Государственный университет — Высшая школа экономики

А.А.Быков

Решение задач ЕГЭ по математике

Текстовые задачи,
тригонометрия,
показательная и логарифмическая функции

Для учащихся 10-х и 11-х классов

Москва 2009

Содержание

Тема 10. Тригонометрические функции

10.1. Основные свойства

10.1.1. Измерение углов

Теоретические сведения Основополагающим в тригонометрии является понятие длины дуги. Пусть на окружности радиуса R взяты две несовпадающие точки A и B. Предположим, что отправившись от точки A против часовой стрелки (это понятие мы подробно пояснять не будем), мы встретим точку B. Возьмем на дуге AB произвольное число точек C_m, $m \in \{1; 2; \ldots; M\}$, расположенных последовательно по пути от A к B против часовой стрелки. Соединим все эти точки последовательно отрезками и получим ломаную линию $AC_1C_2\ldots C_MB$, про которую говорят, что она вписана в окружность. Пусть $l = |AC_1C_2\ldots C_MB|$ — ее длина. Возьмем произвольное число точек D_n, $n \in \{1; 2; \ldots; N\}$, расположенных вне окружности так, что каждый отрезок $D_{k-1}; D_k$ касается окружности, точки A и B входят в число точек касания, остальные точки касания расположены последовательно по пути от A к B против часовой стрелки. Про ломаную линию $AD_1D_2\ldots D_MB$ говорят, что она описана около окружности. Пусть $L = |AD_1D_2\ldots D_MB|$ — ее длина. В курсе геометрии доказывается теорема о том, что существует единственное число Φ, которое для любой пары вписанной и описанной ломаных удовлетворяет условию $l < \Phi < L$. Это число и называется длиной дуги AB. Длина дуги обладает стандартными свойствами длины. Например, если точки A, B, C расположены последовательно на окружности против часовой стрелки, то $|AB| + |BC| = |AC|$. Если взять две окружности радиусов r и R, на окружности r взять точки A_1 и B_1 так, как это только что было описано, провести радиусы OA_1 и OB_1, продолжить их до пересечения с окружностью R в точках A_2 и B_2, то будет верно равенство $|A_1B_1| : r = |A_2B_2| : R$. Эта величина называется угловой мерой дуги. По традиции, угловая мера дуги обозначается буквами φ, α, β, γ и т.д. Длина дуги окружности радиуса R

с угловой мерой φ равна φR. Длина дуги половины окружности радиуса R равна πR. Длина дуги окружности радиуса R равна $2\pi R$. Угловая мера двух дуг, построенных указанным способом, не зависит от радиуса. Угловая мера половины окружности обозначается символом π. Иногда углы измеряют в градусах. Один градус — это угловая мера дуги, равной $\frac{1}{180}$ части от половины окружности.

330. В окружности радиуса $\frac{2}{\pi}$ длина дуги, содержащей $157°30'$, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $5,3$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ $1,75$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $3,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $2,625$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $1,75$.

Решение. Длина дуги равна $\frac{157,5}{360} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{7}{16} \cdot 4 = \frac{7}{4}$. ■

331. Наименьший из углов, которые составляют часовая и минутная стрелки в 6 часов 20 минут, равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{11}{18}\pi$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{5}{18}\pi$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{7}{18}\pi$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5}{6}\pi$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{7}{15}\pi$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\frac{7}{18}\pi$.

Решение. Естественно предположить, что мы имеем дело со стандартными часами, в которых часовая стрелка делает полный оборот за 12 часов, а минутная — за 1 час. Если измерять время в минутах, а угол в градусах и отсчитывать угол от 12 часов по часовой стрелке, то в момент времени t часовая стрелка находится в точке с угловой мерой $\frac{t}{60 \cdot 12} \cdot 360° = \frac{t}{2}$. Каждые 60 мин. часовая стрелка передвигается на $\frac{360}{12} = 30°$. В момент времени t минутная стрелка находится в точке с угловой мерой $\frac{t}{60} \cdot 360° = t \cdot 6°$. Каждые 60 мин. минутная стрелка передвигается на $360°$. Если угловая мера положения минутной стрелки окажется больше $360°$, то можно вычесть $360°$ один или несколько раз для того, чтобы привести угловую меру к диапазону $0 \leqslant \varphi < 360°$. В указанное время $t = 6 \cdot 60 + 20$ мин. часовая стрелка находится в точке с угловой мерой $\frac{6 \cdot 60 + 20}{2} = 190°$, минутная стрелка находится в точке с угловой мерой $(6 \cdot 60 + 20) \cdot 6° \simeq 120°$ (получается приведением к указанному диапазону, что и отражает символ $\simeq$). Угловая мера кратчайшей дуги, соединяющей две точки, равна $70° = \frac{70}{180}\pi$. ■

