным образом) и "старше", причем 9 старше, чем 8, и т.д. Натуральное число — это конечная последовательность десятичных цифр, начинающаяся не с цифры 0. Натуральные числа равны, если они состоят из одинаковых (равных) цифр (с учетом порядка следования). Для натуральных чисел определяются отношения $>$ и $<$. Если натуральное число m содержит больше цифр, чем n, то $m > n$. Если количество цифр одинаково, то m и n сравниваются слева направо, и $m > n$ при условии, что первая встретившаяся цифра числа m, отличающаяся от стоящей на той же позиции цифры числа n, старше. Для натуральных чисел вводится правило сложения. Числа складываются справа налево по всем известному правилу, которое мы не будем напоминать. Разность $m-n$ натуральных чисел m и n, где $m > n$, определяется как такое число k, что $m = n+k$. Мы не будем доказывать теорему о корректности этого определения, т.е. о том, что для любых m и n, таких что $m > n$, разность $m - n$ существует и единственна. Далее определяется произведение натуральных чисел по стандартному правилу, и доказываются корректность этого определения и правила $m+n = m+n$, $m(n+k) = mn+mk$, и т. д. Чтобы отличать десятичное натуральное число от последовательности символов, будем над десятичными числами добавлять черту, например, $\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}$ или $\overline{34x5y67}$. Значение числа $\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}$ равно $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^na_n$.

Теоретические сведения Последняя десятичная циф-

ра натурального числа, равного значению выражения $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \cdot \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}$ равна последней десятичной цифре числа, равного значению выражения $\overline{a_0} \cdot \overline{b_0}$.
Последняя десятичная цифра числа, равного значению выражения $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} + \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}$ равна последней десятичной цифре числа, равного значению выражения $\overline{a_0} + \overline{b_0}$.
Последняя десятичная цифра числа, равного значению выражения $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} - \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}$, если это значение положительно, равна последней десятичной цифре числа, равного значению выражения $\overline{a_0} + 10 - \overline{b_0}$.

1. Найдите последнюю цифру числа $1234 \cdot 4567$

1 2 **2** 4 **3** 6 **4** 8 **5** 0

Ответ **4** ♦ $1234 \cdot 4567 = \dots 8$.

Решение. Такая же, как у числа $4 \cdot 7 = 28$. ■

2. Найдите остаток от деления $1234567 \cdot 2345678$ на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1** ♦ $1234567 \cdot 2345678 = \dots 6$.

Решение. Остаток такой же, как у числа $7 \cdot 8 = 56$. ■

Теоретические сведения Для обозначения остатка от деления натурального числа n на натуральное число k будем использовать обозначение $n \mod k$. Равенство $n \mod k = r$ означает, что $n = kd + r$, где
$r \in \{0; \dots (k-1)\}$. Иногда то же равенство используют и для определения остатка от деления отрицательного целого числа на натуральное число, например, $-7 \mod 5 = 3$, так как $-7 = 5 \cdot (-2) + 3$.
Правила вычисления остатков:

$$(x \pm y) \bmod n = \left[(x \bmod n) \pm (y \bmod n)\right] \bmod n,$$
$$(x \cdot y) \bmod n = \left[(x \bmod n) \cdot (y \bmod n)\right] \bmod n.$$

8.1.2. Метод математической индукции

Предположим, что Bill действует в соответствии со следующим правилом, которое он никогда не нарушает. Если в некоторый день он выполнил утренний комплекс физических упражнений (УКФУ), то на следующий день он также обязательно сделает УКФУ. Тогда, вообще говоря, имеются три возможности.

1. В первый день он выполнил УКФУ. Тогда он сделает это также и во второй день. Тогда он сделает это также и на третий день, и так далее. Поэтому он каждый день выполняет УКФУ.

2. Он никогда не выполняет УКФУ. Это не противоречит его правилам.

3. В первый день он не выполнил УКФУ, но однажды, собравшись с силами, сделал это. Остановиться после этого он не сможет.

Способ рассуждений, использованный в первом случае, называется метод математической индукции.

3. Докажите, что
($\star$) для всех $n \in N$ число $n^3 - n$ делится нацело на 6.
Решение 1 (метод анализа остатков). Пусть остаток от деления n на 6 равен k, т. е. $n = 6k + r$, $r \in \{0; \ldots; 5\}$. Тогда
$n^3 - n = (6k)^3 + 3 \cdot (6k)^2 \cdot r + 3 \cdot (6k) \cdot r^2 + r^3 - 6k - r$,
поэтому $(n^3 - n) \mod 6 = (r^3 - r) \mod 6$. Осталось проверить остатки от деления $r^3 - r$ на 6 для $r \in \{0; 5\}$. Сделаем это,
$(0^3 - 0) \mod 6 = 0 \mod 6 = 0$,
$(1^3 - 1) \mod 6 = 0 \mod 6 = 0$,
$(2^3 - 2) \mod 6 = 6 \mod 6 = 0$,
$(3^3 - 3) \mod 6 = 24 \mod 6 = 0$,
$(4^3 - 4) \mod 6 = 60 \mod 6 = 0$,
$(5^3 - 5) \mod 6 = 120 \mod 6 = 0$, и на этом наше доказательство успешно завершено. ■
Решение 2 (метод математической индукции). При $n = 2$ утверждение ($\star$) верно, так как $2^3 - 2 \mod 6 = 0$. Пусть при некотором натуральном $n \geqslant 2$ справедливо равенство $n^3 - n \mod 6 = 0$. Рассмотрим следующее по порядку натуральное число $n+1$ и вычислим $(n+1)^3 - (n+1) \mod 6 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \mod 6 = [(n^3 - n) + 3n(n+1)] \mod 6 = \big[(n^3 - n)$

$\bmod 6 + [3n(n+1)] \bmod 6] \bmod 6 = 0$, так как при четном n имеем $3n \bmod 2 = 0$, так что $(n+1) \bmod 3 = 0$, а при нечетном n имеем $3n \bmod 3 = 0$, так что $(n+1) \bmod 2 = 0$, и в обоих случаях $[3n(n+1)] \bmod 6 = 0$.
Заметим, что утверждение
$[(n^3-n)+3n(n+1)] \bmod 6 = (n^3-n) \bmod 6 + [3n(n+1)] \bmod 6$, вообще говоря, не является верным. Например,
$(10+11) \bmod 6 = 3$,
$10 \bmod 6 + 11 \bmod 6 = 9$.
Верным будет утверждение
$(10+11) \bmod 6 = (10 \bmod 6 + 11 \bmod 6) \bmod 6$. ■

4. Используя метод математической индукции, докажите, что $(\star)$ $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Заметим, что $1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$. Таким образом, $(\star)$ верно при $n = 2$. Если $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, то $1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Это равенство равнеосильно $(\star)$ для номера $n+1$. ■

8.1.3. Деление натуральных чисел, неполное частное и остаток

Теоретические сведения Если неполное частное равно d, делитель k, остаток r, то делимое равно $n = k \cdot d + r$. Всегда $k > 0$, $r \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$. Эти же формулы верны и для отрицательных n. Обратите внимание на то, что и в этом случае остаток — неотрицательное число.

5. Если неполное частное равно 16, делитель 19, остаток 13, то делимое равно

1 317 **2** 318 **3** 319 **4** 314 **5** 316

Ответ **1** ♦ 317.

Решение. Делимое $n = 16 \cdot 19 + 13 = 317$. ■

6. Найдите наибольшее натуральное число, для которого неполное частное от деления на 19 равно 16 и укажите в ответе остаток от деления указанного натурального числа на 5:

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ $N = 16 \cdot 19 + 18 = 322.$

Решение. При заданном делителе $k > 0$, неполном частном d остаток может принимать значения $r \in \{0; \ldots ; k-1\}$, поэтому делимое
$n = k \cdot d + r \in \{kd;\, kd+1; \ldots ; kd+k-1\}$. Наибольшее значение делимого
$kd + k - 1 = N = 16 \cdot 19 + 18 = 322.$ ■

8.1.4. Целая степень натурального числа и ее свойства.

Теоретические сведения Последняя десятичная цифра числа, равного M^m, где M и m — натуральные числа, при фиксированном M зависит от значения m по периодическому закону. Значение периода определяется последней цифрой числа M. Например, при $M = \overline{\ldots 2}$ период составляет 4 номера: $\left(\overline{\ldots 2}\right)^1 = \overline{\ldots 2}$, $\left(\overline{\ldots 2}\right)^2 = \overline{\ldots 4}$, $\left(\overline{\ldots 2}\right)^3 = \overline{\ldots 8}$, $\left(\overline{\ldots 2}\right)^4 = \overline{\ldots 6}$, $\left(\overline{\ldots 2}\right)^5 = \overline{\ldots 2}$ и далее идет повторение.

7. (1) Найдите последнюю (самую правую) десятичную цифру числа 3^{1000}. ♦ Последнняя цифра 1; период повторения последней цифры равен 4 номера, поэтому последнняя цифра числа 3^{1000} совпадает с последней цифрой числа 3^4.
(2) Найдите последнюю цифру числа 43^{43}. ♦ 7, повторяется с периодом 4.
(3) Найдите последнюю цифру числа 17^{17}. ♦ 7, повторяется с периодом 4.
(4) Найдите последнюю цифру числа $43^{43} - 17^{17}$. ♦ 0.
(5) Найдите предпоследнюю десятичную цифру числа 6^{1000}. ♦ $6^2 = \ldots 36$; $6^3 = \ldots 16$; $6^4 = \ldots 96$; $6^5 = \ldots 76$; $6^6 = \ldots 56$; $6^7 = \ldots 36$; $6^8 = \ldots 16$; $6^9 = \ldots 96$; Повторяется с периодом 5.

Теоретические сведения Последняя десятичная цифра натурального числа равна остатку от деления на 10. Закон периодичности выполняется и для остатков от деления на любое другое натуральное число.

8. Найдите остаток от деления числа $2222^{5555} - 5555^{2222}$ на 7.
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{5}$♦ остаток 0, $\left(2222^{5555}\right) \bmod 7 = 5$, $\left(5555^{2222}\right) \bmod 7 = 5$.

Решение. Пусть $m = 2222$. Тогда $\left(m^1\right) \bmod 7 = 3$; $\left(m^2\right) \bmod 7 = 2$; $\left(m^3\right) \bmod 7 = 6$; $\left(m^4\right) \bmod 7 = 4$; $\left(m^5\right) \bmod 7 = 5$; $\left(m^6\right) \bmod 7 = 1$; $\left(m^7\right) \bmod 7 = 3$; период равен 6. Заметим теперь, что $5555 \bmod 6 = 5$. Поэтому $\left(2222^{5555}\right) \bmod 7 = \left(2222^5\right) \bmod 7 = 5$. Аналогично найдем $\left(5555^{2222}\right) \bmod 7 = 5$. ■

8.1.5. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25

9. Пусть $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$. Признаки делимости:
(1) на 2: $a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
(2) на 3: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ делится на 3.
(3) на 4: $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4.
(4) на 8: $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8.
(5) на 5: $a_0 \in \{0; 5\}$.
(6) на 9: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ делится на 9.
(7) на 11 при четном n: $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + a_{n-4} - \dots + a_2 - a_1 + a_0$ делится на 11 или равно нулю.
(8) на 11 при нечетном n: $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + a_{n-4} - \dots - a_2 + a_1 - a_0$ делится на 11 или равно нулю.
(9) на 25: $\overline{a_1 a_0} \in \{\overline{00}; \overline{25}; \overline{50}; \overline{50}\}$.
(10) на 50: $\overline{a_1 a_0} \in \{\overline{00}; \overline{50}\}$.

10. Нацело делится на 8 число
$\boxed{1}$ 364 $\boxed{2}$ 328 $\boxed{3}$ 339 $\boxed{4}$ 342 $\boxed{5}$ 362

Ответ $\boxed{2}$♦ 328.

Решение. Так как $32 \bmod 8 = 0$, то $320 \bmod 8 = 0$, и $328 \bmod 8 = 0$. ■

11. Найдите все трехзначные числа вида $\overline{3x4}$, делящиеся на 4.
♦ $\overline{304}$; $\overline{324}$; $\overline{344}$; $\overline{364}$; $\overline{384}$.

Решение. В соответствии с признаком делимости на 4, должно быть
$\overline{x4} \mod 4 = 0$, поэтому $x \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. ■

8.1.6. Признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 22, 24, 33, 36, 45, 75

Теоретические сведения Натуральное число n делится на составное число $m = m_1 \cdot m_2$, где m_1 и m_1 взаимно простые натуральные числа, тогда и только тогда, когда n делится на m_1 и m_2. Например, натуральное число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Неверно будет сказать, что натуральное число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 12 и на 3, так как 3 и 12 не являются взаимно простыми.

12. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$, делящиеся на 36. ⧫ $\overline{34452}$; $\overline{34056}$; $\overline{34956}$.

Решение. В соответствии с признаком делимости на 36, должно быть
$$\begin{cases} \overline{34x5y} \mod 4 = 0, \\ \overline{34x5y} \mod 9 = 0. \end{cases}$$
Начать удобнее с делимости на 4, $\overline{5y} \mod 4 = 0$, поэтому $y \in \{2;\ 6\}$. Таким образом, имеются две возможности **(1)** $\overline{34x52} \mod 9 = 0$, и тогда используем признак делимости на 9, откуда $(14 + x) \mod 9 = 0$, $x = 4$, **(2)** $\overline{34x56} \mod 9 = 0$, $(18 + x) \mod 9 = 0$, $x \in \{0;\ 9\}$. ■

13. Сумма всех положительных двузначных чисел, кратных 7, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 735 $\boxed{\mathbf{2}}$ 810 $\boxed{\mathbf{3}}$ 616 $\boxed{\mathbf{4}}$ 721 $\boxed{\mathbf{5}}$ 728

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$⧫ 728.

Решение. Первое из таких чисел равно $7 \cdot 2$, последнее равно $7 \cdot 14$. Их количество $14 - 2 + 1 = 13$, сумма $\frac{7\cdot2+7\cdot14}{2} \cdot 13 = \frac{7\cdot16}{2} \cdot 13 = 7 \cdot 8 \cdot 13 = 728$. ■

14. Сколько существует двузначных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 11 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 13 $\boxed{\mathbf{4}}$ 14 $\boxed{\mathbf{5}}$ 15

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ♦ 12.

Решение. Первое из таких чисел равно $7 \cdot 2 + 2$, последнее равно $7 \cdot 13 + 2$. Их количество $13 - 2 + 1 = 12$, сумма равна $\frac{7\cdot2+2+7\cdot13+2}{2} \cdot 12$. ■

15. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, которые

(1) делятся на 15. ♦ Эти числа $15 \cdot 7; \ldots; 15 \cdot 66$, их количество $N_{15} = 60$.
(2) делятся на 12. ♦ Эти числа $12 \cdot 9; \ldots; 12 \cdot 83$; $N_{12} = 75$.
(3) кратны каждому из двух чисел 12 и 15. ♦ Эти числа кратны наименьшему общему кратному чисел 12 и 15, т. е. кратны 60, и образуют множество $60 \cdot 2; \ldots; 60 \cdot 16$; $N_{12\bigcap15} = 15$.

(4) кратны 12, но не кратны 15. ♦ Их количество равно $N_{12\bigcap\not15} = N_{12} - N_{12\bigcap15} = 75 - 15 = 60$.

(5) кратны 15, но не кратны 12. ♦ Их количество равно $N_{\not12\bigcap15} = N_{15} - N_{12\bigcap15} = 60 - 15 = 45$.

(6) кратны хотя бы одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N_{12\bigcup15} = 60 + 75 - 15 = 120$.

(7) кратны только одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N_{(12\bigcap\not15)\bigcup(15\bigcap\not12)} = 60 + 75 - 15 - 15$.

(8) не кратны ни одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N = 900 - 120$.

16. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, которые

(1) делятся на 15. ♦ Эти числа $15 \cdot 7; \ldots; 15 \cdot 66$, их количество $N_{15} = 60$.
(2) делятся на 12. ♦ Эти числа $12 \cdot 9; \ldots; 12 \cdot 83$; $N_{12} = 75$.
(3) кратны каждому из двух чисел 12 и 15. ♦ Эти числа кратны наименьшему общему кратному чисел 12 и 15, т. е. кратны 60, и образуют множество $60 \cdot 2; \ldots; 60 \cdot 16$; $N_{12\bigcap15} = 15$.

(4) кратны 12, но не кратны 15. ♦ Их количество равно $N_{12\bigcap\not15} = N_{12} - N_{12\bigcap15} = 75 - 15 = 60$.

(5) кратны 15, но не кратны 12. ♦ Их количество равно

$N_{\not 12\bigcap 15} = N_{15} - N_{12\bigcap 15} = 60 - 15 = 45.$
(6) кратны хотя бы одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N_{12\bigcup 15} = 60 + 75 - 15 = 120.$
(7) кратны только одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N_{(12\bigcap \not 15)\bigcup(15\bigcap \not 12)} = 60 + 75 - 15 - 15.$
(8) не кратны ни одному из двух чисел 12 и 15. ♦ $N = 900 - 120.$

17. Обоснуйте иррациональность:
(1) числа $\sqrt{2}$, **(2)** числа $\sqrt{7}$, **(3)** числа $\sqrt{5-\sqrt{7}}$, **(4)** числа $\sin 15°$.

Решение. Докажем, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Используем метод доказательства от противного. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, причем эта дробь несократима. Тогда $2n^2 = m^2$, m^2 делится нацело на 2, поэтому m делится нацело на 2, m^2 делится нацело на 4, n^2 делится нацело на 2, n делится нацело на 2, так что дробь $\frac{m}{n}$ — сократимая. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

8.1.7. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Теоретические сведения Если разложение натурального числа x на простые сомножители содержит ровно m сомножителей, равных простому числу p, а разложение натурального числа y на простые сомножители содержит ровно n сомножителей, равных тому же числу p, то разложение наименьшего общего кратного (НОК) чисел x и y на простые сомножители содержит ровно $\max(m, n)$ сомножителей, равных числу p. При тех же условиях разложение наибольшего общего делителя (НОД) чисел x и y на простые сомножители содержит ровно $\min(m, n)$ сомножителей, равных числу p. Иными словами, для вычисления НОД простые сомножители нужно обьединить, а для вычисления НОК простые сомножители нужно пересечь.

18. **(1)** Найдите НОК чисел: $12 = 2\cdot 2\cdot 3$ и $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ ♦ $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$.
(2) Найдите НОД чисел: $12 = 2\cdot 2\cdot 3$ и $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ ♦ $2\cdot 2$.

(3) Найдите НОК чисел: $x = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}11$ и $y = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}11$
♦ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11$.
(4) Найдите НОД чисел: $x = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}11$ и $y = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}11$
♦ $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$.

19. Одно колесо имеет в окружности 95 см, а другое 155 см. Укажите наименьшее расстояние, на котором оба колеса сделают целое число оборотов.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 32 м 5 см $\boxed{\mathbf{2}}$ 28 м 5 см $\boxed{\mathbf{3}}$ 29 м 45 см $\boxed{\mathbf{4}}$ 33 м 35 см
$\boxed{\mathbf{5}}$ 31 м 5 см

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 2945 см.

Решение. Путь, который должен проделать автомобиль, чтобы все его колеса сделают целое число оборотов, равен НОК длин окружностей. Для указанных чисел, $95 = 5 \cdot 19$ и $155 = 5 \cdot 31$, НОК равно $5 \cdot 19 \cdot 31$. ■

8.1.8. Условия деления нацело

20. Вычислите сумму всех целых чисел n, при которых дробь $\frac{n+5}{n+2}$ является целым числом

$\boxed{\mathbf{1}}$ 8 $\boxed{\mathbf{2}}$ -8 $\boxed{\mathbf{3}}$ -4 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 2

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $S = -8$.

Решение. Выделим целую часть, $\frac{n+5}{n+2} = \frac{n+2+3}{n+2} = 1 + \frac{3}{n+2}$. Так как
$1 + \frac{3}{n+2} \in Z$, то $\frac{3}{n+2} \in Z$, $n + 2 \in \{\pm 1;\ \pm 3\}$, $n \in \{-2 \pm 1;\ -2 \pm 3\}$. ■

21. Докажите, что
(1) $n(n^2 + 5)$, $n \in N$, делится на 6.
(2) если $n > 3$, $n \in N$ — простое, то $n^2 - 1$ делится на 24.
Решение 1. Пусть $n = 6m + r$, $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Тогда
$n(n^2+5) = (6m+r)(36m^2+12mr+r^2+5) = 6k+r(r^2+5)$, $k \in Z$.
Теперь проверяем $r = 0$, $r(r^2 + 5) = 0$, $r = 1$, $r(r^2 + 5) = 6$,
$r = 2$, $r(r^2 + 5) = 2 \cdot 9 = 18$, $r = 3$, $r(r^2 + 5) = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$,
$r = 4$, $r(r^2 + 5) = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14$, $r = 5$, $r(r^2 + 5) = 5 \cdot 30 = 6 \cdot 25$,
во всех случаях имеется делимость на 6. ■

8.1.9. Обьединение и пересечение конечных множеств.

22. Множество M содержит m элементов, x элементов обладают свойством X, y элементов обладают свойством Y, z элементов обладают свойствами X и Y одновременно. Сколько элементов M не обладают ни одним из свойств X и Y? ♦ $m - x - y + z$.

Решение. Из условий задачи следует, что $x - z$ элементов множества обладают свойством X, но не обладают свойством Y, $y - z$ элементов множества обладают свойством Y, но не обладают свойством X. Число элементов множества, которые не обладают ни одним из свойств X и Y, можно вычислить по формуле $t = m - (x - z) - (y - z) - z = m - x - y + z$. ■

23. Опрос прохожих на улицах Петербурга показал, что 61% из них учатся, 63% работают, 13% не учатся и не работают. Сколько прохожих одновременно учатся и работают?