10.1.2. Тригонометрический круг, углы, линии синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов

Мы опускаем обширный материал, относящийся к определению и основным свойствам тригонометрических функций. Применение этих основных свойств в тестовых задачах многообразно, например

332. Укажите область определения функции
$(\star)$ $f(x)=\sqrt{(x^2-x-6)\cos 3}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x\in[-2;\,3]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x\in(-\infty;\,-2]\bigcup[3;\,+\infty)$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $x\in(-\infty;\,-3]\bigcup[2;\,+\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x\in[-3;\,2]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x\in(-\infty;\,-\sqrt{-\cos 3}]\bigcup[\sqrt{-\cos 3};\,+\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x\in[-2;\,3]$.

Решение. Функция $(\star)$ определена для всех x, для которых $(\star\star)$ $(x^2-x-6)\cos 3\geqslant 0$. Так как $\cos 3<0$, то $(\star\star)$ равносильно $x^2-x-6\leqslant 0$, $(x+2)(x-3)\leqslant 0$, $x\in[-2;\,3]$. ■

10.1.3. Свойства тригонометрических функций

333. Укажите количество функций из набора
$f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\operatorname{tg} x$, $f_4(x)=\operatorname{ctg} x$, $f_5(x)=\arcsin x$, $f_6(x)=\arccos x$, $f_7(x)=\operatorname{arctg} x$, $f_8(x)=\operatorname{arcctg} x$.,
которые являются строго возрастающими на всей своей области определения.

$\boxed{\mathbf{1}}$ одна $\boxed{\mathbf{2}}$ две $\boxed{\mathbf{3}}$ три $\boxed{\mathbf{4}}$ четыре $\boxed{\mathbf{5}}$ ни одной

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ две

Решение. Перечислим промежутки возрастания для всех указанных функций, **(1)** $[-\frac{\pi}{2}+2\pi m;\,\frac{\pi}{2}+2\pi m]$, **(2)** $[-\pi+2\pi m;\,2\pi m]$, **(3)** $(-\frac{\pi}{2}+\pi m;\,\frac{\pi}{2}+\pi m)$, **(4)** отсутствуют, **(5)** $[-1;\,1]$, **(6)** отсутствуют, **(7)** $(-\infty;\,+\infty)$, **(8)** отсутствуют.
Условию задачи удовлетворяют функции (5) и (7). ■

10.1.4. Графики

334. Нарисуйте графики функций $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\cos x$.
Решение. Решение показано на рис. 9. Так как $\sin(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$, график $f(x)=\sin x$ можно получить из графика $f(x)=\cos x$

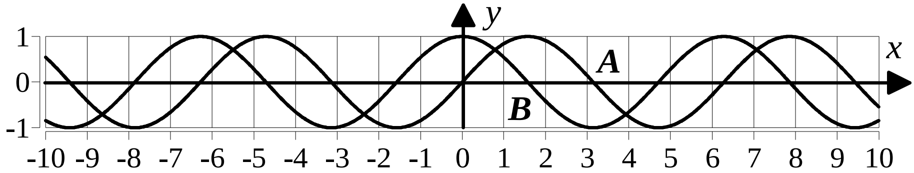


Рис. 9. Графики функций $y = \sin x$ (помечен A) и $y = \cos x$ (помечен B).

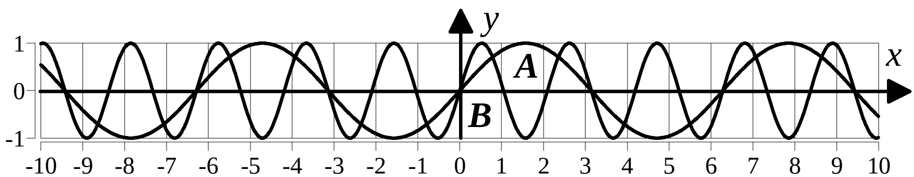


Рис. 10. Графики функций $y = \sin x$ (помечен A) и $y = \sin 3x$ (помечен B).