1 27% **2** 48% **3** 34% **4** 37% **5** 43%

Ответ **4** ♦ 37%.

Решение. Решение состоит в последовательном заполнении таблицы

(1)

	У	НУ	Σ
Р	*	*	63
НР	*	13	*
Σ	61	*	100

(2)

	У	НУ	Σ
Р	*	*	63
НР	*	13	37
Σ	61	39	100

(3)

	У	НУ	Σ
Р	*	26	63
НР	24	13	37
Σ	61	39	100

(4)

	У	НУ	Σ
Р	37	26	63
НР	24	13	37
Σ	61	39	100

■

24. Из 120 элементов множества M, 54 элемента обладают свойством X, 75 элементов обладают свойством Y, 32 элемента обладают свойствами X и Y. Сколько элементов M не обладают ни одним из свойств X и Y? ♦ $120 - (54 + 75 - 32) = 23$.

25. Множество M содержит m элементов, x элементов обладают свойством X, y элементов обладают свойством Y, z элементов не обладают ни свойством X, ни свойством Y. Сколько элементов M обладают свойствами X и Y одновременно?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $m - x - y + z$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $m + x + y - z$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $m + x + y + z$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $-m + x + y + z$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-m + x + y - z$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $-m + x + y + z$.

26. В результате опроса 40 жителей Москвы выяснилось, что 28 опрошенных посещают кинотеатры, 24 посещают стадионы, 17 посещают и кинотеатры, и стадионы. Сколько человек из числа опрошенных не посещают ни кинотеатры, ни стадионы? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ это число равно 5.

27. В классе 30 учеников, 17 из них изучают английский язык, 18-французский, а 6 учеников не изучают ни одного иностранного языка. Сколько учеников изучают одновременно английский и французский языки?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 5 $\boxed{\mathbf{3}}$ 9 $\boxed{\mathbf{4}}$ 11 $\boxed{\mathbf{5}}$ 13

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 11.

28. Среди всех школьников $\dfrac{3}{4}$ их общего числа изучают английский язык, $\dfrac{3}{5}$ изучают французский язык, $\dfrac{9}{20}$ изучают оба упомянутых языка. Какова доля школьников, не изучающих ни один из упомянутых языков?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{20}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{10}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3}{20}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{5}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{1}{4}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{1}{10}$; $\quad 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{9}{20}$.

8.1.10. Линейные уравнения в целых числах

29. Найдите все пары целых чисел $(x,\ y)$, для которых
$(\star)\ \ 13x - 7y = 6.$
♦ $x = 1 - 7k, y = 1 - 13k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Решение. Выберем из двух величин $\{x,\, y\}$ ту, коэффициент при которой в уравнении ($\star$) меньше (если коэффициент отрицателен, берем его модуль). В нашем случае это коэффициент при y. Выразим y через x, $y = \frac{13x-6}{7}$. Выделим целую часть, $y = \frac{14x-x-7+1}{7} = 2x-1+\frac{-x+1}{7}$. Так как y — целое число, то $\frac{-x+1}{7}$ — также целое число, которое можно обозначить, например, буквой k. В результате получилось новое уравнение $\frac{-x+1}{7} = k$, которое также нужно решить в целых числах. Выразим снова неизвестную величину, коэффициент при которой является наименьшим по модулю, $x = 1 - 7k, k \in \mathbf{Z}$. После этого y найдем по формуле $y = 2x - 1 + k$. Таким образом, $x = 1 - 7k, y = 1 - 13k$, $k \in \mathbf{Z}$. Обратите внимание на то, что все решения на плоскости $(x;\, y)$ расположены на прямой, которая определяется уравнением ($\star$). Расстояния между соседними точками на этой прямой одинаковы. ■

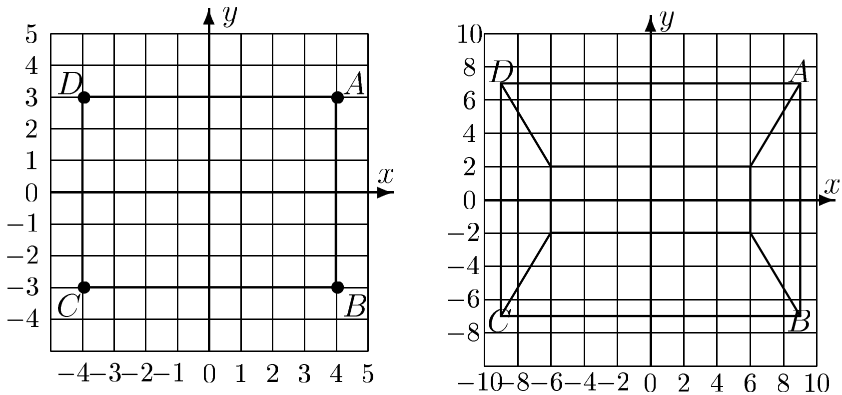
30. Найдите все пары целых чисел $(x,\, y)$, для которых $9x + 25y = 12$.
♦ $x = -25m - 7$, $y = 9m + 3$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Выразим x через y, $x = \frac{12-25y}{9} = \frac{9+3-27y+2y}{9} = 1 - 3y + \frac{2y+3}{9}$. Так как x — целое число, то $\frac{2y+3}{9}$ — также целое число, которое можно обозначить, например, буквой k, $\frac{2y+3}{9} = k$. Поэтому $2y + 3 = 9k$. Далее решаем это уравнение так же, как предыдущее, $y = \frac{9k-3}{2} = \frac{8k+k-2-1}{2} = 4k-1+\frac{k-1}{2}$, $\frac{k-1}{2} = j$, $j \in Z$, $k = 2j+1$, $y = 4(2j+1)-1+j = 9j+3$, $x = 1-3(9j+3)+2j+1 = -25j-7$. Например, одно из решений $(x;\, y) = (-7;\, 3)$. ■

8.1.11. Нелинейные уравнения в целых числах

31. Найдите наибольшую площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого являются целыми числами и удовлетворяют уравнению ($\star$) $x^2 - y^2 = 7$.
♦ 48 ♦ $(x;\, y) \in \{\pm(4;\, \pm 3)\}$.

Решение. Разложим левую часть ($\star$) на множители,
$(x - y)(x + y) = 7$. Следовательно, величины $x - y$ и $x + y$ должны быть целочисленными делителями числа 7. Простое число 7 имеет всего четыре целочисленных делителя, $\{\pm 1;\, \pm 7\}$.



(a) $x^2 - y^2 = 7$ **(b)** $x^2 - 2x - y^2 = 31$

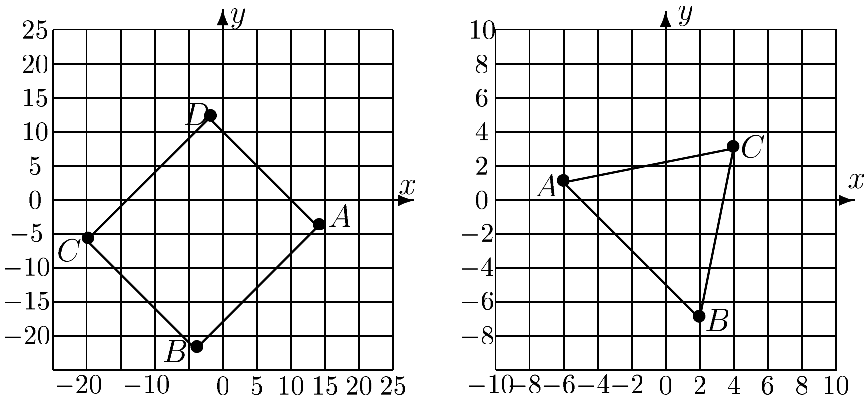
Рис. 1. Решение уравнений в целых числах

Поэтому возможны всего четыре случая, **(1)** $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -7, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4, \\ y = -3, \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y = -3, \end{cases}$ **(4)** $\begin{cases} x - y = -7, \\ x + y = -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4, \\ y = 3. \end{cases}$ Искомая фигура — прямоугольник со сторонами, равными 8 и 6, рис. 1a ■

32. Найдите наибольшую площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $(\star)$ $x^2 - 2x - y^2 = 31$.

♦ 252 ♦ $18 \cdot 14$, $(x - 1;\, y) \in \{(\pm 9;\, \pm 7) \bigcup (\pm 6;\, \pm 2)\}$.

Решение. Прибавив к левой и правой частям $(\star)$ число 1, получим
$(\star\star)$ $x^2 - 2x + 1 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - y^2 = 32$.
Разложим левую часть $(\star\star)$ на множители, $(x-1-y)(x-1+y) = 32$. Следовательно, величины $x - 1 - y$ и $x - 1 + y$ должны быть целочисленными делителями числа 32, причем возможны всего 24 случая, в том числе, например, **(1)** $\begin{cases} x - 1 - y = 8, \\ x - 1 + y = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7, \\ y = -2, \end{cases}$ и т.д. Перебирать все случаи не нужно. Целесообразно сделать



(a) $xy + 5x + 3y = 2$ **(b)** $3xy - 4x - 7y + 1 = 0$

Рис. 2. Решение уравнений в целых числах

замену $x - 1 = t$. Площадь фигуры в координатах $(t;\, y)$ не изменится, так как она получается из исходной параллельным переносом. Заметим также, что фигура имеет по крайней мере две оси симметрии, а именно оси $t = 0$ и $y = 0$, так что достаточно найти решения с положительными корординатами. Таких имеется всего два, $\begin{cases} t = 6, \\ y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} t = 9, \\ y = 7, \end{cases}$ Искомая фигура — прямоугольник $ABCD$ со сторонами, равными 18 и 14, рис. 1b ■

33. Найдите наибольшую площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $(\star)$ $xy + 5x + 3y = 2$.

♦ 576 ♦ $16 \cdot 18 \cdot 2$, $(x; y) \in \{(14; -4) \bigcup (-2; 12) \bigcup (-4; -22) \bigcup (-20; -6)\}$.

Решение. Прибавив к левой и правой частям $(\star)$ число 15, получим $(\star\star)$ $xy + 5x + 3y + 15 = 17$. Разложим левую часть $(\star\star)$ на множители, $(x + 3)(y + 5) = 17$. Дальше решение аналогично предыдущим задачам. Искомая фигура — прямоугольник со сторонами, равными $16\sqrt{2}$ и $18\sqrt{2}$, стороны которого образуют с осями координат углы $45°$, рис. 2a ■

34. Найдите наибольшую площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $(\star)$ $3xy - 4x - 7y + 1 = 0$.

⧫ 48 ⧫ $(x;\, y) \in \{(-6;\, 1) \bigcup (2;\, -7) \bigcup (4;\, 3)\}$.

Решение. Умножим левую часть уравнения $(\star)$ на 3, получим $3x \cdot 3y - 4 \cdot 3x - 7 \cdot 3y + 3 = 0$, $(3x-7)(3y-4) - 28 + 3 = 0$, $(3x-7)(3y-4) = 25$, **(1)** $\begin{cases} 3x - 7 = 1, \\ 3y - 4 = 25, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} 3x - 7 = -1, \\ 3y - 4 = -25, \end{cases}$

и т.д. Только три системы имеют целочисленные решения, $(x;\, y) \in \{(-6;\, 1) \bigcup (2;\, -7) \bigcup (4;\, 3)\}$.

Для вычисления площади треугольника ABC, в котором $\overrightarrow{AB} = (p;\, q)$, $\overrightarrow{AC} = (m;\, n)$, используем формулу $S = \dfrac{1}{2}|pn - qm|$.

В нашем случае $A(-6;\, 1)$, $B(2;\, -7)$, $C(4;\, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (8;\, -8)$, $\overrightarrow{AC} = (10;\, 2)$, $S = \dfrac{1}{2}|-80 - 16| = 48$, рис. 2b ■

35. Найдите все целочисленные решения уравнения
$(\star)$ $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$.

⧫ $(0;2), (2;1), (0;3), (-2;0)$.

Решение. Левая часть $(\star)$ является квадратным трехчленом относительно x (также и относительно y),
$(9y^2 - 9y + 2)x^2 + (6y^2 - 18y + 7)x + (y^2 - 5y + 6) = 0$. Если такой подход правилен, то дискриминант обязательно будет полным квадратом. В данном случае $D = 4y^2 + 4y + 1 = (2y+1)^2$, корни

$$x = \frac{-(6y^2 - 18y + 7) \pm (2y+1)}{2(9y^2 - 9y + 2)},\ x_1 = -\frac{y-3}{3y-2},\ x_2 = -\frac{y-2}{3y-1}.$$

Проще всего действовать методом интеллектуального подбора, нарисовав предварительно графики правой части *как функции от* y. Заметьте, что каждая гипербола имеет горизонтальную асимптоту $y = -1/3$, так что очень больших y в ответе быть не может. ■

8.1.12. Текстовые задачи с целочисленными решениями

36. В саду растут яблони и груши. Для каждой яблони требуется 1 ведро воды и 3 пакета удобрения, для каждой груши — 4 ведра воды и 2 пакета удобрения. На весь сад израсходовано 19 ведер воды и 27 пакетов удобрения. Сколько деревьев в саду?
♦ 10.

Решение. Пусть число яблонь равно x, груш — y. Из условий задачи следует, что $\begin{cases} x+4y=19, \\ 3x+2y=27. \end{cases}$ Умножим второе уравнение на 3, $\begin{cases} x+4y=19, \\ 9x+6y=81, \end{cases}$ и сложим уравнения, $10x+10y=100$. Следовательно, $x+y=10$. Мы не проверяли целочисленность величин x и y. Или эти величины целые, или решение задачи не существует. В данном случае легко найти $x=7$, $y=3$. ■

37. В саду растут деревья (не менее двух), на каждом из которых не менее двух яблок, на всех деревьях яблок поровну, сумма числа деревьев и общего числа яблок в саду равна 51. Найдите сумму числа деревьев и числа яблок, растущих на одном дереве.
♦ 19

Решение. Пусть число деревьев равно x, яблок на одном дереве — y. Из условий задачи следует, что $x+xy=51$, причем имеются ограничения $x \geqslant 2$, и $y \geqslant 2$. Так как x и y — натуральные числа, то x — делитель числа 51. С учетом ограничений, возможны следующие варианты, **(1)** $\begin{cases} x=3, \\ y=16, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x=17, \\ y=2. \end{cases}$ В обоих случаях $x+y=19$. ■

38. Некий господин каждый день с понедельника по четверг выпивает несколько бокалов пива, каждый день разное количество бокалов. Каждый бокал пива он закусывает раками, съедая в течение одного дня равное число раков в расчете на одну кружку. Оказалось, что каждый день он съедал ровно 15 раков. Сколько кружек пива он выпил за указанный период?
♦ 24

Решение. Пусть число бокалов равно x, раков в расчете на бокал — y. Из условий задачи следует, что $xy=15$. Так как x

и y — натуральные числа, то x — делитель числа 15. Возможны следующие варианты, **(1)** $\begin{cases} x = 1, \\ y = 15, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5, \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3, \end{cases}$ **(4)** $\begin{cases} x = 15, \\ y = 1. \end{cases}$ Всего $1 + 3 + 5 + 15 = 24$ бокала. ■

8.1.13. Задачи для самостоятельного решения

8.1.13.1. Натуральные, рациональные, действительные числа, 1

39. Докажите, что $\forall n \in N$ число $n^3 + 17n$ делится нацело на 6.

40. Докажите, что $\forall n \in N$ число $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится нацело на 6.

41. Используя метод математической индукции, докажите, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

42. Найдите наибольшее натуральное число, для которого неполное частное от деления на 326 равно 283 и укажите в ответе остаток от деления указанного натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

43. Найдите все трехзначные числа вида $\overline{3x4}$, делящиеся на 3.

44. Найдите все трехзначные числа вида $\overline{3x4}$, делящиеся на 11.

45. Найдите все трехзначные числа вида $\overline{3x4}$, делящиеся на 12.

46. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{1x34x}$, делящиеся на 12.

47. Сумма всех положительных трехзначных чисел, кратных 39, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 13104 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12012 $\boxed{\mathbf{3}}$ 13775 $\boxed{\mathbf{4}}$ 12763 $\boxed{\mathbf{5}}$ 12558

48. Остаток от деления 123456789 на 8 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 5 $\boxed{\mathbf{4}}$ 7 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

49. Остаток от деления 1234567 на 9 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 5 $\boxed{\mathbf{4}}$ 7 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

50. Остаток от деления 123456789 на 11 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 5 $\boxed{\mathbf{4}}$ 7 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

51. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2?

1 117 **2** 130 **3** 128 **4** 129 **5** 131

52. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 18.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

53. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 24.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

54. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 18 и на 24.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

55. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 18 и не делятся на 24.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

56. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 24 и не делятся на 18.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

57. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 18 или на 24.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

58. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые не делятся нацело на 18 и не делятся на 24.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

59. Вычислите сумму всех целых чисел n, при которых дробь $\frac{n^2+3n+5}{n+2}$ является целым числом.

1 -2 **2** -8 **3** -4 **4** 4 **5** 8

60. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, для которых $7x - 3y = 11$.

1 $x = 6m - 1$, $y = 14m - 6$ **2** $x = 9m - 1$, $y = 21m - 6$
3 $x = 7m - 5$, $y = 3m - 2$ **4** $x = 3m - 1$, $y = 7m - 6$
5 $x = 7m + 1$, $y = -3m - 6$, $m \in \mathbf{Z}$.

61. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x; y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $xy = 12$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

62. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x; y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = 24$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

63. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x; y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $xy - 2y = 2$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

64. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x; y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 36$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

65. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, для которых $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$.

66. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, для которых $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

67. Бабушка накормила несколько внуков и внучек. Каждому внуку она дала 3 котлетки и 2 конфетки, каждой внучке 1 котлетку и 3 конфетки. Всего внуки и внучки съели 23 котлетки и 27 конфеток. Сколько всего детей накормила бабушка?

1 9 **2** 10 **3** 11 **4** 12 **5** 13

68. В школе не менее трех классов, в каждом из которых не менее трех школьников, во всех поровну, разность общего числа школьников и общего числа классов равна 91. Найдите сумму числа классов и числа школьников в одном классе.

1 17 **2** 18 **3** 19 **4** 21 **5** 23

69. У драконов острова Борнео на каждой голове не менее двух глаз (все головы у одного дракона одинаковые), каждый дракон смотрит на мир тридцатью глазами. Каково максимальное число видов драконов, которые там могут водиться, если в драконоведении виды драконов различают по количеству голов?

1 10 **2** 15 **3** 30 **4** 7 **5** 8

70. Периодическая десятичная дробь $0,1(23)$ равна

1 $\frac{61}{450}$ **2** $\frac{61}{495}$ **3** $\frac{41}{330}$ **4** $\frac{2}{15}$ **5** $\frac{1}{8}$

71. Найдите 152-ю цифру после запятой в представлении числа $\frac{431}{1111}$ в виде периодической десятичной дроби:

1 3 **2** 9 **3** 7 **4** 5 **5** 1

8.1.13.2. Натуральные, рациональные, действительные числа, 2

72. Докажите, что $\forall n \in N$ число $n^4 + 5n^2$ делится нацело на 3.

73. Используя метод математической индукции, докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

74. Используя метод математической индукции, докажите, что $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

75. Найдите наибольшее натуральное число, для которого неполное частное от деления на 98324758735086084798674894876678953 равно 7892365278348783465789486648356864469729 и укажите в ответе остаток от деления указанного натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

76. Найдите все трехзначные числа вида $\overline{3x4}$, делящиеся на 9.

77. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{1x34y}$, делящиеся на 72.

78. Число $\overline{3a4a5a}$ делится на 45, если a заменить на
$\boxed{\mathbf{1}}$ 9 $\boxed{\mathbf{2}}$ 0 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 5 $\boxed{\mathbf{5}}$ 6

79. Остаток от деления 123456789 на 2 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

80. Остаток от деления 123456789 на 5 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

81. Остаток от деления 7777777 на 9 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 5 $\boxed{\mathbf{4}}$ 7 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3

82. Остаток от деления 123456789 на 72 равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ 49 $\boxed{\mathbf{2}}$ 27 $\boxed{\mathbf{3}}$ 31 $\boxed{\mathbf{4}}$ 45 $\boxed{\mathbf{5}}$ 17

83. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 36.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

84. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 48.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

85. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 36 и на 48.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

86. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 36 и не делятся на 48.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

87. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 48 и не делятся на 36.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

88. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 36 или на 48.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

89. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного количеству трехзначных натуральных чисел, которые не делятся нацело на 36 и не делятся на 48.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

90. Вычислите среднее арифметическое всех целых чисел n, при которых дробь $\frac{2n^2+7n+1}{n+2}$ является целым числом:

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ -2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $1,5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-1,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

91. Найдите все пары целых чисел $(x;\, y)$, для которых $7x + 11y = 13$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x = 10 - 22m$, $y = 14m - 4$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = 11m - 5$, $y = 7m - 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 5 - 11m y = 7m - 2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x = 1 - 7m$, $y = 11m - 6$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $x = 7m - 1$, $y = 11m - 6$, $m \in \mathbf{Z}$.

92. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x;\, y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $xy = 18$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

93. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x;\, y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = 48$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

94. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x;\, y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $xy+y = 4$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

95. Наибольшая площадь многоугольника на плоскости, координаты всех вершин которого $(x;\, y)$ являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $6x^2-5xy+y^2=28$, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

96. Найдите все пары целых чисел $(x;\ y)$, для которых
$3xy-14x-17y+71=0$.

97. По дороге едут автомобили (не менее двух), в каждом из которых не менее двух пассажиров, на всех автомобилях поровну, сумма числа автомобилей и общего числа пассажиров равна 95. Найдите сумму числа автомобилей и числа пассажиров, едущих в одном автомобиле.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 17 $\boxed{\mathbf{2}}$ 18 $\boxed{\mathbf{3}}$ 19 $\boxed{\mathbf{4}}$ 21 $\boxed{\mathbf{5}}$ 23

98. В стаде 6 драконов, у каждого дракона разное число голов, все головы у одного дракона одинаковые, каждый дракон имеет ровно 20 ушей (уши размещаются только на головах). Самый умный дракон съел несколько своих сородичей, причем каждая его голова съела ровно одну чужую голову. Сколько ушей (на живых головах) осталось после этого в стаде, если ум дракона пропорционален количеству его голов?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 40 $\boxed{\mathbf{2}}$ 30 $\boxed{\mathbf{3}}$ 25 $\boxed{\mathbf{4}}$ 29 $\boxed{\mathbf{5}}$ 24

99. Если число $0,(72)-0,0(63)$ представить в виде десятичной дроби, то сумма первых пяти цифр после запятой будет равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 24 $\boxed{\mathbf{2}}$ 18 $\boxed{\mathbf{3}}$ 17 $\boxed{\mathbf{4}}$ 33 $\boxed{\mathbf{5}}$ 25

100. Двенадцатая цифра после запятой в представлении числа $\frac{217}{3330}$ в виде бесконечной десятичной дроби равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 0 $\boxed{\mathbf{4}}$ 9 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответы

8.1.13.3. Натуральные, рациональные, действительные числа, 1 **39.** **40.** **41.** **42.** **43.** ♦ $\overline{324}$; $\overline{354}$; $\overline{384}$.

44. ♦ $\overline{374}$. **45.** ♦ $\overline{324}$, $\overline{384}$. **46.** ♦ $\overline{18348}$. **47.** $\boxed{5}$ **48.** $\boxed{3}$
49. $\boxed{2}$ **50.** $\boxed{3}$ **51.** $\boxed{4}$ **52.** **53.** **54.** **55.** **56.**
57. **58.** **59.** $\boxed{2}$ **60.** $\boxed{4}$ **61.** $\boxed{0}$ **62.** $\boxed{0}$ **63.** $\boxed{0}$
64. $\boxed{0}$ **65.** ♦ $\{(-6;\,-7)\cup(-4;\,3)\cup(4;\,-5)\}$,
$(3x+13)(3y+16)-13\cdot 16+61\cdot 3=0$.
66. ♦ $(x-3)(x^2-3x+4-y)=-19$. **67.** $\boxed{3}$ **68.** $\boxed{4}$ **69.** $\boxed{4}$
70. $\boxed{2}$ **71.** $\boxed{2}$

8.1.13.4. Натуральные, рациональные, действительные числа, 2

72. **73.** **74.** **75.** **76.** ♦ $\overline{324}$. **77.** ♦ $\overline{16344}$. **78.** $\boxed{4}$
79. $\boxed{1}$ **80.** $\boxed{4}$ **81.** $\boxed{4}$ **82.** $\boxed{4}$ **83.** **84.** **85.** **86.** **87.**
88. **89.** **90.** $\boxed{2}$ **91.** $\boxed{3}$ **92.** $\boxed{0}$ **93.** $\boxed{0}$ **94.** $\boxed{0}$ **95.** $\boxed{0}$
96. ♦ $(x=6;\,y=13)$ и т.д., $(3x-17)(3y-14)-14\cdot 17+71\cdot 3=0$.
97. $\boxed{5}$ **98.** $\boxed{1}$ **99.** $\boxed{1}$ **100.** $\boxed{5}$

8.1.14. Контрольная работа по теме «Натуральные, рациональные, действительные числа»

8.1.14.1. Вариант 1

101. Найдите последнюю цифру числа 432^{283}.
$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ 4 $\boxed{3}$ 6 $\boxed{4}$ 8 $\boxed{5}$ 0

102. Найдите остаток от деления числа $37^{51}\cdot 49^{15}$ на 3.
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

103. Сколько двузначных натуральных чисел делятся нацело на 12?
$\boxed{1}$ 6 $\boxed{2}$ 7 $\boxed{3}$ 8 $\boxed{4}$ 9 $\boxed{5}$ 10

104. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного сумме всех двузначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 12.
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

105. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного сумме всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 12 дают в остатке 7.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

106. Найдите наименьшее натуральное число x такое, что найдется целое число y такое, что $2x + 3y = 13$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

107. Найдите наименьшее натуральное число x такое, что найдется целое число y такое, что $171x + 4824y = 8725$. Укажите в ответе остаток от деления x на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** не существует

Ответы.
101. 4 **102.** 1 **103.** 3 **104.** 2 **105.** 5 **106.** 2 **107.** 5

8.1.14.2. Вариант 2

108. Найдите последнюю цифру числа 137^{50}.

1 1 **2** 3 **3** 5 **4** 7 **5** 9

109. Найдите остаток от деления числа $2^{127} + 18^{21}$ на 17.

1 11 **2** 7 **3** 9 **4** 11 **5** 10

110. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся нацело на 21?

1 41 **2** 42 **3** 43 **4** 44 **5** 45

111. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного сумме всех трехзначных натуральных чисел, которые делятся нацело на 21.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

112. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного сумме всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 21 дают в остатке 13.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

113. Найдите наименьшее натуральное число x такое, что найдется целое число y такое, что $5x - 7y = 17$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

114. Найдите наименьшее натуральное число x такое, что найдется целое число y такое, что $465x + 795y = 87623982465234$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ не существует

Ответы.

108. $\boxed{\mathbf{5}}$ **109.** $\boxed{\mathbf{5}}$ **110.** $\boxed{\mathbf{3}}$ **111.** $\boxed{\mathbf{3}}$ **112.** $\boxed{\mathbf{2}}$ **113.** $\boxed{\mathbf{2}}$ **114.** $\boxed{\mathbf{1}}$

Тема 9. Текстовые задачи

9.1. Задачи на проценты

9.1.1. Применение процентного отношения

115. Билл богаче Джека на 25%. На сколько процентов Джек беднее Билла?
♦ на 20%.

Решение. Пусть состояние Джека равно $\mathcal{D}$, состояние Билла равно $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B} = (1 + \frac{25}{100})\mathcal{D} = 1{,}25\mathcal{D} = \frac{5}{4}\mathcal{D}$. Следовательно, $\mathcal{D} = \frac{4}{5}\mathcal{B} = (1 - \frac{20}{100})\mathcal{B}$, поэтому число $\mathcal{D}$ на 20% меньше числа $\mathcal{B}$. ■

116. Число A равно 663% от 665, число B равно 664% от 664. Найдите $A - B$.
♦ $A - B = -0{,}01$.

Решение. В соответствии с условием, $A = \frac{663}{100} \cdot 665$, $B = \frac{664}{100} \cdot 664$. Поэтому $A - B = \frac{663 \cdot 665 - 664^2}{100} = \frac{(664-1)(664+1) - 664^2}{100} = \frac{664^2 - 1^2 - 664^2}{100} = \frac{-1}{100}$. ■

117. В этом году число студентов на одном из факультетов будет больше на 30 человек, что равносильно увеличению на 12%. Сколько студентов учились на этом факультете в прошлом году?
♦ 250.

Решение. Пусть раньше число студентов на факультете было равно x. В этом году оно равно, с одной стороны, $x + 30$, а с другой стороны равно $\frac{100+12}{100}x$. Таким образом, $x + 30 = \frac{100+12}{100}x$, $x + 30 = x + 0{,}12x$, $30 = 0{,}12x$, $x = \frac{30 \cdot 100}{12} = 250$. ■

118. Расход фирмы на заработную плату для менеджеров возрос на 90%, количество менеджеров возросло на 52%. На сколько процентов возрос заработок каждого менеджера?
♦ 25%.

Решение. Пусть первоначально было x менеджеров, каждый из которых зарабатывал P у.е. Потом стало y менеджеров, каждый из которых зарабатывал Q у.е., причем в соответствии с условиями задачи $\begin{cases} yQ = 1{,}9\,xP, \\ y = 1{,}52\,x \end{cases} \Rightarrow 1{,}52\,xQ = 1{,}9\,xP \Rightarrow \dfrac{Q}{P} = \dfrac{1{,}9}{1{,}52} = \dfrac{190}{152}$ $= \dfrac{19 \cdot 5}{19 \cdot 4} = 1{,}25 = 1 \cdot \dfrac{100+25}{100}$, поэтому Q больше P на 25%. ■

119. Конфеты подешевели на 40%. Сколько кг конфет можно купить теперь на те же деньги, на которые прежде продавали 96 кг?

⧫ 160 кг.

Решение. Пусть раньше цена килограмма конфет была равна x руб. Раньше за 96 руб. можно было купить $96x$ кг. конфет. Теперь цена килограмма конфет равна $0{,}6x$ руб., поэтому теперь на $96x$ руб. можно купить $\frac{96x}{0{,}6x} = 160$ кг. конфет. ■

120. Выплатив работнику заработную плату, фирма обязана дополнительно перечислить в социальные фонды сумму, равную 40% выплаченной зарплаты. Вместе эти расходы составили 378 руб. Найдите сумму, перечисленную в социальные фонды (в руб.)

⧫ 108.

Решение. Пусть величина заработной платы равна x руб. Тогда в фонды требуется внести $0{,}4x$ руб., вместе расходы составляют $1{,}4x = 378$ руб., $x = \frac{378}{1{,}4} = 270$ руб., $0{,}4x = 108$ руб. ■

121. Раньше накладные расходы составляли 40% общих расходов. Накладные расходы (в рублях) возросли на 130%, а прочие расходы (в рублях) возросли на 80%. Сколько процентов теперь накладные расходы составляют от общих расходов?

⧫ 46%

Решение. Пусть раньше общие расходы составляли x руб. Тогда накладные расходы составляли раньше $\frac{40}{100}x = 0{,}4x$ руб., прочие расходы — $\frac{100-40}{100}x = 0{,}6x$ руб. Теперь накладные расходы составляют $\frac{100+130}{100}0{,}4x = \frac{23}{10} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{23}{25}x$ руб., прочие расходы — $\frac{100+80}{100}0{,}6x = \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{27}{25}x$ руб., общие расходы — $(\frac{23}{25} + \frac{27}{25})x = 2x$ руб. Теперь накладные расходы составляют от общих расходов (в процентах) $\frac{\frac{23}{25}x}{2x} \cdot 100\% = 46\%$. ■

122. Если накладные расходы уменьшить в два раза, а прочие расходы увеличить в семь раз, то общие расходы увеличатся в пять раз. Первоначально прочие расходы были больше накладных на $n\%$, где

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n \in (0;\ 100)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $n \in [100;\ 120)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $n \in [120;\ 150)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $n \in [150;\ 200)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $n \in [200;\ 9999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 125%.

Решение. Пусть раньше накладные расходы составляли x руб., прочие расходы — y руб., общие расходы равны $x + y$ руб. Теперь накладные расходы составляют $0{,}5x$ руб., прочие расходы составляют $7y$ руб., общие расходы равны $0{,}5x+7y$ руб. По условию задачи, $0{,}5x + 7y = 5(x + y)$, $2y = 4{,}5x$, $y = 2{,}25x$. Теперь прочие расходы больше накладных на $\frac{2{,}25x-x}{x} \cdot 100\% = 125\%$. ■

123. Известно, что верблюд может перевозить груз, вес которого составляет 95% общего веса верблюда и груза. Если верблюд везет вес, который в 6 раз меньше максимального, то вес этого груза будет составлять от общего веса животного с грузом

$\boxed{\mathbf{1}}$ $15\dfrac{5}{6}\%$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 79% $\boxed{\mathbf{3}}$ $15\dfrac{1}{6}\%$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 76% $\boxed{\mathbf{5}}$ $16\dfrac{5}{6}\%$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 76%. Новые расходы можно вычислить по формуле
$$\frac{(95/6)\cdot 100}{(95/6) + (100-95)}\% = 76\%.$$

Решение. Пусть на книги Петя тратит $95x$ у.е., а прочие расходы составляют $5x$ у.е.В этом случае полные расходы Пети равны $100x$ у.е., так что расходы на книги составляют ровно 95% всех расходов, что вполне соответствует условиям задачи. После изменения ситуации на книги Петя тратит $\frac{95x}{6}$ у.е., прочие расходы составляют по прежнему $5x$ у.е., полные расходы Пети равны $\frac{95x}{6} + 5x$ у.е.Таким образом, теперь расходы на книги в процентах составляют $\frac{\frac{95x}{6}}{\frac{95x}{6}+5x} \cdot 100\% = \frac{95}{95+5\cdot 6} \cdot 100\% = \frac{95}{125} \cdot 100\% = \frac{19}{25} \cdot 100\% = \frac{76}{100} \cdot 100\% = 76\%$. ■

124. Сосна на 25% выше елки. Если каждое дерево подрастет на 18 м, то сосна будет на 10% выше елки. Первоначальная высота елки (в метрах) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}\blacklozenge$ $x = 12$.

Решение. Пусть x — первоначальная высота елки. Из условия задачи следует, что $\frac{1{,}25x+18}{x+18} = 1,1$. При приведении подобных членов не следует умножать $1,1 \cdot 18$, вличина x определяется из уравнения $0,15x = 0,1 \cdot 18$. ■

9.1.2. Многократное применение процентного отношения

125. Цену товара повысили на 50%, затем понизили на 60%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

$\boxed{\mathbf{1}}$ конечная цена меньше начальной на 10%

$\boxed{\mathbf{2}}$ конечная цена меньше начальной на 20%

$\boxed{\mathbf{3}}$ конечная цена меньше начальной на 30%

$\boxed{\mathbf{4}}$ конечная цена меньше начальной на 40%

$\boxed{\mathbf{5}}$ конечная цена меньше начальной на 50%

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}\blacklozenge$ меньше на 40%.

Решение. Обозначим первоначальную цену x. После повышения цена стала равна $x(1+\frac{50}{100}) = \frac{3}{2}x$. После последовавшего затем понижения цена стала равна $\frac{3}{2}x(1-\frac{60}{100}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}x = \frac{6}{10}x = (1-\frac{40}{100})x$. Таким образом, цена уменьшилась всего на 40%. ■

126. Цену товара повысили на 60%, затем понизили на 50%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

$\boxed{\mathbf{1}}$ конечная цена меньше начальной на 10%

$\boxed{\mathbf{2}}$ конечная цена больше начальной на 10%

$\boxed{\mathbf{3}}$ конечная цена меньше начальной на 20%

$\boxed{\mathbf{4}}$ конечная цена меньше начальной на 30%

$\boxed{\mathbf{5}}$ конечная цена равна начальной

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}\blacklozenge$ меньше на 20%.

Решение. $1{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}8$. ■

127. Цена товара повышалась два раза на одно и то же число процентов. По сравнению с первоначальной цена повысилась на 156%. На сколько процентов повышалась цена каждый раз?

1 60% **2** 256% **3** 50% **4** 78% **5** $\sqrt{156}$%

Ответ **1**♦ 60%.

Решение. Пусть начальная цена равна A, и каждый раз цена повышается на n%. После первого повышения цена будет равна $A(1+\frac{n}{100})$, после второго повышения — $A(1+\frac{n}{100})^2$. По условию, $A(1+\frac{n}{100})^2 = A(1+\frac{156}{100})$, $(1+\frac{n}{100})^2 = (\frac{16}{10})^2$, $1+\frac{n}{100} = \frac{160}{100}$, поэтому $n = 60$. ■

128. Телевизор, стоивший 10 тыс. руб., стал дороже на 34%. Через месяц он стал дешевле на 27%. Теперь его цена, выраженная в рублях, является целым числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **2**♦ ...2.

Решение. $10000 \cdot 1{,}34 \cdot 0{,}73 = 134 \cdot 73 = \ldots 2$. ■

129. Квартира, стоившая 1 млн руб., стала дороже на 7,3%. Через год она стала дороже еще на 4,6%. Теперь ее цена, выраженная в рублях, является натуральным числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3**♦ Остаток 3, новая цена 1122358.

Решение. После первого повышения цена квартиры будет равна $10^6(1+\frac{7{,}3}{100})$, после второго повышения —
$10^6(1+\frac{7{,}3}{100})(1+\frac{4{,}6}{100}) = 10^3(1+\frac{73}{1000})\cdot 10^3(1+\frac{46}{1000})$. Последняя цифра результата совпадает с последней цифрой числа $3 \cdot 6 = \ldots 8$. ■

130. Цена товара изменялась три раза, первый раз понизилась на 28%, второй раз повысилась на 25%, а в результате трехкратного изменения повысилась всего на 44%. На сколько процентов повысилась цена в третий раз?

1 62,5% **2** 75% **3** 60% **4** 64% **5** 48%

Ответ **3**♦ +60%.

131. Год назад Билл был на 15% тяжелее Джека, с тех пор Билл стал тяжелее на 26%, а Джек стал тяжелее на 38%, и теперь Билл тяжелее Джека на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3% $\boxed{\mathbf{2}}$ 5% $\boxed{\mathbf{3}}$ 7% $\boxed{\mathbf{4}}$ 4% $\boxed{\mathbf{5}}$ 8%

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 5%

Решение. Пусть год назад вес Джека был равен $\mathcal{D}$. Вес Билла тогда был равен $\mathcal{B} = 1{,}15\mathcal{D}$. Теперь вес Билла равен $1{,}26 \cdot 1{,}15\mathcal{D}$, вес Джека равен $1{,}38\mathcal{D}$. Билл тяжелее Джека на $\left(\frac{1{,}26 \cdot 1{,}15\mathcal{D}}{1{,}38\mathcal{D}} \cdot 100 - 100\right)\% = \left(\frac{126 \cdot 115}{138} - 100\right)\% = \left(\frac{63 \cdot 115}{69} - 100\right)\% = \left(\frac{21 \cdot 115}{23} - 100\right)\% = (21 \cdot 5 - 100)\% = 5\%$. ■

9.1.3. Задачи на части

132. На остановке с автобуса сошли $\frac{2}{7}$ всех мужчин и $\frac{1}{3}$ всех женщин, после чего доля мужчин в салоне среди пассажиров составила $\frac{25}{47}$ (новые пассажиры не появились). Найдите наименьшее возможное число пасажоров автобуса до остановки и укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ до: $35 + 33 = 68$, после $25 + 22$.

Решение. Пусть перед остановкой в автобусе было x мужчин и y женщин. после остановки в автобусе осталось $\frac{5}{7}x$ мужчин и $\frac{2}{3}y$ женщин. Доля мужчин составляет $\frac{\frac{5}{7}x}{\frac{5}{7}x + \frac{2}{3}y} = \frac{25}{47}$, $\frac{15x}{15x + 14y} = \frac{25}{47}$, $15 \cdot 47x = 25 \cdot 15x + 25 \cdot 14y$, $15 \cdot 22x = 25 \cdot 14y$, $3 \cdot 11x = 5 \cdot 7y$, $(\star)$ $33x = 35y$. Наименьшая пара натуральных чисел, удовлетворяющая условию $(\star)$, равна $(x; y) = (35; 33)$. Так как x делится на 7, Так как y делится на 3, то эти числа дают ответ задачи. ■

9.2. Совместная работа двух участников

Формулировки большой группы задач включают некоторые условия, которые определяют результаты совместной работы двух участников, причем природа того действия, которое производят участники, несущественна. Это мугут быль работники, производящие детали, насосы, накачивающие воду, и т.д. Все эти задачи мы рассматриваем как задачи на совместную работу двух или нескольких участников.

133. Первый насос наполняет бассейн за 3 ч, второй насос — за 7 ч. Сколько времени (в часах) потребуется на наполнение бассейна, если одновременно первый насос будет наливать, а второй насос — откачивать воду из бассейна?

♦ 5,25 часа.

Решение. Производительность первого насоса x равна $\frac{1}{3}$ бассейнов в час (в дальнейшем единицы измерения не указываем), производительность второго насоса y равна $\frac{1}{7}$. Если включить насосы так, как указано в условии задачи, общая производительность будет равна $x-y=\frac{4}{21}$. На наполнение бассейна потребуется $\frac{1}{x-y}=\frac{21}{4}$ часа. ■

134. Если включить первый насос на 5 ч, а второй на 7 ч, то они заполнят водой 73% бака. Если включить первый насос на 7 ч, а второй на 5 ч, они заполнят 81% бака. Какая часть бака будет заполнена, если на протяжении 18 ч первый насос будет наливать воду в бак, а второй насос — откачивать воду из бака?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 92% $\boxed{\mathbf{2}}$ 96% $\boxed{\mathbf{3}}$ 48% $\boxed{\mathbf{4}}$ 72% $\boxed{\mathbf{5}}$ 64%

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 72%; $x=0.0841(6)$; $y=0.0441(6)$.

Решение. Пусть производительности насосов равны x и y. Из условий задачи следует, что $\begin{cases}5x+7y=0{,}73,\\7x+5y=0{,}81.\end{cases}$ Вычтем уравнения, $2x-2y=0{,}08$. Умножим это уравнение на 9, $18(x-y)=0{,}72$. ■

135. Если Билл проработает 3 дня, а Джек — 4 дня, то будет выполнено 25% работы. Если Билл проработает 4 дня, а Джек — 3 дня, то будет выполнено 24% работы. Какая доля работы будет выполнена, если Билл и Джек проработают совместно 6 дней?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 38% $\boxed{\mathbf{2}}$ 36% $\boxed{\mathbf{3}}$ 39% $\boxed{\mathbf{4}}$ 42% $\boxed{\mathbf{5}}$ 45%

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 42%.