сдвигом вправо на $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, график $f(x) = \cos x$ можно получить из графика $f(x) = \sin x$ сдвигом влево на $\frac{\pi}{2}$. ■

335. Нарисуйте графики функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \sin 3x$.
Решение. Решение показано на рис. 10. График $f(x) = \sin 3x$ можно получить из графика $f(x) = \sin x$ сжатием в 3 раза вдоль оси x, при котором начало координат остается неподвижным. ■

336. Нарисуйте графики функций $f(x) = \cos^2 x$ и $f(x) = \cos 2x$.

Решение. Решение показано на рис. 11. Так как $\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$, график $f(x) = \cos^2 x$ можно получить из графика $f(x) = \cos 2x$ смещением вверх на 1 и последующим сжатием в 2 раза вдоль оси y, при котором начало координат остается неподвижным. Можно переставить операции, и тогда сначала график $f(x) = \cos 2x$ нужно сжать в 2 раза вдоль оси y, с затем смстить вверх на $\frac{1}{2}$. Порядок применения операций сжатия и параллельного переноса нельзя переставить, не изменив параметры. ■

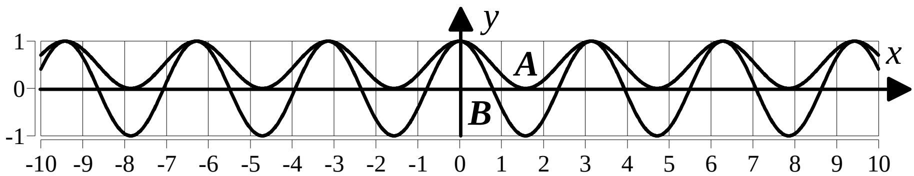


Рис. 11. Графики функций $y = \cos^2 x$ (помечен A) и $y = \cos 2x$ (помечен B).

10.1.5. Вычисление значений основных тригонометрических функций

Приведем таблицу значений $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ для основных углов.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

и уметь использовать периодичность для вычисления значений функций для углов, лежащих вне промежутка $[0; 2\pi]$. Нужно знать те же значения для углов, выраженных в градусах.

337. Значение выражения $\cos \frac{2006}{7}\pi$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sin \frac{\pi}{7}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sin \frac{\pi}{14}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sin \frac{3\pi}{14}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\sin \frac{2\pi}{7}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\sin \frac{\pi}{14}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $-\sin \frac{\pi}{14}$.

Решение. Выделим целое число периодов $\frac{14\pi}{7}$, $\cos \frac{2006}{7}\pi = \cos \frac{1400+560+46}{7}\pi = \cos \frac{46}{7}\pi = \cos \frac{42+4}{7}\pi = \cos \frac{4}{7}\pi = \cos \frac{8}{14}\pi = \sin \frac{7-8}{14}\pi = -\sin \frac{\pi}{14}$. ■

338. Значение выражения $\cos \frac{182}{3}\pi$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0{,}5$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}5$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ -1

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

339. Выражение $\cos 135^\circ \cdot \left(\sqrt{1+\cos 210^\circ} - \sqrt{1-\cos 390^\circ}\right)$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-2\cos 15^\circ$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-2\sin 15^\circ$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\cos 15^\circ$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\sin 15^\circ$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $A = 0$.

Решение. Приведем все углы к диапазону $[0;\quad 45^\circ]$, $\cos 135^\circ \cdot \left(\sqrt{1+\cos 210^\circ} - \sqrt{1-\cos 390^\circ}\right) = -\cos 45^\circ \cdot \left(\sqrt{1-\cos 30^\circ} - \sqrt{1-\cos 30^\circ}\right) = 0$. ■

10.1.6. Египетские синусы и косинусы

340. Если $\cos x = 0{,}6$, то $\sin x$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0{,}8$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}8$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\pm 0{,}8$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0{,}4$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-0{,}4$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\pm 0{,}8$.

Решение. Используем основное тригонометрическое тождество, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x + 0{,}36 = 1$, $\sin^2 x = 0{,}64$. Решим это квадратное уравнение и получим $\sin x = \pm 0{,}8$. ■

341. Если $\sin x = 0{,}6$, то $\operatorname{tg} x$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pm 1,25$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $1,25$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\pm 1,2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-0{,}75$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\pm 0{,}75$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\pm 0{,}75$.

Решение. Аналогично найдем $\cos x = \pm 0{,}8$, $\operatorname{tg} x = \frac{0{,}6}{\pm 0{,}8} = \pm \frac{3}{4}$. ■

342. Если $\sin x = -\frac{5}{13}$ и $\operatorname{tg} x > 0$, то $\sin 2x$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{60}{169}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\frac{120}{169}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{120}{169}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{60}{169}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{12}{13}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\frac{120}{169}$.