Решение. Пусть производительности труда равны x и y. Из условий задачи следует, что $\begin{cases}3x+4y=0{,}25,\\4x+3y=0{,}24.\end{cases}$ Сложим уравнения, $7(x+y)=0{,}49$, $x+y=0{,}07$, $6(x+y)=0{,}42$. ■

9.3. Смеси, сплавы

136. При смешивании сплава A, содержащего 43% меди, со сплавом B, содержащим 57% меди, получен сплав C, содержащий 47% меди. В каком отношении были взяты массы сплавов A и B?

$\boxed{1}$ $A : B = 3 : 2$ $\boxed{2}$ $A : B = 5 : 2$ $\boxed{3}$ $A : B = 2 : 3$ $\boxed{4}$ $A : B = 2 : 5$ $\boxed{5}$ $A : B = 3 : 4$

Ответ $\boxed{2}$♦ $A : B = 5 : 2$.

Решение. Пусть x — количество сплава A, y — количество сплава B, тогда $x + y$ — количество сплава C. Теперь посчитаем полное количество меди в сплавах, кототорое при смешивании не может измениться, $0{,}43x$ — количество меди в сплаве A, $0{,}57x$ — количество меди в сплаве B, $0{,}47(x + y)$ — количество меди в сплаве C, поэтому $0{,}44x + 0{,}57y = 0{,}47(x + y)$, и $5y = 2x$. ■

9.3.1. Элементы теории множеств

137. В результате опроса 40 жителей Москвы выяснилось, что 28 опрошенных посещают кинотеатры, 24 посещают стадионы, 17 посещают и кинотеатры, и стадионы. Сколько человек из числа опрошенных не посещают ни кинотеатры, ни стадионы? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{5}$♦ 0; $N = 5$.

Решение. Составим таблицу, в которой S — посещают стадионы, $\not S$ — не посещают стадионы, K — посещают кинотеатры, $\not K$ — не посещают кинотеатры. Вычисления проводим, перемещаясь по таблице в следующем порядке. Дано: H1V1, H1V2, H2V1, H2V2. Вычисляем: H1V1−H1V2 ⇒ H1V3, H2V1−H2V2 ⇒ H2V3, H1V1 − H2V1 ⇒ H3V1, H1V2 − H2V2 ⇒ H3V2, H1V3 − H2V3 ⇒ H3V3, H3V1 − H3V2 ⇒ H3V3, причем две последние величины должны совпасть при правильных вычислениях.

		V1	V2	V3
		всего	S	$\not S$
H1	всего	40	24	$40-24=16$
H2	K	28	17	$28-17=11$
H3	$\not K$	$40-28=12$	$24-17=7$	$16-11=5$, $12-7=5$.

■

138. Опрос прохожих на улицах Петербурга показал, что 61% из них учатся, 63% работают, 13% не учатся и не работают. Сколько прохожих одновременно учатся и работают?

$\boxed{1}$ 27% $\boxed{2}$ 48% $\boxed{3}$ 34% $\boxed{4}$ 37% $\boxed{5}$ 43%

Ответ $\boxed{4}$♦ 37%

Решение. Составим таблицу, в которой Y — учатся, $/Y$ — не учатся, P — работают, $/P$ — не работают. Общее число опрошенных примем равным 100.

		V1	V2	V3
		всего	Y	$\not Y$
H1	всего	100	61	$100-61=39$
H2	P	63	$63-26=37$, $61-24=37$	$39-13=26$
H3	$\not P$	$100-63=37$	$37-13=24$	13

■

139. Среди всех школьников $\frac{3}{4}$ их общего числа изучают английский язык, $\frac{3}{5}$ изучают французский язык, $\frac{9}{20}$ изучают оба упомянутых языка. Какова доля школьников, не изучающих ни один из упомянутых языков?

$\boxed{1}$ $\frac{1}{20}$ $\boxed{2}$ $\frac{1}{10}$ $\boxed{3}$ $\frac{3}{20}$ $\boxed{4}$ $\frac{1}{5}$ $\boxed{5}$ $\frac{1}{4}$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\frac{1}{10}$.

Решение 1. Можно решить эту задачу так же, как предыдущие. Общее число участников следует принять кратным числу 20. ■

Решение 2. Используем таблицу

		V1	V2	V3
		всего	X	$\cancel{X}$
H1	всего	N	X	$N-X$
H2	Y	Y	Z	$Y-Z$
H3	$\cancel{Y}$	$N-Y$	$X-Z$	$N-X-Y+Z$

Таким образом, число обьектов, не обладающих свойством X и в то же время не обладающих свойством Y, равно $N-X-Y+Z$, где N — общее число обьектов, X — число обьектов, обладающих свойством X, Y — число обьектов, обладающих свойством Y, Z — число обьектов, обладающих свойством X и одновременно свойством Y. Подставим числовые данные и получим $1-\frac{3}{4}-\frac{3}{5}+\frac{9}{20}=\frac{1}{10}$. ■

140. Опрос показал, что 60% жителей Н-ска читают газеты, 70% смотрят телевизор. Найдите минимально возможную при этих условиях долю жителей Н-ска, которые смотрят телевизор, но не читают газеты.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 10% $\boxed{\mathbf{2}}$ 20% $\boxed{\mathbf{3}}$ 30% $\boxed{\mathbf{4}}$ 40% $\boxed{\mathbf{5}}$ 50%

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 10%.

Решение. Используем таблицу и формулы предыдущей задачи. Пусть доля читающих равна $X=0{,}6$, доля смотрящих равна $Y=0{,}7$, тогда доля читающих и смотрящих лежит в пределах $(\star)$ $Z\in[0;\ \min(x;Y)]=[0;0{,}6]$. Доля нечитающих и одновременно несмотрящих равна $1-X-Y+Z=Z-0{,}3\in[0;1]$, поэтому $Z\in[0{,}3;1]$. Учитывая $(\star)$, получим $Z\in[0{,}3;0{,}6]$, и тогда доля читающих-несмотрящих $X-Z\in[0;0{,}3]$, а доля смотрящих-нечитающих $Y-Z\in[0{,}1;0{,}4]$. ■

141. Опрос показал, что 55% жителей Н-ска читают газеты, 80% смотрят телевизор. Найдите минимально возможную при этих условиях долю жителей Н-ска, которые смотрят телевизор, но не читают газеты.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 45% $\boxed{\mathbf{2}}$ 10% $\boxed{\mathbf{3}}$ 35% $\boxed{\mathbf{4}}$ 25% $\boxed{\mathbf{5}}$ 20%

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 25%.

142. Опрос показал, что 51% жителей Н-ска читают газеты, 73% смотрят телевизор. Найдите максимально возможную при этих условиях долю жителей Н-ска, которые не смотрят телевизор и не читают газеты.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 22% $\boxed{\mathbf{2}}$ 100% $\boxed{\mathbf{3}}$ 0% $\boxed{\mathbf{4}}$ 27% $\boxed{\mathbf{5}}$ 33%

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 27%.

9.4. Движение

9.4.1. Движение двух транспортных средств с постоянной скоростью

143. Автобус проехал дорогу длиной 112 км от города А до города Б за 15 ч. Через 3 ч после его отправления по тому же маршруту выехал автомобиль, который проехал тот же путь за 7 ч. На каком расстоянии от А они встретились?

♦ 42 км

Решение 1 (расчетное). Будем измерять время в часах, расстояние в километрах, скорость в км/ч. Условие задачи позволяет определить скорости автобуса $v_1 = \dfrac{112}{15}$ и автомобиля $v_2 = \dfrac{112}{7}$. Пусть момент времени $t = 0$ соответствует отправлению автобуса из А в Б, расстояние будем измерять вдоль дороги из А в Б, причем координата пункта А будет равна $x = 0$. Тогда зависимость координаты автобуса от времени задается формулой $x_1 = v_1 t,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1,\ t_1 = 15$, зависимость координаты автомобиля от времени задается формулой $x_2 = v_2(t - t_0),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_2$, $t_0 = 3,\ t_2 - t_0 = 7$. В момент встречи $x_1 = x_2,\ v_1 t = v_2(t - t_0)$, $(v_2 - v_1)t = v_2 t_0,\ t = \dfrac{v_2 t_0}{v_2 - v_1}$, расстояние точки встречи от А равно $s = v_1 t = \dfrac{v_1 v_2 t_0}{v_2 - v_1},\ s = \dfrac{\frac{112}{15}\cdot\frac{112}{7}\cdot 3}{112(\frac{1}{7} - \frac{1}{15})},\ s = \dfrac{112\cdot 3}{15 - 7},\ s = 14\cdot 3 = 42$ км. Удобно использовать графическое изображение траекторий движения каждого транспортного средства на плоскости t (по горизонтали), x (по вертикали), рис. 3а. Линия AB представляет дорогу из пункта А в пункт Б, линия AP — ось времени, AQ — траектория автобуса, $\operatorname{tg}\angle QAP = v_1$, CE — траектория автомобиля, $\operatorname{tg}\angle ECP = v_2$, D — точка встречи. По условию задачи,

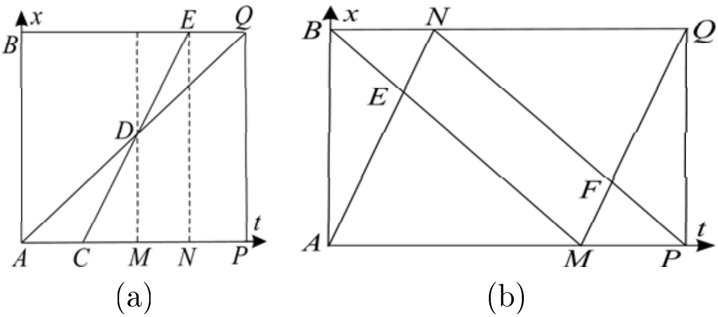


Рис. 3.

$AB = 112$, $AC = t_0 = 3$, $AP = 13$, $CN = 7$, пиичем все вертикальные отрезки измеряются в км, горизонтальные — в ч. ■

Решение 2 (интеллектуальное). Первые t_0 часов автобус удаляется от автомобиля со скоростью v_1, после чего расстояние между ними станет равно $v_1 t_0$. Затем автомобиль приближается к автобусу с относительной скоростью $v_2 - v_1$. Поэтому время от старта автомобиля до момента встречи равно $t_0 + \frac{t_0 \cdot v_1}{v_2 - v_1} = \frac{t_0 \cdot v_2}{v_2 - v_1}$. За это время автобус проедет расстояние, равное $v_1 \frac{t_0 \cdot v_2}{v_2 - v_1}$. ■

144. Пройдя $\frac{1}{3}$ пути из пункта А в пункт Б, Билл и Джек разошлись: Билл направился в сторону А, а Джек — в сторону Б, скорости Билла и Джека равны 7 км/ч. Дойдя до А, Билл немедленно сел в автобус, направляющийся из А в Б, и прибыл в Б одновременно с Джеком. Найдите величину скорости автобуса.
♦ $v = 21$ км/ч.

Решение. Пусть расстояние АБ равно L, доля пути до разъединения траекторий равна αL, $\alpha = \frac{1}{3}$, скорость пешехода равна $w = 7$, скорость автобуса равна v. Условие одновременного прибытия в пункт Б можно записать в виде $\frac{\alpha \cdot L}{w} + \frac{L}{v} = \frac{(1-\alpha) \cdot L}{w}$, откуда найдем $v = \frac{w}{1-2\alpha}$. ■

145. В полдень расстояние между Биллом, идущим по прямолинейной дороге с постоянной скоростью 6 км/ч, и Джеком, который едет по той же дороге в ту же сторону на велосипеде, было равно 13 км, а через час — 8 км, причем за это время Джек обогнал Билла. Найдите скорость Джека (в км/ч).

♦ 27 км/ч.

Решение 1. Рассмотрим движение Билла и Джека в системе координат, которая движется прямолинейно и равномерно вместе с Биллом со скоростью $w = 6$. В этой системе координат Билл неподвижен. Без ограничения общности можно считать, что координата Билла равна 0. Предположим также, что первоначально и Билл и Джек ввигались слев направо, в направлении возрастания координаты. Тогда в полдень (момент времени $t = 0$) координата Джека равна -13, а через час равна $+8$. Поэтому скорость Джека в движущейся системе координат равна $v = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{8 - (-13)}{1} = 21$ км/ч. Скорость в исходной неподвижной системе равна $V = v + w = 21 + 6 = 27$ км/ч. ■

Решение 2. Координата Билла зависит от времени по закону $x(t) = x_0 + wt$, $w = 6$. Координата Джека зависит от времени по закону $y(t) = y_0 + vt$. Из условий задачи следует, что $\begin{cases} y(t_0) - x(t_0) = -13, \\ y(t_0+1) - x(t_0+1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + vt_0 - x_0 - wt_0 = -13, \\ y_0 + vt_0 + v - x_0 - wt_0 - w = 8 \end{cases}$ $\Rightarrow v - w = 8 - (-13) \Leftrightarrow v = 6 + 8 + 13 = 27$ км/ч. ■

146. Билл совершил путешествие из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч, Джек все это время курсировал по маршруту ABA на мотоцикле с постоянной скоростью 70 км/ч (стартовали они одновременно в пункте A, расстояние АВ = 195 км). Найдите наименьшее расстояние между точками встречи (при движении Джека в любом направлении).

♦ Расстояние равно 2.

Решение. Будем измерять время в часах, расстояние в километрах, скорость в км/ч. На путешествие по маршруту AB Билл затратит время $T = \frac{195}{5} = 39$. На путешествие по маршруту ABA Джек затратит время $t = \frac{195 \cdot 2}{70} = \frac{39}{7}$. Поэтому за время T Джек совершит ровно $\frac{T}{t} = 7$ переездов туда-обратно и к моменту финиша Билла вернется в пункт A, рис. 4. Траектория пешехода совпадает с отрезком AQ, траектория мотоциклиста — $AC...DP$. Легко заметить, что наименьшее расстояние — отрезок пути между точками KS или отрезок пути MN (следует учитывать, что на чертеже показано движение по отрезку прямой

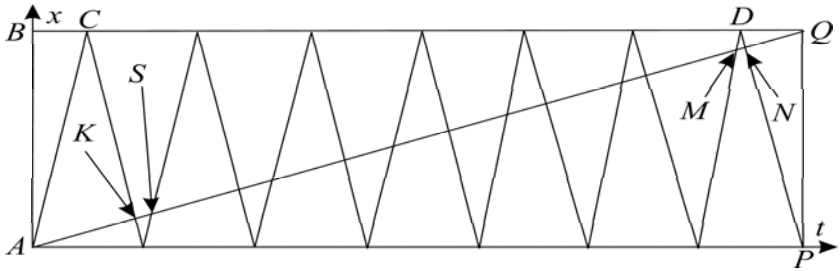


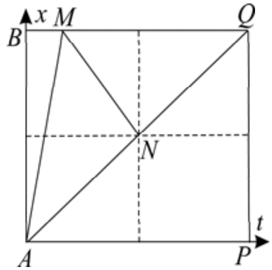
Рис. 4. Одновременное движение пешехода и мотоциклиста по дороге.

AB, так что расстояние между точками равно разности их координат по оси x). Несложный рассчет показывает, что наименьшим будет расстояние между предпоследней и последней точками встречи. Предпоследняя точка встречи $x_{k-1} = \frac{(n-2)L}{n-1}$, последняя точка $x_k = \frac{nL}{n+1}$, поэтому $x_k - x_{k-1} = \frac{2L}{n^2-1} = \frac{2\cdot 195}{14^2-1} = 2$. Покажем, как эффективно провести такой расчет. Пусть скорость пешехода равна w, скорость мотоциклиста $v > w$. Вычислим момент времени, в который мотоциклист в n-й раз вернется в пункт A, $t_n = \frac{2nS}{v}$. После этого зависимость его координаты от времени будет $x_\uparrow(t) = v(t - t_n)$. Для пешехода зависимость координаты от времени всегда $(\star)$ $\xi_\uparrow(t) = wt$. Они встретятся в точке S при условии $v(t-t_n) = wt$, $(v-w)t = vt_n$, $t_\uparrow = \frac{vt_n}{v-w}$. Координата точки встречи $x_\downarrow(t) = -v(t - t_n)$. Найдем предыдущую точку встречи, которая на рис. 4 обозначена буквой K. Зависимость координаты мотоциклиста от времени $-v(t - t_n) = wt$, для пешехода она та же, $(\star)$, так что встреча состоится в момент времени t, для которого $(v + w)t = vt_n$, $t_\downarrow = \frac{vt_n}{v+w}$, $t_\uparrow - t_\downarrow = \frac{2vwt_n}{v^2-w^2}$. Обозначим $\frac{v}{w} = q$, и тогда $X_\uparrow - X_\downarrow = \frac{4w^2S}{v^2-w^2} = \frac{4S}{q^2-1}$. Аналогично, расстояние между соседними точками встречи $\Xi_\uparrow - \Xi_\downarrow = \frac{2Sm}{q^2-1}$. Наименьшее расстояние $\Xi_\uparrow - \Xi_\downarrow = \frac{2S}{q^2-1}$. ■

9.4.2. Движение по течению и против течения

147. Скорость течения реки составляет 4 км/ч. Пароход проходит расстояние 48 км вниз по течению на 1,6 ч быстрее, чем то же расстояние вверх против течения. Найдите скорость парохода в стоячей воде.
♦ 16 км/ч.
Решение. Будем измерять время в часах, расстояние в километрах, скорость в км/ч. Пусть скорость течения равна $w = 4$, скорость парохода в неподвижной воде w (неизвестна) расстояние между точкой старта и финиша вдоль реки равно $L = 48$. Тогда время, которое потребуется пароходу на то, чтобы подняться на расстояние L вдоль реки, равно $t_1 = \frac{L}{v-w}$, время, которое потребуется на то, чтобы спуститься обратно, равно $t_2 = \frac{L}{v+w}$. По условию задачи $t_2 - t_1 = \triangle$, где $\triangle = 1{,}6$ — заданная в условии разность времен. Решим уравнение $\frac{L}{v-w} - \frac{L}{v+w} = \triangle$, $\frac{2Lw}{v^2-w^2} = \triangle$, $2Lw = (v^2-w^2)\,\triangle$, $v = \sqrt{w^2 + 2w\frac{L}{\triangle}}$. Подставим числовые данные задачи, $v = \sqrt{16 + 8\frac{48}{1{,}6}}$, $v = \sqrt{256} = 16$ км/ч. ■

148. Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта A в пункт B, пароход в B повернул обратно и на пути из B в A встретил плот, который к этому моменту проплыл $\frac{1}{2}$ расстояния AB. Найдите отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки.
♦ 3.
Решение. Будем измерять время в часах, расстояние в километрах, скорость в км/ч. Пусть $AC = x$, $CB = y$, рис. 5а. На этом рисунке траектория плота, плывущего по течению со скоростью w, совпадает с отрезком AQ, траектория парохода, плывущего со скоростью v относительно воды, совпадает с ломаной AMN. Плот проплыл расстояние x, затратив на это время $\frac{x}{w}$, пароход проплыл расстояние $x + y$ по течению и затем y против течения, затратив на это время $\frac{x+y}{v+w} + \frac{y}{v-w}$. Эти промежутки времени должны совпадать, так что $\frac{x}{w} = \frac{x+y}{v+w} + \frac{y}{v-w}$. После упрощения получим $xv^2 = (x + 2y)vw$, $\frac{v}{w} = 1 + 2\frac{y}{x}$. В данном случае $x = y$, поэтому $\frac{v}{w} = 3$. ■



(а)

Рис. 5.

149. Из пункта A в пункт B (оба находятся на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 1 км/ч, пароход успел совершить восемь рейсов по маршруту ABA (сначала вниз по течению, затем обратно) и прибыл в пункт A одновременно с прибытием плота в пункт B. Найдите скорость парохода в неподвижной воде и укажите в ответе ближайшее целое число (в км/ч).
♦ 16.

Решение. Пусть пароход сделал n рейсов вниз по течению и n рейсов вверх по течению, рис. 6. Траектория плота AQ, траектория парохода $A...MNK...Q$. Расстояние $AB = S$, скорость течения w, скорость парохода в неподвижной воде v, скорость парохода вниз по течению относительно берега $v + w$, скорость парохода вверх по течению относительно берега $v - w$, время в пути вниз по течению $\frac{nS}{v+w}$, время в пути вверх по течению $\frac{nS}{v-w}$, время плота в пути вниз по течению $\frac{S}{w}$, уравнение баланса времен $\frac{S}{w} = \frac{nS}{v+w} + \frac{nS}{v-w}$. Для $\dfrac{v}{w}$ получим квадратное уравнение $\left(\frac{v}{w}\right)^2 - 2n\frac{v}{w} - 1 = 0$, решая которое получим $\frac{v}{w} = n + \sqrt{n^2+1}$. При $n = 8$ $\frac{v}{w} = 8 + \sqrt{65} \approx 16$. Оценим разность $z = v/w - 16$, $z = \sqrt{65} - 8$, $z = \frac{1}{\sqrt{65}+8}$, $0 < z < \frac{1}{16}$. ■

150. Из пункта A в пункт B (оба находятся на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 1 км/ч, пароход успел

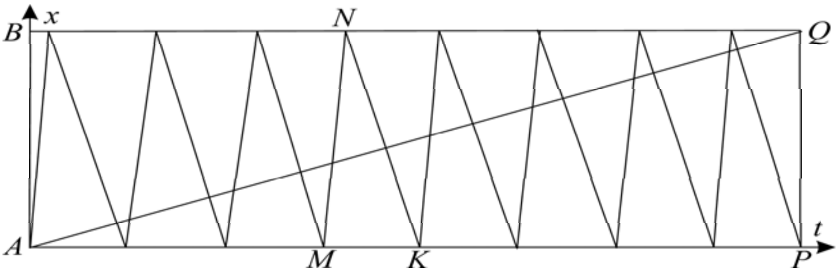


Рис. 6. Одновременное движение парохода и плота по реке.

совершить восемь рейсов по маршруту ABA (сначала вниз по течению, затем обратно), затем один рейс по маршруту AB и прибыл в пункт B одновременно с прибытием плота в пункт B. Найдите скорость парохода в неподвижной воде и укажите в ответе ближайшее (или равное) натуральное число (в км/ч).

⧫ 17.

Решение. Пусть пароход сделал $n+1$ рейсов вниз по течению и n рейсов вверх по течению, рис. 7. Расстояние $AB = S$, скорость течения w, скорость парохода в неподвижной воде v, скорость парохода вниз по течению относительно берега $v+w$, скорость парохода вверх по течению относительно берега $v-w$, время в пути вниз по течению $\frac{(n+1)S}{v+w}$, время в пути вверх по течению $\frac{nS}{v-w}$, время плота в пути вниз по течению $\frac{S}{w}$, уравнение баланса времен $\frac{S}{w} = \frac{(n+1)S}{v+w} + \frac{nS}{v-w}$. Для $\dfrac{v}{w}$ получим квадратное уравнение $\left(\frac{v}{w}\right)^2 - (2n+1)\frac{v}{w} = 0$, решая которое получим $\frac{v}{w} = 2n+1 = 17$. ■

151. Города A и B расположены на берегах реки. Из A в B и одновременно из B в A отправляются пароходы, скорость каждого в стоячей воде равна 12 км/ч. Достигнув второго города, каждый из них немедленно поворачивает обратно и возвращается в пункт отправления через 32 ч после старта. Время между встречами пароходов на реке равно 25 ч. Найдите скорость течения (в км/ч).

⧫ 9.

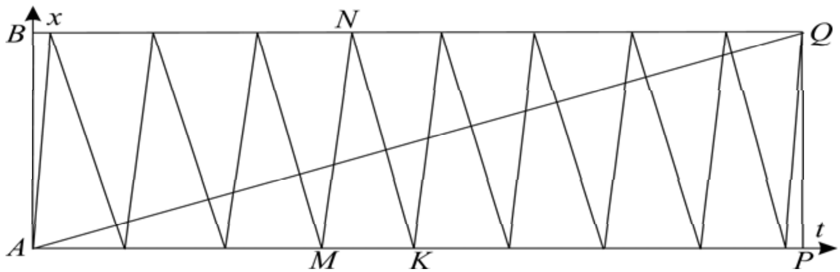


Рис. 7. Одновременное движение парохода и плота по реке.

Решение. Время от старта до первой встречи $t_1 = \frac{L}{2v,}$ такое же время от второй встречи до финиша, рис. 3b. На рисунке траектория одного парохода ANP, другого — BNQ. Время пути ABA $T = \frac{2Lv}{v^2-w^2}$, такое же время пути BAB, время между встречами $\Delta t = L \cdot \frac{v^2+w^2}{v\cdot(v^2-w^2)}$, поэтому $\frac{\Delta t}{T} = \frac{v^2+w^2}{2v^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{w}{v}\right)^2\right)$. ■

152. Билл и Джек, у которых имеется один велосипед на двоих, одновременно отправляются из пункта A в пункт B. Скорость пешехода 5 км/ч, велосипедиста — 15 км/ч. Расстояние между A и B равно 90 км. Вдвоем на велосипеде ехать нельзя. За какое минимальное время (в часах) они оба смогут проделать весь путь?

⧫ 12 часов.

Решение. Если Билл оставит велосипед в кустах, проехав x км, то полное время в пути будет равно $\frac{x}{15}+\frac{90-x}{5}$, если $x \in [0;\ 45]$, и будет равно $\frac{x}{5}+\frac{90-x}{15}$, если $x \in [45;\ 90]$. Наименьшее значение этой функции достигается при $x = 45$ км, рис. 8a. Если велосипед будет оставлен ближе к точке старта, чем середина отрезка от старта до финиша, то время в пути будет больше, рис. 8b. То же самое будет иметь место и при условии, что велосипед будет оставлен ближе к точке финиша. ■

153. Города A и B расположены на берегу реки со скоростью течения 2 км/ч. Пароход проходит маршрут ABA за 51 ч. Если скорость парохода в неподвижной воде увеличить в 7 раз, то

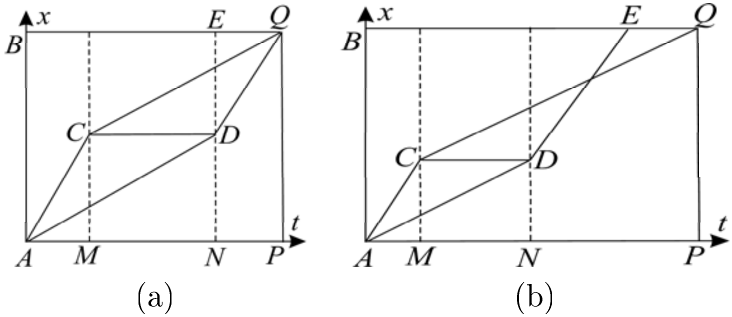


Рис. 8.

маршрут ABA займет 7 ч. Найдите первоначальную скорость парохода в неподвижной воде, выраженная в км/ч.
⧫ 10.
Решение. Будем измерять время в часах, расстояние в километрах, скорость в км/ч. Пусть расстояние между A и B равно S, скорость течения $w = 2$, скорость парохода в неподвижной воде до увеличения равна v, скорость парохода в неподвижной воде после увеличения равна nv. Время в пути по маршруту ABA до увеличения скорости было равно
$T = \frac{S}{v+w} + \frac{S}{v-w} = \frac{2vS}{v^2-w^2}$, время в пути по тому же маршруту после увеличения скорости $t = \frac{S}{nv+w} + \frac{S}{nv-w} = \frac{2nvS}{n^2v^2-w^2}$. Обозначим $\frac{v}{w} = q$. Тогда $(\star)$ $T = \frac{2qS}{w(q^2-1)}$, $(\star\star)$ $t = \frac{2nqS}{w(n^2q^2-1)}$. Поделим почленно $(\star)$ на $(\star\star)$, $K = \frac{T}{t} = \frac{q^2n^2-1}{n(q^2-1)}$, $Kn(q^2-1) = q^2n^2-1$, $Knq^2 - q^2n^2 = Kn-1$,
$q^2(Kn-n^2) = Kn-1$, $q^2 = \frac{Kn-1}{n(K-n)}$. В соответствии с условиями, $K = \frac{51}{7}$, $n = 7$, $q^2 = \frac{7\frac{51}{7}-1}{7(\frac{51}{7}-7)}$, $q^2 = 25$, $q = 5$, $v = qw = 10$. ■

9.5. Задачи экономического содержания

9.5.1. Производительность труда

154. Если Билл увеличит производительность своего труда на 20%, а Джек увеличит на 80% по сравнению с планом, то они

вместе выполнят всю работу за 280 мин. Если Билл увеличит производительность на 80%, а Джек увеличит на 20% по сравнению с планом, то они выполнят работу за 210 мин. Найдите время (в мин), которое потребуется для выполнения работы с плановой производительностью совместно Биллом и Джеком.
⧫ 360.

Решение. В соответствии с условиями задачи, можно считать, что проведено три эксперимента.
(1) Билл и Джек выполняют всю работу совместно с увеличенными производительностями труда.
(2) Билл и Джек выполняют всю работу совместно с увеличенными по-другому производительностями труда.
(3) Билл и Джек выполняют всю работу совместно с плановой производительностью труда.
Будем измерять время в минутах. Пусть плановые производительности труда Билла и Джека равны соответственно x и y. Так как нигде в задаче не указано, какой конкретно деятельностью занимаются участники и в каких единицах измеряется работа, примем весь обьем работы за 1. В первом эксперименте производительности труда Билла и Джека равны соответственно $1{,}2x$ и $1{,}8y$. При совместной работе производительности складываются, поэтому полная производительность труда в первом эксперименте равна $1{,}2x+1{,}8y$. За 280 минут выполнена вся работа, поэтому $280(1{,}2x+1{,}8y)=1$. Во втором эксперименте производительности равны $1{,}8x$ и $1{,}2y$, а время работы 210 мин, поэтому $210(1{,}8x+1{,}2y)=1$. В третьем эксперименте вся работа выполнена за неизвестное время T, поэтому $(x+y)T=1$. Все три уравнения можно записать в виде системы, $\begin{cases} 280(1{,}2x+1{,}8y)=1, \\ 210(1{,}8x+1{,}2y)=1, \\ (x+y)T=1. \end{cases}$

Условия задачи можно записать в виде таблицы,

$\mathcal{N}$	T	A	$\mathcal{B}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{B}+\mathcal{D}$	уравнение
1	280	1	$1{,}2x$	$1{,}8y$	$1{,}2x+1{,}8y$	$280(1{,}2x+1{,}8y)=1,$
2	210	1	$1{,}8x$	$1{,}2y$	$1{,}8x+1{,}2y$	$210(1{,}8x+1{,}2y)=1,$
3	T	1	x	y	$x+y$	$(x+y)T=1.$

Здесь $\mathcal{N}$ — номер эксперимента, T — время работы, A — обьем работы, $\mathcal{B}$ — производительность труда Билла, $\mathcal{D}$ — производительность труда Джека.

Займемся теперь решением системы. Особенность этой задачи (и многих других) в том, что величины x и y находить не обязательно, найти нужно T, которое в соответствии с третьим уравнением системы выражается через $x+y$. Таким образом, задача сводится к вычислению функции от решения системы, конкретно в данном случае это сумма двух неизвестных. Запишем первые два уравнения системы в виде $\begin{cases} 28(12x+18y)=1, \\ 21(18x+12y)=1. \end{cases}$ Пока складывать их нецелесообразно, так как в результате нужная функция от решения не получится. Если, однако, разделить первое уравнение на 28, а второе разделить на 21, то после этого в результате сложения немедленно можно вычислить $x+y$. Итак, $\begin{cases} 12x+18y=\frac{1}{28}, \\ 18x+12y=\frac{1}{21}, \end{cases}$ $30(x+y)=\frac{1}{12}$, $x+y=\frac{1}{12\cdot30}$, $T=12\cdot30=360$. ■

155. Если Билл увеличит свою производительность труда на 30%, а Джек увеличит свою производительность труда на 42%, то время совместного выполнения ими заданного объема работ уменьшится в 1,38 раза. Первоначально производительность труда Билла была меньше, чем у Джека, на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 30% $\boxed{\mathbf{2}}$ 50% $\boxed{\mathbf{3}}$ 70% $\boxed{\mathbf{4}}$ 20% $\boxed{\mathbf{5}}$ 80%

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 50%.

Решение. Условия задачи можно записать в виде таблицы,

$\mathcal{N}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{B}+\mathcal{D}$	уравнение
1	$1{,}3x$	$1{,}42y$	$1{,}3x+1{,}42y$	$t(1{,}3x+1{,}42y)=1,$
2	x	y	$x+y$	$T(x+y)=1.$

В соответствии с условиями задачи, $T=1{,}38t$. Разделим почленно два уравнения, расположенные в правой колонке таблицы, в результате получится $1{,}3x+1{,}42y=1{,}38(x+y)$, $0{,}04y=0{,}08x$, $y=2x$. Таким образом, производительность Джека на 100% больше производительности Билла, а производительность Билла на 50% меньше, чем у Джека. ■

156. Если Билл увеличит производительность труда на 50%, а Джек увеличит на 60% по сравнению с планом, то они вместе за 30 дней изготовят 1062 детали. Если же Билл увеличит производительность на 170%, а Джек на 70% по сравнению с планом, то они вместе за 20 дней изготовят то же количество деталей. Сколько деталей Билл и Джек вместе изготовят за один день, работая с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3**♦ деталей: 23; $x = 14$; $y = 9$.

Решение. Условия задачи можно записать в виде таблицы,

$\mathcal{N}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{B}+\mathcal{D}$	уравнение
1	$1{,}5x$	$1{,}6y$	$1{,}5x+1{,}6y$	$30(1{,}5x+1{,}6y) = 1062,$
1	$2{,}7x$	$1{,}7y$	$1{,}5x+1{,}6y$	$20(2{,}7x+1{,}7y) = 1062,$
2	x	y	$x+y$	$x+y=z.$

Здесь z — искомое количество деталей, изготавливаемых по плану за день. Запишем первые два уравнения в виде $\begin{cases} 3(15x+16y) = 1062, \\ 2(27x+17y) = 1062. \end{cases}$ Разделим первое уравнение на 3, второе разделим на 2, $\begin{cases} 15x+16y = 354, \\ 27x+17y = 531. \end{cases}$ Теперь умножим первое уравнение на 10, $\begin{cases} 150x+160y = 3540, \\ 27x+17y = 531, \end{cases}$ и сложим уравнения почленно, $177(x+y) = 4071$, поэтому $x+y = 23$. ■

157. Плановые производительности Билла и Джека одинаковы. Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек повысит на 20%, то на выполнение всей работы понадобится 81 день. Если же указанное повышение произойдет после истечения половины времени, то на выполнение всей работы понадобится 80 дней. За сколько дней выполнят они работу с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **5**♦ 90 дней, $x = \frac{1}{180}$; $y = \frac{1}{180}$.

Решение. Пусть A — работа, x и y — плановые производительности труда, $1{,}3x$ и $1{,}2y$ — повышенные производительности труда. Из условий задачи следует, что $\begin{cases} \frac{0{,}5A}{x+y} + \frac{0{,}5A}{1{,}3x+1{,}2y} = 81, \\ \frac{80}{2}(x+y) + \frac{80}{2}(1{,}3x+1{,}2y) = A. \end{cases}$

Обозначим $u = \frac{A}{x+y}$, $v = \frac{A}{1{,}3x+1{,}2y}$, тогда $\begin{cases} u+v = 162, \\ u^{-1}+v^{-1} = 40^{-1}. \end{cases}$ Второе уравнение можно записать в виде $\frac{u+v}{uv} = \frac{1}{40}$. Подставим значение $u+v = 162$ и получим $\frac{162}{uv} = \frac{1}{40}$. На данный момент нам удалось вычислить значения суммы и произведения неизвестных величин u и v, $\begin{cases} u+v = 162, \\ uv = 162 \cdot 40, \end{cases}$ Получилась виетовская система. Для вычисления неизвестных решим квадратное уравнение $u^2 - 162u + 162 \cdot 40 = 0$, $u = 81 \pm \sqrt{81^2 - 162 \cdot 40}$. корни квадратного уравнения равны $u \in \{72;\ 90\}$. Система имеет два решения, $(u;v) \in \{(72;90);\ (90;72)\}$. Заметим, что по условию задачи $A > 0$, поэтому $u > v$. Это условие позволяет выбрать нужный ответ, $\frac{A}{x+y} = 90$. ■

158. Билл повысил свою производительность труда, в результате чего время выполнения работы сократилось со 169 до 156 дней. Затем он еще раз повысил свою производительность на столько же процентов, в результате чего время выполнения работы сократилось еще на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 11 дней $\boxed{\mathbf{2}}$ $12,5$ дней $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 дней $\boxed{\mathbf{4}}$ $12,(3)$ дней $\boxed{\mathbf{5}}$ 13 дней

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 12 дней.

Решение. Пусть вся работа равна A, плановая производительность труда x, плановое время $t = 169$. Величина работы, время и производительность труда связаны основным уравнением, $169x = A$. После повышения производительности труда на $n\%$ основное уравнение даст $156x(1+\frac{n}{100}) = A$. После повторного повышения повышения производительности труда на $n\%$ основное уравнение даст $Tx(1+\frac{n}{100})^2 = A$.

$156(1+\frac{n}{100}) = 169$, $T(1+\frac{n}{100})^2 = 169$, $T = \frac{156^2}{169} = 144$. Таким образом, время сократилось еще на $156 - 144 = 12$ дней. ■

159. Производительность труда возросла на 25%, поэтому работа была выполнена на 6 дней быстрее. Если после этого производительность увеличится еще на 60%, то работа будет выполнена быстрее еще на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 9 дней $\boxed{\mathbf{2}}$ 5 дней $\boxed{\mathbf{3}}$ $6,4$ дней $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 дней $\boxed{\mathbf{5}}$ 12 дней

Ответ $\boxed{1}$♦ 9 дней; $dN_2 = dN_1 \cdot q_1^{-1} \cdot \frac{1-q_2^{-1}}{1-q_1^{-1}}$.

9.5.2. Задачи экономического содержания

160. Цены на товары увеличились в 150 раз, а заработная плата увеличилась в 100 раз. На сколько процентов уменьшилась реальная заработная плата?

$\boxed{1}$ $33\frac{1}{3}\%$ $\boxed{2}$ 50% $\boxed{3}$ 5000% $\boxed{4}$ 20% $\boxed{5}$ 40%

Ответ $\boxed{1}$♦ $33\frac{1}{3}\%$.

Решение. Раньше на Q рублей можно было купить $Z = \frac{Q}{P}$ кг товара по цене P рублей за килограмм, теперь на $100Q$ рублей можно купить $\frac{100Q}{150P}$ кг товара по цене $150P$ рублей за килограмм, поэтому реальная заработная плата, т. е. количество товара, которое можно купить, израсходовав всю сумму заработной платы, уменьшилась на $\frac{Z-\frac{100}{150}Z}{Z} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\%$. ■

161. Если 1 куб. м газа на 110% дороже 1 кг угля и дает тепла на 50% больше, то при переходе с угля на газ расходы на топливо при прочих равных условиях возрастут на

$\boxed{1}$ 60% $\boxed{2}$ 40% $\boxed{3}$ 50% $\boxed{4}$ 25% $\boxed{5}$ 160%

Ответ $\boxed{2}$♦ 40%.

Решение. Раньше для получения тепла приходилось сжигать уголь, каждый кг которого стоил P_1 рублей и производил q_1 калорий. Для получения Q калорий тепла необходимо было сжечь $\frac{Q}{q_1}$ кг угля, за который требовалось заплатить $\frac{P_1Q}{q_1}$ руб. Теперь для получения тепла сжигаем газ, каждый кубометр которого стоит P_2 рублей и производит q_2 калорий. Для получения тех же Q калорий тепла необходимо сжечь $\frac{Q}{q_2}$ кубометров газа, за который придется заплатить $\frac{P_2Q}{q_2}$ руб., поэтому расходы возрастут на $\frac{\frac{P_2Q}{q_2}-\frac{P_1Q}{q_1}}{\frac{P_1Q}{q_1}} \cdot 100\% = \left(\frac{P_2/P_1}{q_2/q_1} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{210}{150} - 1\right) \cdot 100\% = 40\%$. ■

162. Перекупщик купил колбасу с истекшим сроком реализации со скидкой 80% от номинальной цены и продал ее, получив прибыль в размере 70%. С какой скидкой от номинальной цены была продана колбаса?

$\boxed{1}$ 10% $\boxed{2}$ 66% $\boxed{3}$ 56% $\boxed{4}$ 50% $\boxed{5}$ 22%

Ответ $\boxed{2}$♦ 66%.

Решение. Раньше 1 кг колбасы стоил P рублей. Перекупщик купил Q кг колбасы и затратил $(1-0{,}8)PQ = 0{,}2PQ$ руб. Затем он продал всю колбасу за $1{,}7 \cdot 0{,}2PQ = 0{,}34PQ$ руб. Каждый килограмм был продан за $0{,}34P = (1-0{,}66)P = \frac{100-66}{100}P$ руб., поэтому скидка от номиналоьной цены колбасы составила 66%. ■

163. По состоянию на 30 марта 2002 года, процессор PIV 1400 МГц стоит 120 уе, PIV 1600 МГц стоит 200 уе, PIV 1800 МГц стоит 250 уе, PIV 2000 МГц стоит 350 уе. Выбирая процессор для своего нового компьютера в соответствии с критерием достижения максимального значения отношения (производительность процессора, выраженная в МГц)/(стоимость процессора + стоимость всех остальных компонент компьютера), Петя остановился на модели за 250 уе (производительность компьютера пропорциональна количеству МГц процессора). Укажите все возможные значения, которые может принимать суммарная стоимость всех остальных компонентов компьютера x, которые одноременно с процессором покупает Петя (стоимость остальных компонентов не зависит от модели процессора)?

$\boxed{1}$ $200 < x < 650$ $\boxed{2}$ $335 < x < 650$ $\boxed{3}$ $200 < x < 335$
$\boxed{4}$ $200 < x < 250$ $\boxed{5}$ $250 < x < 350$

Ответ $\boxed{2}$♦ $335 < x < 650$.

Решение. Пусть x — стоимость всех остальных компонент. Таблица общей стоимости компьютера:

Быстродействие	Стоимость
1400	$x + 120$
1600	$x + 200$
1800	$x + 250$
2000	$x + 350$

Одновременно выполнены условия
$\frac{1400}{x+120} < \frac{1800}{x+250}$, $\frac{1600}{x+200} < \frac{1800}{x+250}$, $\frac{2000}{x+350} < \frac{1800}{x+250}$,
откуда следует $x > 335$, $x > 200$, $x < 650$. ■

9.5.3. Понятие спроса и предложения

164. Функция спроса на коктейль на дискотеке является линейной функцией, причем спрос равен 48 бокалов при цене 8 у.е.и равен 24 бокала при цене 16 у.е.Найдите максимально возможную выручку от продажи коктейлей и укажите остаток от деления полученного натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ остаток 2; Цена $= 12; N(12) = 36$; $P = 12 \cdot 36 = 432$.