Решение. Используем основное тригонометрическое тождество и найдем $\cos x = \pm\frac{12}{13}$. Так как $\operatorname{tg} x > 0$, то знаки $\sin x$ и $\cos x$ совпадают, поэтому $\cos x = -\frac{12}{13}$. Теперь $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}$. ■

343. Укажите все возможные значения величины $\sin\frac{x}{2}$, если x — четвертый по счету положительный корень уравнения $(\star)$ $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0{,}8$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}8$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0{,}6$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-0{,}6$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $-0{,}6$.

Решение. Первый корень уравнения ($\star$) лежит в первой четверти, второй — в третьей, и т.д.,
$x_{2m+1} \in (2\pi m;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m)$, $x_{2m} \in (-\pi + 2\pi m;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m)$, $m \in \mathbf{Z}$, так что $x_4 \in (3\pi;\ \frac{\pi}{2} + 3\pi)$. Следовательно, $\frac{x_4}{2} \in (\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4})$. Таким образом, $\frac{x_4}{2}$ лежит в четвертой четверти и его синус отрицателен. Так как $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, то $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{7^2}{25^2}$, $\cos x = \pm\frac{7}{25}$. Так как x лежит в третьей четверти, то $\cos x = -\frac{7}{25}$. Теперь используем формулу для синуса половинного угла, $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{7}{50}} = \frac{6}{10}$, к тому же $\sin\frac{x}{2} < 0$, так что $\sin\frac{x}{2} = -\frac{6}{10}$. ■

10.1.7. Тригонометрические выражения

344. Функция ($\star$) $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+\sin 2x}$ тождественно равна

$\boxed{1}$ $\frac{\sin 2x}{\cos x+\sin x}$ $\boxed{2}$ $\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$ $\boxed{3}$ $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ $\boxed{4}$ $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ $\boxed{5}$ $\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

Решение. Прибавим к левой и правой частям основного тригонометрического тождества $\cos^2 + \sin^2 = 1$ выражение $2\sin x\cos x = \sin 2x$, получим $\cos^2 + 2\sin x\cos x + \sin^2 = 1 + \sin 2x$, так что $(\cos + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$. Подставим правую часть этого тождества в знаменатель ($\star$), и получим $f(x) = \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}$. Мы имеем право сократить общий сомножитель в числителе и знаменателе, так как при этом ОДЗ не изменится. ■

345. Значение выражения $\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos 4x}}$ при $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ равно

$\boxed{1}$ $\cos x$ $\boxed{2}$ $\sin x$ $\boxed{3}$ $\pm\cos x$ $\boxed{4}$ $\pm\sin x$ $\boxed{5}$ $-\cos x$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\sin x$.

Решение. Используем тождество $0{,}5 + 0{,}5\cos 4x = \cos^2(2x)$. Внутренняя часть заданного нам выражения равна
$\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos 4x} = |\cos(2x)|$.

Так как по условию $x \in \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $2x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, то $\cos(2x) < 0$, следовательно $|\cos(2x)| = -\cos(2x)$, поэтому
$\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos 4x}} = \sqrt{0{,}5 - 0{,}5\cos 2x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$.
При снятии последнего модуля снова использовано условие задачи
$x \in \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$. ■

346. Значение выражения $\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ 0,5 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}5$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ 0.

Решение. $\sin 40^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ + 2\sin 20^\circ = 2\left(\sin 40^\circ \cdot \frac{1}{2} - \cos 40^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sin 20^\circ = 2(\sin 40^\circ \cos 60^\circ - \cos 40^\circ \sin 60^\circ) + 2\sin 20^\circ = 2(-\sin 20^\circ + \sin 20^\circ) = 0$. ■

10.1.8. Сравнение значений тригонометрических функций

347. Сравните $x = \sin(0{,}9) + \sin(1{,}1)$ и $y = 2\sin(1)$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x > y > 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = y$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0 < x < y$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0 > x > y$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x < y < 0$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $0 < x < y$.

Решение. Используем формулу суммы синусов, $x = 2\sin(1) \cdot \cos(0{,}1)$,
$x = y\cos(0{,}1)$. Так как $0 < \cos(0{,}1) < 1$ и $y > 0$, то $0 < x < y$. ■

348. Сравните $x = 100[\cos(1{,}9) - 2\cos(2) + \cos(2{,}1)]$ и $y = -\cos(2)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x > y > 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = y$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0 < x < y$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0 > x > y$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x < y < 0$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $0 < x < y$.