Решение. Пусть x — количество бокалов, y — цена одного бокала. По условию, $y = a + bx$, $\begin{cases} a + 24b = 16, \\ a + 48b = 8, \end{cases}$ поэтому $a = 24$, $b = -1/3$. Выручка равна $f(x) = xy = x\left(24 - \frac{x}{3}\right)$, $f(x) = \frac{x(72-x)}{3}$, $\max f(x) \Rightarrow x = 36$, $f(x) = \frac{36(72-36)}{3}$. ■

9.5.4. Банковский процент

9.5.4.1. Основные положения банковского процента

165. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 1000 у.е., процентная ставка составляет 50% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за второй год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 500 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1000 $\boxed{\mathbf{3}}$ 375 $\boxed{\mathbf{4}}$ 750 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1210

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 750.

Решение. В конце первого года после начисления процентов величина вклада будет равна Aq, где $A = 1000$ — начальная велична вклада, $q = 1 + \frac{n}{100}$, $n = 50$ — процентная ставка в расчете на год. В конце второго года после начисления процентов величина вклада будет равна Aq^2, поэтому прирост вклада за второй год равен $A(q^2 - q) = Aq(q-1) = 1000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 750$. ■

166. Банк начисляет по вкладу 30% в конце каждого года. Оказалось, что прирост вклада за второй год больше прироста за первый год на 144 у.е. Какова была величина вклада в начале первого года (в у. е.)?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2000 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1600 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1200 $\boxed{\mathbf{4}}$ 720 $\boxed{\mathbf{5}}$ 2400

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ 1600.

Решение. Пусть в начале первого банковского года в банк был внесен вклад, величина которого равна A у. е., а банковский процент равен $n\%$ в год. Тогда в конце первого года (и в начале второго) величина вклада будет равна Aq у. е., где $q = 1 + \frac{n}{100}$. В конце второго года (и в начале третьего) величина вклада будет равна Aq^2 у. е., поэтому прирост вклада за первый год δ_1 равен $Aq - A = A(q-1)$, прирост за второй год δ_2 равен $Aq^2 - Aq = Aq(q-1)$. Прирост за второй год больше прироста за первый год на величину, равную $\delta_2 - \delta_1 = A(q-1)^2$. Следовательно, $A = \frac{\delta_2 - \delta_1}{(q-1)^2}$. По условию задачи, $n = 30$, $q = 1{,}3$, $\delta_2 - \delta_1 = 144$, $A = \frac{144}{0{,}3^2} = 1600$. ■

9.5.4.2. Банковский процент за несколько лет

167. Сумма вклада за третий год увеличилась на 1728 руб., а за шестой год — на 9261 руб. Какова была величина вклада в начале пятого года, если доход начисляется в конце каждого года хранения вклада и процентная ставка не менялась? Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 12348, $n = 75\%$, $q = \frac{7}{4}$.

Решение. Пусть величина вклада в начале первого года равна A_0. Тогда величина вклада в конце n-го года равна $A_n = A_0 \cdot q^n$, $A_2 = A_0 \cdot q^2$, $A_3 = A_0 \cdot q^3$, прирост вклада за третий год равен $A_3 - A_2 = A_0 \cdot q^2(q-1)$. Прирост вклада за шестой год равен $A_6 - A_5 = A_0 \cdot q^5(q-1)$. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} A_0q^5(q-1) = 9261, \\ A_0q^2(q-1) = 1728. \end{cases}$ Поделим уравнения почленно, и сократим последовательно на 3, 3, 3, получим $q^3 = \frac{9261}{1728} = \frac{3087}{576} = \frac{1029}{192} =$

$\frac{343}{64} = \frac{7^3}{4^3}$. Следовательно, $q = \frac{7}{4}$, $A_5 = A_0 \cdot q^5$, $A_5 = A_0 \cdot q^5(q-1) \cdot \frac{1}{q-1}$, $A_5 = (A_6 - A_5) \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{9261 \cdot 4}{3} = 12348$. ■

168. Банк начисляет проценты в конце года и прибавляет их ко вкладу. Доход по вкладу за четвертый год хранения оказался больше дохода за первый год на 392 руб. Доход за второй год хранения оказался больше дохода за первый год на 72 руб. В начале первого года сумма вклада (в рублях) была равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **2**♦ 162; $q = 5/3$.

Решение. Пусть величина вклада в начале первого года равна A_0. Тогда величина вклада в конце n-го года равна $A_n = A_0 \cdot q^n$, прирост вклада за четвертый год равен $A_4 - A_3 = A_0 \cdot q^3(q-1)$. Прирост вклада за первый год равен $A_1 - A_0 = A_0 \cdot (q-1)$. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} A_0(q-1)(q^3-1) = 37, \\ A_0(q-1)^2 = 9. \end{cases}$ Поделим уравнения почленно, $q^2 + q + 1 = \frac{392}{72} = \frac{49}{9}$. Следовательно, $q = \frac{5}{3}$, Капитал по годам равен 162, 270, 450, 750, 1250, Прирост капитала по годам равен 108, 180, 300, 500. ■

169. В начале первой недели в пруд запустили 11 инфузорий. В конце каждой недели каждая инфузория делится на 4 части, после чего карась съедает 21 инфузорию. В начале 31-й недели число инфузорий в пруду будет равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **1**♦ ...1.

Решение 1. Несмотря на другое словесное оформление, это типичная банковская задача. Проще всего проследить за последней цифрой числа, выражающего количество обьектов после выемки (в данном случае — после сьедания), конец 1-й недели, $11 \cdot 4 - 21 = \ldots 3$, конец 2-й недели, $\ldots 3 \cdot 4 - 21 = \ldots 1$, конец 3-й недели, $\ldots 1 \cdot 4 - 21 = \ldots 3$, конец 4-й недели, $\ldots 3 \cdot 4 - 21 = \ldots 1$, и т.д. Получается периодическая последовательность с периодом 2. В ответ требуется занести результат в конце 30-й недели, последняя цифра такая же, как в конце 2-й недели. ■

Решение 2. Несложно вывести общую формулу для количества обьектов в конце n-й недели, $Z_n = Aq^n - b\frac{q^n-1}{q-1}$, где A — количество обьектов в начале первой недели, q — коэффициент размножения, b — в еличина выемки. ■

9.5.4.3. Сравнение прироста капитала при различных условиях помещения

170. В начале года Петя положил 1 млн руб. в банк А, который начисляет $0,3\%$ каждые 6 месяцев, а Вася положил 1 млн руб. в банк Б, который начисляет $0,2\%$ каждые 4 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях составит (укажите ближайшее к точному значению целое число рублей)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 3 $\boxed{\mathbf{3}}$ 6 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 12

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $B - A = 3,008$;

Решение. Капиталы участников будут равны
$A = (1000 + 3)^2 = 1000000 + 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2$,
$B = (1000 + 2)^3 \cdot 0,001 = 1000000 + 3 \cdot 1000 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 0,001 \cdot 2^3$.
Их разность равна $B - A = 3 \cdot 2^2 - 3^2 + 0,001 \cdot 2^3 = 12 - 9)0{,}003$.
■

171. В начале года Билл положил 100 млн руб в банк А, который начисляет 3% каждые 3 месяца, а Джек положил 100 млн руб в банк Б, который начисляет 4% каждые 4 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях будет равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $B - A = 64481$.

Решение. Капиталы равны $A = (100 + 3)^4$,
$A = 10^8 + 12000000 + 540000 + 10800 + 81$, $B = 100 \cdot (100 + 4)^3$,
$B = 10^8 + 12000000 + 480000 + 6400$, $B - A = 60000 + 4400 + 81$.
■

9.5.4.4. Применение производной в банковских задачах

172. В начале 1948 г. Билл положил 1 млн руб. в пустой сейф. В начале каждого последующего года он вынимает из сейфа $m\%$

имеющихся там рублей. При каком значении m он вынет из сейфа в начале 1998 г. максимальную сумму (инфляция и девальвация не учитываются)?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50 $\boxed{\mathbf{2}}$ 5 $\boxed{\mathbf{3}}$ 10 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $m = 2$.

Решение. Пусть капитал в начале 1-го года равен b, капитал в конце n-го года равен A_n. Тогда $A_n = b \cdot q^{n-1}$, где $q = 1 - \frac{m}{100}$. величина выемки из сейфа равна $A_n - A_{n+1} = b \cdot q^{n-1}(1-q) = bq^{n-1} - bq^n$. Найцдем производную этой величины по переменной q, $\big(A_n - A_{n+1}\big)' = b\big((n-1)q^{n-2} - nq^{n-1}\big)$, и приравняем производную нулю. Получим значение, при котором выемка максимальна, $q = \frac{n-1}{n}$. Так как по условию $n = 50$, то $q = 0{,}98$, $m = 2$. ■

173. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 2 года вклад уменьшается на $2x\,\%$ в год, последующие 3 года вклад увеличивается на $3x\,\%$ в год, причем величину $x \in [0;\ 50]$ вы можете выбрать сами. При каком значении x через 5 лет прирост вклада будет наибольшим? Укажите верное утверждение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (0;\ 11)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [11;\ 12)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [12;\ 14)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [14;\ 18)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [18;\ 50)$

Ответ: $\boxed{\ \mathbf{4}\ }$.♦ $x = \frac{100}{6} = 16,(6)$. ♦

Решение. Капитал в конце будет равен $f(z) = (1-pz)^m \cdot (1+qz)^n$, где числовые параметры равны $m = 2$, $p = 2$, $n = 3$, $q = 3$, $z = x/100$. Для вычисления наибольшего значения найдем производную,
$f' = (1-pz)^{m-1} \cdot (1+qz)^{n-1} \cdot (-pm(1+qz) + nq(1-px))$.
Производная равна нулю при $z = \frac{nq-mp}{pq(m+n)}$. При заданных в условиях задачи числовых значениях получим $z = \frac{1}{6}$, $x = 16{,}(6)\%$. ■

9.6. Задачи для самостоятельного решения

9.6.0.5. Текстовые задачи, 1

174. Если Билл беднее Джека на 20%, то Джек богаче Билла на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 20% $\boxed{\mathbf{2}}$ 22, 5% $\boxed{\mathbf{3}}$ 16, (6)% $\boxed{\mathbf{4}}$ 25% $\boxed{\mathbf{5}}$ 10%

175. Если число A равно 443% от 443, а число B равно 444% от 442, то

1 $A - B = 0,01$ **2** $A - B = 0,1$ **3** $A = B$ **4** $A - B = -0,01$
5 $A - B = 0,001$

176. В этом году число студентов на одном из факультетов будет больше на 12 человек, что равносильно увеличению на 30%. Сколько студентов учились на этом факультете в прошлом году?

1 120 **2** 30 **3** 250 **4** 40 **5** 500

177. Расход фирмы на заработную плату для менеджеров возрос на 82%, количество менеджеров возросло на 30%. Заработок каждого менеджера возрос на

1 52% **2** 30% **3** 40% **4** 28% **5** 112%

178. Конфеты подешевели на 25%. Сколько кг конфет можно купить теперь на те же деньги, на которые прежде продавали 108 кг?

1 140 кг **2** 128 кг **3** 144 кг **4** 136 кг **5** 135 кг

179. Выплатив работнику заработную плату, фирма обязана дополнительно перечислить в социальные фонды сумму, равную 25% выплаченной зарплаты. Если вместе эти расходы составили 350 руб., то сумма, перечисленная в социальные фонды, составила (в руб.)

1 72 **2** 87,5 **3** 80 **4** 70 **5** 64

180. Раньше накладные расходы составляли 30% общих расходов. Накладные расходы (в рублях) возросли на 110%, а прочие расходы (в рублях) возросли на 60%, и теперь накладные расходы составляют от общих расходов

1 56,25% **2** 84% **3** 36% **4** 80% **5** 44%

181. Если накладные расходы уменьшить в два раза, а прочие расходы увеличить в восемь раз, то общие расходы увеличатся в шесть раз. Первоначально прочие расходы были больше накладных на n%, где

1 $n \in (0;\ 150)$ **2** $n \in [150;\ 200)$ **3** $n \in [200;\ 250)$
4 $n \in [250;\ 300)$ **5** $n \in [300;\ 9999)$

182. Вес груза, размещенного на корабле, составляет 66% общего веса корабля. Если вес груза уменьшить в 11 раз, то после этого вес груза будет составлять от общего веса корабля

1 5% **2** 6% **3** 15% **4** 27,5% **5** 12%

183. Сосна на 60% выше елки. Если каждое дерево подрастет на 24 м, то сосна будет на 12% выше елки. Первоначальная высота елки (в метрах) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

184. 15 лет назад Джек был на 60% старше Билла, а сейчас он на 24% старше Билла. Разница возрастов Джека и Билла, выраженная в годах, равна

1 8 **2** 10 **3** 6 **4** 12 **5** 9

185. Цену товара сначала повысили на 20% и затем понизили на 20%. Конечная цена отличается от начальной на

1 4% **2** 9% **3** 16% **4** 20% **5** 0%

186. Цена возросла на 150% а затем вернулась к прежнему уровню. На сколько процентов уменьшилась цена во второй раз?

1 60% **2** 33,(3)% **3** 66,(6)% **4** 122,(2)% **5** 150%

187. Цена акции возросла 1 апреля на 40% и затем возросла еще раз 2 апреля, в результате чего общее повышение цены составило 110%. На сколько процентов возросла цена 2 апреля?

1 50% **2** 33,(3)% **3** 66,(6)% **4** 122,(2)% **5** 150%

188. Цену товара повысили на 40%, затем понизили на 30%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

1 конечная цена меньше начальной на 2%

2 конечная цена больше начальной на 2%

3 конечная цена меньше начальной на 10%

4 конечная цена больше начальной на 10%

5 конечная цена равна начальной

189. Цена товара повышалась два раза на одно и то же число процентов. По сравнению с первоначальной цена повысилась на 44%. На сколько процентов повышалась цена каждый раз?

1 12% **2** 20% **3** 144% **4** 22% **5** $\sqrt{44}$%

190. Телевизор, стоивший 10 тыс. руб., стал дороже на 38%. Через месяц он стал дешевле на 24%. Теперь его цена, выраженная в рублях, является целым числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

191. Квартира, стоившая 1 млн руб., стала дороже на $9,5\%$. Через год она стала дороже еще на $7,3\%$. Теперь ее цена, выраженная в рублях, является натуральным числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

192. Цену товара повысили на 50%, затем понизили на 20%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

1 конечная цена меньше начальной на 20%

2 конечная цена больше начальной на 20%

3 конечная цена меньше начальной на 10%

4 конечная цена меньше начальной на 15%

5 конечная цена равна начальной

193. Цена дилера больше цены производителя на 25 рублей, или, что то же самое, больше на 5%. Розничная цена больше цены дилера на 63 рубля. На сколько процентов розничная цена больше цены дилера?

1 12% **2** 15% **3** 20% **4** 18% **5** 24%

194. Цена товара изменялась три раза, первый раз повысилась на 40%, второй раз повысилась на 25%, а в результате трехкратного изменения повысилась всего на 96%. На сколько процентов изменилась цена в третий раз?

1 понизилась на 12% **2** понизилась на 2%

3 повысилась на 24% **4** повысилась на 12%

5 повысилась на 2%

195. Год назад Билл был на 20% тяжелее Джека, с тех пор Билл стал тяжелее на 55%, а Джек стал тяжелее на 50%, и теперь Билл тяжелее Джека на

1 20% **2** 24% **3** 25% **4** 27% **5** 21%

196. Найдите число, если 13% его составляют 65% от числа 4,25

1 63,75 **2** 42,5 **3** 106,25 **4** 10,625 **5** 21,25

197. Одно из чисел в три раза больше другого. Если меньшее из них увеличить на 50%, а большее уменьшить на 20%, то сумма чисел

1 увеличится на 12,5% **2** уменьшится на 12,5%

3 увеличится на 3,5% **4** уменьшится на 2,5%

5 уменьшится на 0,975%

198. Три числа относятся как $0,3 : 0,75 : 0,5$, причем второе больше половины первого на 36. Сумма этих чисел составляет

1 60 **2** 75 **3** 46,5 **4** 93 **5** 95

199. На остановке с автобуса сошли $\frac{1}{3}$ всех мужчин и $\frac{5}{16}$ всех женщин, после чего доля мужчин в салоне среди пассажиров составила $\frac{2}{5}$ (новые пассажиры не появились). Какова была доля мужчин среди всех пассажиров в салоне до остановки?

1 $\frac{15}{34}$ **2** $\frac{9}{17}$ **3** $\frac{22}{53}$ **4** $\frac{11}{27}$ **5** $\frac{11}{16}$

200. Первый насос наполняет бассейн за 3 ч, второй насос — за 5 ч. Сколько времени (в часах) потребуется на наполнение бассейна, если одновременно первый насос будет наливать, а второй насос — откачивать воду из бассейна?

1 8 **2** 5,3 **3** 25 **4** 7,5 **5** 12,5

201. Если включить первый насос на 3 ч, а второй — на 8 ч, то они заполнят водой 64% бака. Если включить первый насос на 8 ч, а второй — на 3 ч, они заполнят 78% бака. Какая часть бака будет заполнена, если на протяжении 26 ч первый насос будет наливать, а второй насос — откачивать воду из бака?

1 85% **2** 72,8% **3** 91% **4** 96% **5** 93%

202. Если Билл проработает 3 дня, а Джек — 5 дней, то будет выполнено 36% работы. Если Билл проработает 5 дней, а Джек —

3 дня, то будет выполнено 43% работы. Какая доля работы будет выполнена, если Билл и Джек проработают совместно 8 дней?

1 80% **2** 82% **3** 79% **4** 81% **5** 88%

203. 13 автобусов и 7 трамваев перевозят 1016 пассажиров. 9 автобусов и 11 трамваев перевозят 968 пассажиров. Сколько пассажиров останутся на остановке, если 7 автобусов выпустят своих пассажиров, а затем 7 трамваев заберут пассажиров с остановки (автобусы заполняются или освобождаются полностью)?

1 84 **2** 77 **3** 56 **4** 49 **5** 63

204. 17 лабрадоров и 7 такс совместно съедают мешок корма за время, которое в 2 раза меньше, чем время поедания мешка 7 таксами и 17 лабрадорами. Один лабрадор съедает мешок корма в n раз быстрее, чем одна такса. Укажите остаток от деления натурального числа n на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

205. Яблоки при высушивании потеряли 85% своей массы. Сколько сушеных яблок получится из 500 кг свежих?

1 75 кг **2** 64 кг **3** 51 кг **4** 36 кг **5** 45 кг

206. При смешивании сплава А, содержащего 91% меди, со сплавом В, содержащим 64% меди, получен сплав С, содержащий 70% меди. В каком отношении были взяты массы сплавов А и В?

1 $A : B = 5 : 2$ **2** $A : B = 7 : 2$ **3** $A : B = 134 : 155$

4 $A : B = 2 : 5$ **5** $A : B = 2 : 7$

207. Из 40 т железной руды выплавили 15 т стали, содержащей 6% примесей. Все остальное — чистые примеси. Процент примесей в руде составляет

1 62% **2** 70% **3** 64, 75% **4** 72, 4% **5** 75%

208. На фирме А 30% сотрудников — менеджеры, на фирме В менеджеров 80%. После слияния образовалась фирма С, 50% сотрудников которой — менеджеры (специализация сотрудников не менялась и никто не был уволен). Найдите долю бывших сотрудников фирмы А среди всех сотрудников фирмы С.

1 50% **2** 75% **3** 25% **4** 60% **5** 40%

209. В емкости находилось 100 л чистого спирта. V литров спирта отлили в канистру, а емкость дополнили водой до прежнего объема и перемешали. Затем из емкости вновь отлили в канистру V литров смеси, и дополнили емкость водой до первоначального объема. В результате в емкости оказался 49%-й раствор спирта. Укажите верное утверждение.

1 $V \in (0;\ 27)$ **2** $V \in [27;\ 30)$ **3** $V \in [30;\ 33)$ **4** $V \in [33;\ 36)$ **5** $V \in [36;\ 100)$

210. В результате опроса 49 жителей Москвы выяснилось, что 34 опрошенных посещают кинотеатры, 26 посещают стадионы, 19 посещают и кинотеатры, и стадионы. Сколько человек из числа опрошенных не посещают ни кинотеатры, ни стадионы? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

211. Опрос прохожих на улицах Петербурга показал, что 53% из них учатся, 62% работают, 14% не учатся и не работают. Сколько прохожих одновременно учатся и работают?

1 27% **2** 29% **3** 34% **4** 43% **5** 37%

212. Среди всех школьников $\frac{2}{3}$ их общего числа изучают английский язык, $\frac{5}{6}$ изучают французский язык, $\frac{11}{18}$ изучают оба упомянутых языка. Какова доля школьников, не изучающих ни один из упомянутых языков?

1 $\frac{1}{6}$ **2** $\frac{1}{18}$ **3** $\frac{1}{9}$ **4** $\frac{2}{9}$ **5** $\frac{5}{18}$

213. Автобус проехал дорогу длиной 104 км от города А до города Б за 18 ч. Через 6 ч после его отправления по тому же маршруту выехал автомобиль, который проехал тот же путь за 5 ч. На каком расстоянии от А они встретились?