Решение. Используем формулу суммы косинусов, $x = 200\cos(2)[\cos(0{,}1) - 1]$. Используем формулу косинуса двойного угла, $\cos(0{,}1) = 1 - 2\sin^2(0{,}05)$, поэтому $x = -400\cos(2)\sin^2(0{,}05)$, $x = -\cos(2)\left(\frac{\sin\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}}\right)^2$. Так как $0 < \sin(t) < t$ при $x \in (0;\ +\infty)$, то

$0 < \frac{\sin\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}} < 1$. Для бтльшей нагладности обозначим $z = \left(\frac{\sin\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}}\right)^2$, $z \in (0;\, 1)$, тогда $x = y \cdot z$ и $y > 0$. ■

10.2. Множество значений

10.2.1. Линейная и тригонометрическая функции

349. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin x$ на промежутке $x \in (\frac{\pi}{6};\, \frac{2\pi}{3})$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, -\frac{1}{2})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(\frac{1}{2};\, 1]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\, \frac{1}{2}]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, 1]$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $(\frac{1}{2};\, 1]$.

Решение 1. Для решения используем тригонометрический круг (рис. 12a). На окружности отметим точки M, для которой $\varphi = \frac{\pi}{6}$, и N, для которой $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Закрасим "краской" дугу окружности между этими точками, причем сами точки M и N не должны быть закрашены. Представим себе, что краска может течь по плоскости рисунка, если эта плоскость наклоняется в ту или другую сторону. Дадим краске стечь на линию синусов. Для этого наклоним плоскость стола, на котором лежит рисунок, сначала влево, а затем направо. При этом краска сначала закрасит отрезок $(PB]$ на линии синусов, а затем отрезок $[BQ)$. Круглая и квадратная скобки имеют обычное значение. Промежуток $[BQ)$ будет закрашен два раза, и это может быть важно для решения некоторых задач, в которых исследуется количество решений тригонометрических уравнений. Но в данном случае для нас важно только то множество точек на линии синусов, на которое попала краска. Это множество совпадает со множеством значений функции $f(x) = \sin x$ на указанном промежутке. Осталось только вычислить координаты точек P, $y = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, и B, $y = 1$, и сформулировать ответ, $y \in (\frac{1}{2};\ 1]$. Обратим внимание на то, что в конце концов закрашенным оказался полуинтервал $(PB]$. ■

350. Укажите множество значений функции $f(x) = \cos x$ на промежутке $x \in (\frac{\pi}{3};\, \frac{11\pi}{6})$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\, \frac{1}{2})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(\frac{1}{2};\, 1]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, 1]$

Ответ $\boxed{4}$♦ $[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Решение. Для решения используем тригонометрический круг (рис. 12b). На окружности отметим точку M, для которой $\varphi = \frac{\pi}{3}$, и точку N, для которой $\varphi = \frac{11\pi}{6}$. Дадим краске стечь на линию косинусов. Для этого наклоним плоскость стола, на котором лежит рисунок, сначала от себя, а затем на себя. При этом краска закрасит отрезок $[CP)$ на линии синусов, Это множество совпадает со множеством значений функции $f(x) = \cos x$ на указанном промежутке. Координаты точек C, $x = 1$, и P, $x = \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$. ■

351. Укажите множество значений функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $x \in (\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$.

$\boxed{1}$ $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$ $\boxed{2}$ $(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}})$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ \frac{1}{2})$
$\boxed{4}$ $(-\infty;\ -\sqrt{3}) \bigcup (\sqrt{3};\ +\infty)$ $\boxed{5}$ $(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}) \bigcup (\frac{1}{\sqrt{3}});\ +\infty)$

Ответ $\boxed{5}$♦ $y \in (-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}) \bigcup (\frac{1}{\sqrt{3}});\ +\infty)$.

Решение. Для решения используем тригонометрический круг (рис. 12c). На окружности отметим точки M, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, N, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. и закрасим дугу (MN). Дадим краске стечь на линию тангенсов. Следует запомнить, что на линию тангенсов краска стекает по радиусу круга, т.е. как бы притягивается или отталкивается от центра. Русунок не требует пояснений. ■

352. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin^2 x$ на промежутке $x \in (\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3})$.