1 36 км **2** 38 км **3** 42 км **4** 48 км **5** 44 км

214. Пройдя $\frac{2}{9}$ пути из пункта А в пункт Б, Билл и Джек разошлись: Билл направился в сторону А, а Джек — в сторону Б, скорости Билла и Джека равны 10 км/ч. Дойдя до А, Билл немедленно сел в автобус, направляющийся из А в Б, и прибыл в Б одновременно с Джеком. Величина скорости автобуса равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

215. В полдень расстояние между Биллом, идущим по прямолинейной дороге с постоянной скоростью 3 км/ч, и Джеком, который едет по той же дороге в ту же сторону на велосипеде, было равно 9 км, а через час — 2 км, причем за это время Джек обогнал Билла. Скорость Джека (в км/ч) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

216. Билл совершил путешествие из пункта A в пункт B со скоростью 4 км/ч, Джек все это время курсировал по маршруту ABA на мотоцикле с постоянной скоростью 40 км/ч (стартовали они одновременно в пункте A, расстояние AB = 198 км). Если x — наименьшее расстояние между точками встречи (при движении Джека в любом направлении), то

1 $x \in (1;\ 3]$ **2** $x \in (3;\ 5]$ **3** $x \in (5;\ 7]$ **4** $x \in (7;\ 9]$
5 $x \in (9;\ 99)$

217. Скорость течения реки составляет 6 км/ч. Пароход проходит расстояние 18 км вниз по течению на 0,4 ч быстрее, чем то же расстояние вверх против течения. Укажите скорость парохода в стоячей воде.

1 15 км/ч **2** 16 км/ч **3** 18 км/ч **4** 24 км/ч **5** 32 км/ч

218. Пароход проходит 112 км против течения реки на 1 ч дольше, чем тот же путь по течению. Сколько времени займет путешествие в оба конца, если скорость течения реки 1 км/ч?

1 15 ч **2** 17 ч **3** 12 ч **4** 18 ч **5** 13 ч

219. Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта A в пункт B, пароход в B повернул обратно и на пути из B в A встретил плот, который к этому моменту проплыл $\frac{3}{5}$ расстояния AB. Отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки равно

1 $\frac{7}{3}$ **2** $\frac{8}{3}$ **3** $\frac{11}{4}$ **4** $\frac{10}{3}$ **5** $\frac{5}{2}$

220. Из пункта А в пункт Б (оба находятся на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 1 км/ч, пароход успел совершить шесть рейсов по маршруту АБА (сначала вниз по течению, затем обратно) и прибыл в пункт А одновременно с прибытием плота в пункт Б. Найдите скорость парохода в неподвижной воде и укажите остаток от деления ближайшего целого числа (в км/ч) на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

221. Из города А в город Б (оба находятся на берегу реки) отправляются одновременно вниз по течению плот и пароход. Пароход совершил рейс по маршруту АБАБАБАБ (4 раза вниз и 3 раза вверх по реке) и прибыл в пункт Б одновременно с плотом, который плыл вместе с течением со скоростью 2 км/ч. Найдите скорость парохода в неподвижной воде (в км/ч).

$\boxed{1}$ 16 $\boxed{2}$ 12 $\boxed{3}$ 13 $\boxed{4}$ 14 $\boxed{5}$ 15

222. Города A и B расположены на берегах реки. Из A в B и одновременно из B в A отправляются пароходы, скорость каждого в стоячей воде равна 18 км/ч. Достигнув второго города, каждый из них немедленно поворачивает обратно и возвращается в пункт отправления через 81 ч после старта. Время между встречами пароходов на реке равно 53 ч. Скорость течения, выраженная в км/ч, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

223. Три человека, у которых имеется один велосипед на троих, одновременно отправляются из пункта A в пункт B. На велосипеде можно ехать вдвоем. Скорость пешехода 5 км/ч, велосипедиста 15 — км/ч независимо от наличия пассажира. Расстояние между A и B равно 90 км. За какое минимальное время (в часах) они все смогут проделать весь путь?

$\boxed{1}$ 8 $\boxed{2}$ 9 $\boxed{3}$ 10 $\boxed{4}$ 12 $\boxed{5}$ 14

224. Города A и B расположены на берегу реки со скоростью течения 6 км/ч. Пароход проходит маршрут ABA за 21 ч. Если скорость парохода в неподвижной воде увеличить в 4 раза, то маршрут ABA займет 4 ч. Первоначальная скорость парохода в неподвижной воде, выраженная в км/ч, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

225. Билл повысил свою производительность труда, в результате чего время выполнения работы сократилось с 49 до 28 дней. Затем он еще раз повысил свою производительность на столько же процентов, в результате чего время выполнения работы сократилось еще на

1 21 дней **2** 18 дней **3** 16 дней **4** 12 дней **5** 10 дней

226. Производительность труда возросла на 25%, поэтому работа была выполнена на 24 дня быстрее. Если после этого производительность увеличится еще на 20%, то работа будет выполнена быстрее еще на

1 18 дней **2** 20 дней **3** 15 дней **4** 16 дней **5** 12 дней

227. Если Билл увеличит производительность своего труда на 90%, а Джек увеличит на 30% по сравнению с планом, то они вместе выполнят всю работу за 40 мин. Если Билл увеличит производительность на 30%, а Джек увеличит на 90% по сравнению с планом, то они выполнят работу за 50 мин. Работая с плановой производительностью, Билл и Джек вместе выполнят работу за время, которое принадлежит промежутку (в минутах)

1 $[1;\ 71,5)$ **2** $[71,5;\ 72)$ **3** $[72;\ 72,5)$ **4** $[72,5;\ 73)$ **5** $[73;\ 999]$

228. Если Билл увеличит свою производительность труда на 34%, а Джек увеличит свою производительность труда на 85%, то время совместного выполнения ими заданного объема работ уменьшится в $1,64$ раза. Первоначально производительность труда Билла была меньше, чем у Джека, на

1 50% **2** 70% **3** 30% **4** 80% **5** 20%

229. Если Билл увеличит производительность труда на 50%, а Джек увеличит на 60% по сравнению с планом, то они вместе за 40 дней изготовят 1044 детали. Если же Билл увеличит производительность на 140%, а Джек на 40% по сравнению с планом, то они вместе за 30 дней изготовят то же количество деталей. Сколько полных деталей Билл и Джек вместе изготовят за один день, работая с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

230. Плановые производительности Билла и Джека одинаковы. Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 20%, а Джек повысит на 60%, то на выполнение всей работы понадобится 72 дня. Если же указанное повышение произойдет после истечения половины времени, то на выполнение всей работы понадобится 70 дней. За сколько дней выполнят они работу с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

231. Если 1 куб. м газа на 80% дороже 1 кг угля и дает тепла на 20% больше, то при переходе с угля на газ расходы на топливо при прочих равных условиях возрастут на

1 60% **2** 40% **3** 50% **4** 100% **5** 160%

232. Перекупщик купил колбасу с истекшим сроком реализации со скидкой 30% от номинальной цены и продал ее, получив прибыль в размере 20%. С какой скидкой от номинальной цены была продана колбаса?

1 10% **2** 12% **3** 16% **4** 15% **5** 22%

233. Студент купил проездной билет со скидкой 30% от номинальной цены и продал его с прибылью для себя 30%. С какой скидкой от номинальной цены продал студент билет?

1 9% **2** 15% **3** 30% **4** 10% **5** 12%

234. Билл продал партию компьютеров, Джек продал партию принтеров, и их выручка оказалась одинакова. "Если бы принтер стоил столько же, сколько компьютер, я бы выручил 98 млн руб.", — сказал Джек. "Если бы компьютер стоил столько же, сколько принтер, я бы выручил 32 млн руб.", — ответил Билл. На сколько компьютер дороже принтера?

1 на 50% **2** на 60% **3** на 70% **4** на 75% **5** на 80%

235. Функция спроса на новую модель BMW является линейной функцией, причем спрос равен 42 шт. при цене $80,000$ у.е.и равен 7 шт. при цене $180,000$ у.е.Если цена установлена так, чтобы обеспечить максимальную выручку, то количество проданных автомобилей будет равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

236. Функция спроса на коктейль на дискотеке является линейной функцией, причем спрос равен 36 бокалов при цене 12 у.е.и равен 18 бокалов при цене 24 у.е.Найдите максимально возможную выручку от продажи коктейлей и укажите остаток от деления полученного натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

237. Функция спроса на новую модель мобильного телефона является линейной функцией, причем спрос равен 3 млн. шт. при цене 280 у.е.Если увеличить цену на 1 у.е., то спрос уменьшится на 15 тыс. шт. Каково наименьшее число автомобилей, которые потребуются для перевозки всех проданных телефонов при цене 320 у. е, если один автомобиль перевозит 10 тыс. телефонов?

1 170 **2** 280 **3** 360 **4** 160 **5** 240

238. При тех же условиях цена установлена так, чтобы обеспечить максимальную выручку. Сколько мешков потребуется для перевозки выручки, если один мешок вмещает 1 млн. у.е.? Укажите остаток от деления числа мешков на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

239. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 100 у.е., процентная ставка составляет 30% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за второй год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

1 30 **2** 40 **3** 39 **4** $37,5$ **5** 60

240. Банк начисляет по вкладу 40% в конце каждого года. Оказалось, что прирост вклада за второй год больше прироста за первый год на 144 у.е. Какова была величина вклада в начале первого года (в у. е.)?

1 1800 **2** 2400 **3** 900 **4** 720 **5** 2880

241. Сумма вклада за третий год увеличилась на 48 руб., а за шестой год — на 162 руб. Какова была величина вклада в начале четвертого года, если доход начисляется в конце каждого года хранения вклада и процентная ставка не менялась?

1 196 **2** 168 **3** 144 **4** 128 **5** 192

242. Банк начисляет проценты в конце года и прибавляет их ко вкладу. Доход по вкладу за четвертый год хранения оказался больше дохода за первый год на 196 руб. Доход за второй год хранения оказался больше дохода за первый год на 36 руб. В начале первого года сумма вклада (в рублях) была равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

243. Банк начисляет проценты в конце каждого года и прибавляет их ко вкладу. В начале каждого года Билл покупает Bentley, снимая деньги со своего счета, в результате его вклад растет только на 8% в год. Если Билл будет покупать 5 Bentley в начале года, то его вклад будет ежегодно уменьшаться на 40%. Какую долю от своего вклада приходится снимать Биллу для покупки одного автомобиля?

1 12% **2** 10% **3** 16% **4** 20% **5** 24%

244. Билл положил 150 у.е. в банк 1 января 2000 года. Доход по вкладу в банке начисляется один раз в год, 31 декабря, и прибавляется к вкладу. Раз в два года, начиная с 2002 года, 1 января Билл снимает со счета 144 у.е. для оплаты аренды. Какова наименьшая годовая процентная ставка, при которой остаток средств на вкладе не будет уменьшаться?

1 48% **2** 96% **3** 40% **4** 30% **5** 20%

245. В начале первой недели в пруд запустили 8 инфузорий. В конце каждой недели каждая инфузория делится на 3 части, после чего карась съедает 6 инфузорий. В начале 31-й недели число инфузорий в пруду будет равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

246. Фермер получил в банке кредит под определенный процент годовых. Через год он вернул в банк 5/9 от суммы полученного кредита, а еще через год он вернул в банк 75% от всей суммы, которую он был должен банку к этому времени. В конце третьего года он полностью погасил свою задолженность, вернув $23,2\%$ от суммы полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в этом банке?

247. В начале года Петя положил 1 млн руб. в банк А, который начисляет $0,6\%$ каждые 6 месяцев, а Вася положил 1 млн руб. в банк Б, который начисляет $0,4\%$ каждые 4 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях составит (укажите ближайшее к точному значению целое число рублей)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 24 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 6 $\boxed{\mathbf{4}}$ 9 $\boxed{\mathbf{5}}$ 18

248. Первого января 2001 г. Билл положил 1 млн руб. в сейф и берет из него 9% от суммы в сейфе каждые 3 года, а Джек положил в другой сейф 1 млн руб. и берет из него 6% от суммы в сейфе каждые 2 года. В начале 2007 г. (после выемки денег из обоих сейфов) разница содержимого сейфов в рублях будет равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

249. В начале года Билл положил 200 млн руб в банк А, который начисляет 8% каждые 4 месяца, а Джек положил 200 млн руб в банк Б, который начисляет 6% каждые 3 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях будет равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

250. В начале 1976 г. Билл положил 1 млн руб. в пустой сейф. В начале каждого последующего года он вынимает из сейфа $m\%$ имеющихся там рублей. При каком значении m он вынет из сейфа в начале 1996 г. максимальную сумму (инфляция и девальвация не учитываются)?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50 $\boxed{\mathbf{2}}$ 5 $\boxed{\mathbf{3}}$ 10 $\boxed{\mathbf{4}}$ 20 $\boxed{\mathbf{5}}$ 4

251. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 2 года вклад уменьшается на $3x\,\%$ в год, последующие 5 лет вклад увеличивается на $4x\,\%$ в год, причем величину $x \in [0;\ 30]$ вы можете выбрать сами. При каком значении x

через 7 лет прирост вклада будет наибольшим? Укажите верное утверждение.

1 $x \in (0;\ 11)$ **2** $x \in [11;\ 12)$ **3** $x \in [12;\ 14)$ **4** $x \in [14;\ 18)$ **5** $x \in [18;\ 30)$

9.6.0.6. Текстовые задачи, 2

252. Поезд прошел 6 км за 3 мин, а мотоцикл 3 км за 2 мин. Сколько процентов составляет скорость мотоцикла от скорости поезда?

1 70% **2** 160/3% **3** 75% **4** 90% **5** 200/3%

253. 90 тонн мяса отправили на заводы X и Y, в отношении $X : Y = 1 : 4$. На сколько тонн больше мяса получил завод Y по сравнению с заводом X?

1 48 **2** 36 **3** 64 **4** 72 **5** 54

254. Если карась короче щуки на 20%, то щука длиннее карася на

1 20% **2** 25% **3** $22,5\%$ **4** $16,(6)\%$ **5** $33,(3)\%$

255. Если щука длиннее карася на 60%, то карась короче щуки на

1 60% **2** $32,5\%$ **3** $22,5\%$ **4** 40% **5** $37,5\%$

256. Если число A равно 915% от 913, а число B равно 914% от 914, то

1 $A - B = 0,1$ **2** $A - B = 0,001$ **3** $A = B$ **4** $A - B = 0,01$ **5** $A - B = -0,01$

257. В этом году число студентов на одном из факультетов будет больше на 36 человек, что равносильно увеличению на 15%. Сколько студентов учились на этом факультете в прошлом году?

1 $41,(6)$ **2** 360 **3** 120 **4** 300 **5** 240

258. Расход фирмы на заработную плату для менеджеров возрос на 84%, количество менеджеров возросло на 15%. Заработок каждого менеджера возрос на

1 50% **2** 69% **3** 72% **4** 60% **5** 80%

259. Конфеты подешевели на $37,5\%$. Сколько кг конфет можно купить теперь на те же деньги, на которые прежде продавали 84 кг?

1 128 кг **2** 136 кг **3** 144 кг **4** 135 кг **5** 140 кг

260. Выплатив работнику заработную плату, фирма обязана дополнительно перечислить в социальные фонды сумму, равную 30% выплаченной зарплаты. Если вместе эти расходы составили 286 руб., то сумма, перечисленная в социальные фонды, составила (в руб.)

1 $85,8$ **2** 81 **3** 66 **4** 72 **5** 64

261. Раньше накладные расходы составляли 60% общих расходов. Накладные расходы (в рублях) возросли на 70%, а прочие расходы (в рублях) возросли на 20%, и теперь накладные расходы составляют от общих расходов

1 74% **2** 99% **3** 110% **4** 84% **5** 68%

262. Если накладные расходы уменьшить в четыре раза, а прочие расходы увеличить в семь раз, то общие расходы увеличатся в два раза. Первоначально прочие расходы были меньше накладных на $n\%$, где

1 $n \in (0;\ 45)$ **2** $n \in [45;\ 50)$ **3** $n \in [50;\ 55)$ **4** $n \in [55;\ 60)$ **5** $n \in [60;\ 100)$

263. Вес груза, размещенного на корабле, составляет 80% общего веса корабля. Если вес груза уменьшить в 12 раз, то после этого вес груза будет составлять от общего веса корабля

1 $6,(6)\%$ **2** 6% **3** 25% **4** 36% **5** 68%

264. Сосна на 30% выше елки. Если каждое дерево подрастет на 12 м, то сосна будет на 10% выше елки. Первоначальная высота елки (в метрах) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

265. 10 лет назад Джек был на 30% старше Билла, а сейчас он на 24% старше Билла. Разница возрастов Джека и Билла, выраженная в годах, равна

1 10 **2** 8 **3** 18 **4** 12 **5** 16

266. Цену товара повысили на 60%, затем понизили на 30%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

1 конечная цена равна начальной

2 конечная цена меньше начальной на 20%

3 конечная цена больше начальной на 30%

4 конечная цена больше начальной на 2%

5 конечная цена больше начальной на 12%

267. Цена товара повышалась два раза на одно и то же число процентов. По сравнению с первоначальной цена повысилась на 69%. На сколько процентов повышалась цена каждый раз?

1 13% **2** 34, 5% **3** 46% **4** 30% **5** $\sqrt{69}\%$

268. Телевизор, стоивший 10 тыс. руб., стал дороже на 47%. Через месяц он стал дешевле на 36%. Теперь его цена, выраженная в рублях, является целым числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

269. Квартира, стоившая 1 млн руб., стала дороже на 4, 2%. Через год она стала дороже еще на 8, 4%. Теперь ее цена, выраженная в рублях, является натуральным числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

270. Цену товара повысили на 30%, затем понизили на 40%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

1 конечная цена меньше начальной на 20%

2 конечная цена меньше начальной на 22%

3 конечная цена меньше начальной на 10%

4 конечная цена больше начальной на 10%

5 конечная цена равна начальной

271. Цена дилера больше цены производителя на 20 рублей, или, что то же самое, больше на 10%. Розничная цена больше цены дилера на 33 рубля. На сколько процентов розничная цена больше цены дилера?

1 15% **2** 12% **3** 20% **4** 18% **5** 24%

272. Цена товара изменялась три раза, первый раз повысилась на 12%, второй раз повысилась на 40%, а в результате трехкратного изменения повысилась всего на 96%. На сколько процентов изменилась цена в третий раз?

1 понизилась на 4% **2** понизилась на 2%

3 повысилась на 24% **4** повысилась на 12%

5 повысилась на 25%

273. Год назад Билл был на 21% тяжелее Джека, с тех пор Билл стал тяжелее на 50%, а Джек стал тяжелее на 10%, и теперь Билл тяжелее Джека на

1 61% **2** 62% **3** 65% **4** 63% **5** 64%

274. Если число 1000 разделить на 2 части x и y так, что $8\%x + 24\%y = 12\%(x+y)$, то меньшая часть числа равна

1 200 **2** 250 **3** 93,75 **4** 300 **5** 150

275. Весовое отношение компонент A, B, C в смеси 3 : 15 : 2. В 100 тоннах смеси содержание A равно (в тоннах):

1 12 **2** 20 **3** 16 **4** 15 **5** 25

276. Число 377 разделено на 3 части так, что вторая составляет 25% первой, а третья составляет 20% второй. Укажите меньшую часть числа:

1 290 **2** 260 **3** 52 **4** 14,5 **5** 7,75

277. На остановке с автобуса сошли $\frac{5}{8}$ всех мужчин и $\frac{4}{7}$ всех женщин, после чего доля мужчин в салоне среди пассажиров составила $\frac{17}{30}$ (новые пассажиры не появились). Найдите наименьшее возможное число пасажоров автобуса до остановки и укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

278. Первый насос наполняет бассейн за 4 ч, второй насос — за 6 ч. Сколько времени (в часах) потребуется на наполнение бассейна, если одновременно первый насос будет наливать, а второй насос — откачивать воду из бассейна?

1 10,5 **2** 10,25 **3** 36 **4** 24 **5** 12

279. Если включить первый насос на 7 ч, а второй — на 9 ч, то они заполнят водой 47% бака. Если включить первый насос на 9 ч, а второй — на 7 ч, они заполнят 59% бака. Какая часть бака будет заполнена, если на протяжении 16 ч первый насос будет наливать, а второй насос — откачивать воду из бака?

1 84% **2** 72% **3** 64% **4** 96% **5** 92%

280. Если Билл проработает 19 дней, а Джек — 33 дня, то будет выполнено 81% работы. Если Билл проработает 31 день, а Джек — 17 дней, то будет выполнено 69% работы. Какая доля работы будет выполнена, если Билл и Джек проработают совместно 14 дней?

1 88% **2** 44% **3** 42% **4** 32% **5** 38%

281. 14 автобусов и 9 трамваев перевозят 1101 пассажиров. 7 автобусов и 16 трамваев перевозят 1045 пассажиров. Сколько пассажиров останутся на остановке, если 8 автобусов выпустят своих пассажиров, а затем 8 трамваев заберут пассажиров с остановки (автобусы заполняются или освобождаются полностью)?

1 48 **2** 64 **3** 56 **4** 88 **5** 72

282. 19 жуков и 8 муравьев совместно съедают корку хлеба за время, которое в 2 раза меньше, чем время поедания корки 8 жуками и 19 муравьями. Один жук съедает корку в n раз быстрее, чем один муравей. Укажите остаток от деления натурального числа n на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

283. Смешали 2 литра 20% сметаны и 3 литра 15% сметаны. Какова жирность полученной сметаны?

1 $17,5$% **2** 19% **3** 17% **4** 18% **5** 16%

284. При смешивании сплава A, содержащего 17% меди, со сплавом B, содержащим 66% меди, получен сплав C, содержащий 38% меди. В каком отношении были взяты массы сплавов A и B?

1 $A : B = 4 : 3$ **2** $A : B = 2 : 3$ **3** $A : B = 3 : 2$ **4** $A : B = 3 : 5$ **5** $A : B = 3 : 4$

285. Смешали два сплава золота Au и серебра Ag. В сплаве X количества $Au : Ag$ относились как $5 : 8$, в сплаве Y количества

$Au : Ag$ относились как 4 : 9, в результате получен сплав Z, в котором отношение $Au : Ag$ равно 14 : 25. В каком отношении были взяты массы сплавов X и Y?
1 $X : Y = 3 : 2$ **2** $X : Y = 5 : 2$ **3** $X : Y = 2 : 3$
4 $X : Y = 2 : 5$ **5** $X : Y = 2 : 1$

286. На фирме А 30% сотрудников — менеджеры, на фирме В менеджеров 80%. После слияния образовалась фирма С, 40% сотрудников которой — менеджеры (специализация сотрудников не менялась и никто не был уволен). Найдите долю бывших сотрудников фирмы А среди всех сотрудников фирмы С.
1 20% **2** 40% **3** 50% **4** 60% **5** 80%

287. В емкости находилось 100 л чистого спирта. V л спирта отлили в канистру, а емкость дополнили водой до прежнего объема и перемешали. Затем из емкости вновь отлили в канистру V л смеси и дополнили емкость водой до первоначального объема. Процесс отливания-доливания повторили еще раз. В результате в емкости оказался 21,6%-й раствор спирта. Укажите верное утверждение.
1 $V \in (0;\ 39)$ **2** $V \in [39;\ 48)$ **3** $V \in [48;\ 57)$ **4** $V \in [57;\ 66)$
5 $V \in [66;\ 100)$

288. В результате опроса 44 жителей Москвы выяснилось, что 26 опрошенных посещают кинотеатры, 19 посещают стадионы, 18 посещают и кинотеатры, и стадионы. Сколько человек из числа опрошенных не посещают ни кинотеатры, ни стадионы? Укажите остаток от деления этого числа на 5.
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

289. Опрос прохожих на улицах Петербурга показал, что 52% из них учатся, 66% работают, 15% не учатся и не работают. Сколько прохожих одновременно учатся и работают?
1 34% **2** 27% **3** 48% **4** 37% **5** 33%

290. Среди всех школьников $\frac{2}{3}$ их общего числа изучают английский язык, $\frac{3}{4}$ изучают французский язык, $\frac{7}{12}$ изучают оба упомянутых языка. Какова доля школьников, не изучающих ни один из упомянутых языков?

1 $\frac{1}{6}$ **2** $\frac{1}{4}$ **3** $\frac{1}{12}$ **4** $\frac{1}{3}$ **5** $\frac{5}{12}$

291. Автобус проехал дорогу длиной 119 км от города А до города Б за 13 ч. Через 3 ч после его отправления по тому же маршруту выехал автомобиль, который проехал тот же путь за 6 ч. На каком расстоянии от А они встретились?

1 48 км **2** 56 км **3** 42 км **4** 44 км **5** 51 км

292. Пройдя $\frac{4}{11}$ пути из пункта А в пункт Б, Билл и Джек разошлись: Билл направился в сторону А, а Джек — в сторону Б, скорости Билла и Джека равны 12 км/ч. Дойдя до А, Билл немедленно сел в автобус, направляющийся из А в Б, и прибыл в Б одновременно с Джеком. Величина скорости автобуса равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

293. В полдень расстояние между Биллом, идущим по прямолинейной дороге с постоянной скоростью 2 км/ч, и Джеком, который едет по той же дороге в ту же сторону на велосипеде, было равно 7 км, а через час — 6 км, причем за это время Джек обогнал Билла. Скорость Джека (в км/ч) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

294. Билл совершил путешествие из пункта A в пункт B со скоростью 6 км/ч, Джек все это время курсировал по маршруту ABA на мотоцикле с постоянной скоростью 24 км/ч (стартовали они одновременно в пункте A, расстояние АВ $=$ 75 км). Если x — наименьшее расстояние между точками встречи (при движении Джека в любом направлении), то

1 $x \in (1;\ 3]$ **2** $x \in (3;\ 5]$ **3** $x \in (5;\ 7]$ **4** $x \in (7;\ 9]$
5 $x \in (9;\ 99)$

295. Скорость течения реки составляет 8 км/ч. Пароход проходит расстояние 48 км вниз по течению на 0,8 ч быстрее, чем то же расстояние вверх против течения. Укажите скорость парохода в стоячей воде.

1 15 км/ч **2** 16 км/ч **3** 18 км/ч **4** 24 км/ч **5** 32 км/ч

296. Пароход проходит 60 км против течения реки на 1 ч дольше, чем тот же путь по течению. Сколько времени займет путешествие в оба конца, если скорость течения реки 1 км/ч?

1 8 ч **2** 11 ч **3** 12 ч **4** 15 ч **5** 13 ч

297. Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта A в пункт B, пароход в B повернул обратно и на пути из B в A встретил плот, который к этому моменту проплыл $\frac{3}{7}$ расстояния AB. Отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки равно

1 $\frac{8}{3}$ **2** $\frac{7}{2}$ **3** $\frac{11}{4}$ **4** $\frac{11}{3}$ **5** $\frac{5}{2}$

298. Из пункта А в пункт Б (оба находятся на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 1 км/ч, пароход успел совершить пять рейсов по маршруту АБА (сначала вниз по течению, затем обратно) и прибыл в пункт А одновременно с прибытием плота в пункт Б. Найдите скорость парохода в неподвижной воде и укажите остаток от деления ближайшего целого числа (в км/ч) на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

299. Из города А в город Б (оба находятся на берегу реки) отправляются одновременно вниз по течению плот и пароход. Пароход совершил рейс по маршруту АБАБАБАБАБАБАБАБ (8 раз вниз и 7 раз вверх по реке) и прибыл в пункт Б одновременно с плотом, который плыл вместе с течением со скоростью 1 км/ч. Найдите скорость парохода в неподвижной воде (в км/ч).

1 16 **2** 12 **3** 13 **4** 14 **5** 15

300. Города A и B расположены на берегах реки. Из A в B и одновременно из B в A отправляются пароходы, скорость каждого в стоячей воде равна 27 км/ч. Достигнув второго города, каждый из них немедленно поворачивает обратно и возвращается в пункт отправления через 162 ч после старта. Время между встречами пароходов на реке равно 97 ч. Скорость течения, выраженная в км/ч, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

301. Три человека, у которых имеется один велосипед на троих, одновременно отправляются из пункта A в пункт B. На велосипеде можно ехать вдвоем. Скорость пешехода 5 км/ч, одного велосипедиста 15 км/ч, велосипедиста с пассажиром 10 км/ч. Расстояние между A и B равно 100 км. За какое минимальное время (в часах) они все смогут проделать весь путь?

1 8 **2** 9 **3** 10 **4** 12 **5** 14

302. Города A и B расположены на берегу реки со скоростью течения 2 км/ч. Пароход проходит маршрут ABA за 129 ч. Если скорость парохода в неподвижной воде увеличить в 11 раз, то маршрут ABA займет 11 ч. Первоначальная скорость парохода в неподвижной воде, выраженная в км/ч, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

303. Билл повысил свою производительность труда, в результате чего время выполнения работы сократилось с 49 до 35 дней. Затем он еще раз повысил свою производительность на столько же процентов, в результате чего время выполнения работы сократилось еще на

1 14 дней **2** 8 дней **3** 16 дней **4** 12 дней **5** 10 дней

304. Производительность труда возросла на 75%, поэтому работа была выполнена на 42 дня быстрее. Если после этого производительность увеличится еще на 40%, то работа будет выполнена быстрее еще на

1 18 дней **2** 12 дней **3** 24 дня **4** 15 дней **5** 16 дней

305. Если Билл увеличит производительность своего труда на 90%, а Джек увеличит на 50% по сравнению с планом, то они вместе выполнят всю работу за 70 мин. Если Билл увеличит производительность на 50%, а Джек увеличит на 90% по сравнению с планом, то они выполнят работу за 60 мин. Работая с плановой производительностью, Билл и Джек вместе выполнят работу за время, которое принадлежит промежутку (в минутах)

1 [1; 109) **2** [109; 110) **3** [110; 111) **4** [111; 112)
5 [112; 999]

306. Если Билл увеличит свою производительность труда на 37%, а Джек увеличит свою производительность труда на 61%, то время совместного выполнения ими заданного объема работ уменьшится в $1,57$ раза. Первоначально производительность труда Билла была меньше, чем у Джека, на

1 50% **2** 70% **3** 30% **4** 80% **5** 20%

307. Если Билл увеличит производительность труда на 30%, а Джек увеличит на 40% по сравнению с планом, то они вместе за 30 дней изготовят 936 деталей. Если же Билл увеличит производительность на 160%, а Джек на 60% по сравнению с планом, то они вместе за 20 дней изготовят то же количество деталей. Сколько полных деталей Билл и Джек вместе изготовят за один день, работая с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

308. Плановые производительности Билла и Джека одинаковы. Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек повысит на 20%, то на выполнение всей работы понадобится 81 день. Если же указанное повышение произойдет после истечения половины времени, то на выполнение всей работы понадобится 80 дней. За сколько дней выполнят они работу с плановой производительностью? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

309. Если 1 куб. м газа на 75% дороже 1 кг угля и дает тепла на 25% больше, то при переходе с угля на газ расходы на топливо при прочих равных условиях возрастут на

1 50% **2** 40% **3** 30% **4** 100% **5** 60%

310. Перекупщик купил колбасу с истекшим сроком реализации со скидкой 60% от номинальной цены и продал ее, получив прибыль в размере 30%. С какой скидкой от номинальной цены была продана колбаса?

1 30% **2** 18% **3** 45% **4** 48% **5** 38%

311. Студент купил проездной билет со скидкой 60% от номинальной цены и продал его с прибылью для себя 60%. С какой скидкой от номинальной цены продал студент билет?

1 0% **2** 16% **3** 36% **4** 60% **5** 30%

312. Билл продал партию компьютеров, Джек продал партию принтеров, и их выручка оказалась одинакова. "Если бы принтер стоил столько же, сколько компьютер, я бы выручил 192 млн руб.", — сказал Джек. "Если бы компьютер стоил столько же, сколько принтер, я бы выручил 75 млн руб.", — ответил Билл. На сколько компьютер дороже принтера?

1 на 50% **2** на 60% **3** на 70% **4** на 75% **5** на 80%

313. Функция спроса на коктейль на дискотеке является линейной функцией, причем спрос равен 48 бокалов при цене 14 у.е.и равен 24 бокала при цене 28 у.е.Найдите максимально возможную выручку от продажи коктейлей и укажите остаток от деления полученного натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

314. Функция спроса на новую модель BMW является линейной функцией, причем спрос равен 42 шт. при цене $80,000$ у.е.и равен 7 шт. при цене $180,000$ у.е.Если цена установлена так, чтобы обеспечить максимальную выручку, то количество проданных автомобилей будет равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

315. Функция спроса на новую модель мобильного телефона является линейной функцией, причем спрос равен 2 млн. 800 тыс. шт. при цене 240 у.е.Если увеличить цену на 1 у.е., то спрос уменьшится на 35 тыс. шт. Каково наименьшее число автомобилей, которые потребуются для перевозки всех проданных телефонов при цене 190 у.е., если один автомобиль перевозит 10 тыс. телефонов?

1 370 **2** 480 **3** 560 **4** 455 **5** 540

316. При тех же условиях цена установлена так, чтобы обеспечить максимальную выручку. Сколько мешков потребуется для перевозки выручки, если один мешок вмещает 1 млн у.е.? Укажите остаток от деления числа мешков на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

317. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 100 у.е., процентная ставка составляет 40% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за второй год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

1 40 **2** 80 **3** 48 **4** 56 **5** 72

318. Банк начисляет по вкладу 60% в конце каждого года. Оказалось, что прирост вклада за второй год больше прироста за первый год на 720 у.е. Какова была величина вклада в начале первого года (в у. е.)?

1 3600 **2** 2500 **3** 5000 **4** 2000 **5** 4000

319. Сумма вклада за третий год увеличилась на 162 руб., а за шестой год — на 384 руб. Какова была величина вклада в начале четвертого года, если доход начисляется в конце каждого года хранения вклада и процентная ставка не менялась?

1 676 **2** 716 **3** 632 **4** 512 **5** 648

320. Банк начисляет проценты в конце года и прибавляет их ко вкладу. Доход по вкладу за четвертый год хранения оказался больше дохода за первый год на 37 руб. Доход за второй год хранения оказался больше дохода за первый год на 9 руб. В начале первого года сумма вклада (в рублях) была равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

321. Банк начисляет проценты в конце каждого года и прибавляет их ко вкладу. В начале каждого года Джек покупает Touareg, снимая деньги со своего счета, в результате его вклад растет только на 10% в год. Если Джек будет покупать 3 Touareg в начале года, то его вклад будет ежегодно уменьшаться на 20%. Какую долю от своего вклада приходится снимать Джеку для покупки одного автомобиля?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 10% $\boxed{\mathbf{2}}$ 16% $\boxed{\mathbf{3}}$ 20% $\boxed{\mathbf{4}}$ 12% $\boxed{\mathbf{5}}$ 24%

322. Билл положил 75 у.е. в банк 1 января 2000 года. Доход по вкладу в банке начисляется один раз в год, 31 декабря, и прибавляется к вкладу. Раз в два года, начиная с 2002 года, 1 января Билл снимает со счета 117 у.е. для оплаты аренды. Какова наименьшая годовая процентная ставка, при которой остаток средств на вкладе не будет уменьшаться?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 78% $\boxed{\mathbf{2}}$ 79% $\boxed{\mathbf{3}}$ 40% $\boxed{\mathbf{4}}$ 60% $\boxed{\mathbf{5}}$ 70%

323. В начале первой недели в пруд запустили 7 инфузорий. В конце каждой недели каждая инфузория делится на 2 части, после чего карась съедает 3 инфузории. В начале 31-й недели число инфузорий в пруду будет равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

324. Фермер получил в банке кредит под определенный процент годовых. Через год он вернул в банк 5/8 от суммы полученного кредита, а еще через год он вернул в банк 15/19 от всей суммы, которую он был должен банку к этому времени. В конце третьего года он полностью погасил свою задолженность, вернув $12,1\%$ от суммы полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в этом банке?

325. В начале года Петя положил 1 млн руб. в банк А, который начисляет $0,9\%$ каждые 6 месяцев, а Вася положил 1 млн руб. в банк Б, который начисляет $0,6\%$ каждые 4 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях составит (укажите ближайшее к точному значению целое число рублей)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 54 $\boxed{\mathbf{2}}$ 18 $\boxed{\mathbf{3}}$ 27 $\boxed{\mathbf{4}}$ 36 $\boxed{\mathbf{5}}$ 72

326. Первого января 2001 г. Билл положил 1 млн руб. в сейф и берет из него $1,5\%$ от суммы в сейфе каждые 6 лет, а Джек положил в другой сейф 1 млн руб. и берет из него 1% от суммы в сейфе каждые 4 года. В начале 2013 г. (после выемки денег из обоих сейфов) разница содержимого сейфов в рублях будет равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

327. В начале года Билл положил 100 млн руб в банк А, который начисляет 9% каждые 3 месяца, а Джек положил 400 млн руб в банк Б, который начисляет 12% каждые 4 месяца. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте. В конце года разница их вкладов в рублях будет равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

328. В начале 1977 г. Билл положил 1 млн руб. в пустой сейф. В начале каждого последующего года он вынимает из сейфа $m\%$ имеющихся там рублей. При каком значении m он вынет из сейфа в начале 1982 г. максимальную сумму (инфляция и девальвация не учитываются)?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50 $\boxed{\mathbf{2}}$ 5 $\boxed{\mathbf{3}}$ 20 $\boxed{\mathbf{4}}$ 10 $\boxed{\mathbf{5}}$ 25

329. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 5 лет вклад уменьшается на $3x\,\%$ в год, последующие 7 лет вклад увеличивается на $6x\,\%$ в год, причем величину $x \in [0;\ 30]$ вы можете выбрать сами. При каком значении x через 12 лет прирост вклада будет наибольшим? Укажите верное утверждение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (0;\ 11)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [11;\ 12)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [12;\ 14)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [14;\ 18)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [18;\ 50)$

Ответы

9.6.0.7. Текстовые задачи, 1

174. $\boxed{4}$ **175.** $\boxed{1}$ **176.** $\boxed{4}$ **177.** $\boxed{3}$ **178.** $\boxed{3}$ **179.** $\boxed{4}$ **180.** $\boxed{3}$
181. $\boxed{2}$ **182.** $\boxed{3}$ **183.** $\boxed{1}$ **184.** $\boxed{3}$ **185.** $\boxed{1}$ **186.** $\boxed{1}$ **187.** $\boxed{1}$
188. $\boxed{1}$ **189.** $\boxed{2}$ **190.** $\boxed{3}$ **191.** $\boxed{5}$ **192.** $\boxed{2}$ **193.** $\boxed{1}$ **194.** $\boxed{4}$
195. $\boxed{2}$ **196.** $\boxed{5}$ **197.** $\boxed{4}$ **198.** $\boxed{4}$ **199.** $\boxed{4}$ **200.** $\boxed{4}$ **201.** $\boxed{2}$

202. $\boxed{3}$ **203.** $\boxed{1}$ **204.** $\boxed{4}$ **205.** $\boxed{1}$ **206.** $\boxed{5}$ **207.** $\boxed{3}$ **208.** $\boxed{4}$
209. $\boxed{3}$ **210.** $\boxed{3}$ **211.** $\boxed{2}$ **212.** $\boxed{3}$ **213.** $\boxed{4}$ **214.** $\boxed{3}$ **215.** $\boxed{4}$
216. $\boxed{2}$ **217.** $\boxed{4}$ **218.** $\boxed{1}$ **219.** $\boxed{1}$ **220.** $\boxed{2}$ **221.** $\boxed{4}$ **222.** $\boxed{5}$
223. $\boxed{3}$ **224.** $\boxed{2}$ **225.** $\boxed{4}$ **226.** $\boxed{4}$ **227.** $\boxed{1}$ **228.** $\boxed{3}$ **229.** $\boxed{2}$
230. $\boxed{4}$ **231.** $\boxed{3}$ **232.** $\boxed{3}$ **233.** $\boxed{1}$ **234.** $\boxed{4}$ **235.** $\boxed{5}$ **236.** $\boxed{1}$
237. $\boxed{5}$ **238.** $\boxed{4}$ **239.** $\boxed{3}$ **240.** $\boxed{3}$ **241.** $\boxed{3}$ **242.** $\boxed{1}$ **243.** $\boxed{2}$
244. $\boxed{3}$ **245.** $\boxed{3}$ **246.** ♦ 20%. **247.** $\boxed{2}$ **248.** $\boxed{4}$ **249.** $\boxed{2}$
250. $\boxed{2}$ **251.** $\boxed{4}$

9.6.0.8. Текстовые задачи, 2 **252.** $\boxed{3}$ **253.** $\boxed{5}$ **254.** $\boxed{2}$

255. $\boxed{5}$ **256.** $\boxed{5}$ **257.** $\boxed{5}$ **258.** $\boxed{4}$ **259.** $\boxed{4}$ **260.** $\boxed{3}$ **261.** $\boxed{5}$
262. $\boxed{5}$ **263.** $\boxed{3}$ **264.** $\boxed{1}$ **265.** $\boxed{4}$ **266.** $\boxed{5}$ **267.** $\boxed{4}$ **268.** $\boxed{3}$
269. $\boxed{3}$ **270.** $\boxed{2}$ **271.** $\boxed{1}$ **272.** $\boxed{5}$ **273.** $\boxed{3}$ **274.** $\boxed{2}$ **275.** $\boxed{4}$
276. $\boxed{4}$ **277.** $\boxed{2}$ **278.** $\boxed{5}$ **279.** $\boxed{4}$ **280.** $\boxed{3}$ **281.** $\boxed{2}$ **282.** $\boxed{5}$
283. $\boxed{3}$ **284.** $\boxed{1}$ **285.** $\boxed{5}$ **286.** $\boxed{5}$ **287.** $\boxed{2}$ **288.** $\boxed{2}$ **289.** $\boxed{5}$
290. $\boxed{1}$ **291.** $\boxed{5}$ **292.** $\boxed{4}$ **293.** $\boxed{5}$ **294.** $\boxed{5}$ **295.** $\boxed{5}$ **296.** $\boxed{2}$
297. $\boxed{4}$ **298.** $\boxed{5}$ **299.** $\boxed{5}$ **300.** $\boxed{2}$ **301.** $\boxed{4}$ **302.** $\boxed{3}$ **303.** $\boxed{5}$
304. $\boxed{5}$ **305.** $\boxed{2}$ **306.** $\boxed{4}$ **307.** $\boxed{3}$ **308.** $\boxed{5}$ **309.** $\boxed{2}$ **310.** $\boxed{4}$
311. $\boxed{3}$ **312.** $\boxed{2}$ **313.** $\boxed{1}$ **314.** $\boxed{5}$ **315.** $\boxed{4}$ **316.** $\boxed{1}$ **317.** $\boxed{4}$
318. $\boxed{4}$ **319.** $\boxed{5}$ **320.** $\boxed{1}$ **321.** $\boxed{4}$ **322.** $\boxed{4}$ **323.** $\boxed{4}$ **324.** ♦ 10%.
325. $\boxed{3}$ **326.** $\boxed{4}$ **327.** $\boxed{1}$ **328.** $\boxed{3}$ **329.** $\boxed{3}$