$\boxed{1}$ $(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4})$ $\boxed{2}$ $(\frac{1}{4};\ 1]$ $\boxed{3}$ $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2})$ $\boxed{4}$ $(0;\ \frac{3}{4}]$ $\boxed{5}$ $[0;\ 1]$

Ответ $\boxed{2}$♦ $y \in (\frac{1}{4};\ 1]$.

Решение 1. Пусть $g(t) = t^2$. Тогда $f(x) = g(\sin x)$. На промежутке
$x \in (\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3})$ имеем $t = \sin x \in (\frac{1}{2};\ 1]$. На промежутке $t \in (\frac{1}{2};\ 1]$ функция $g(t)$ принимает значения $g(t) \in (\frac{1}{4};\ 1]$. ■

Решение 2. Функция $f(x)$ тождественно равна $\frac{1-\cos 2x}{2}$. На промежутке

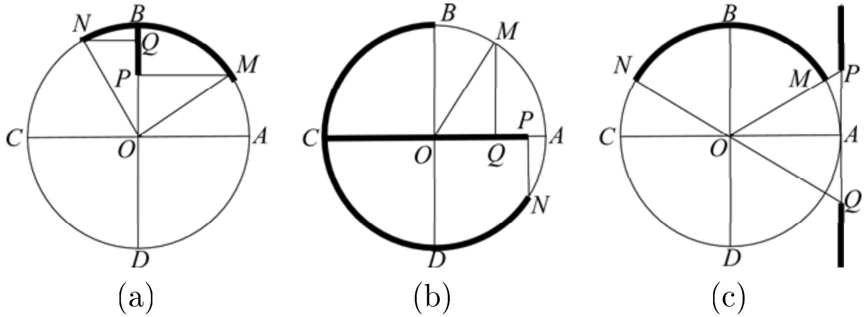


Рис. 12. Множество значений элементарной тригонометрической функции

$x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3})$ величина $2x$ принимает значения $2x \in (\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3})$. Используем метод предыдущей задачи зля того, чтобы определить множество значений $\cos 2x$ на этом промежутке, $\cos 2x \in [-1; \frac{1}{2})$. Используем преобразование сдвига и растяжения, $\frac{1-\cos 2x}{2} \in (\frac{1}{4}; 1]$. ■

10.2.2. Квадратный трехчлен и тригонометрическая функция

353. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin^2 x + \sin x + 1$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[1; 3]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-\frac{1}{4}; 2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1; 2]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[\frac{3}{4}; 3]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[\frac{3}{4}; +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $f(x) \Subset [\frac{3}{4}; 3]$.

Решение. Функция $f(x)$ относится к классу сложных функций. Это не значит, что она длинная или громоздкая, это просто функция от функции, или композиция двух функций. В данном случае $f(x) = g(h(x))$, где $h(x) = \sin x$, $g(t) = t^2 + t + 1$. Множество значений сложной функции всегда исследуется в направлении "изнутри наружу", т.е. сначала следует найти множество значений функции $h(x)$, а затем множество значений $g(t)$, где $t = h(x)$. **(1)** $t = \sin x \Subset [-1; 1]$, **(2)** $g(t) = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Вершина квадратного трехчлена, $t_0 = -\frac{1}{2}$, принадлежит допустимому для переменной t множеству (в дальнейшем будем говорить в таких случаях, что вершина достижима). Поэтому наименьшее значение $g(t)$ равно $g(t_0) = \frac{3}{4}$. Наибольшее значение $g(t)$ достигается в точке, принадлежащей допустимому множеству, которая наиболее удалена от вершины. В даном случае это точка $t = 1$, $g(1) = 3$. Таким образом, $f(x) \Subset [\frac{3}{4}; 3]$. ■

354. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin^2 x + 2\sin x + 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\{2\}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[2;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[6;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $f(x) \Subset [2;\ 6]$.

Решение. Представим $f(x)$ в виде композиции двух функций, $f(x) = g(h(x))$, где $h(x) = \sin x$, $g(t) = t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2$. Вершина квадратного трехчлена $t_0 = -1$ достижима. Поэтому наименьшее значение $g(t)$ равно $g(t_0) = 2$. Наибольшее значение $g(t)$ достигается в точке допустимого множества, которая наиболее удалена от вершины, т.е. в точке $t = 1$, причем $g(1) = 6$. Таким образом, $f(x) \Subset [2;\ 6]$. ■

355. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin^2 x + 4\sin x$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-4;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-4;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-3;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[-3;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $f(x) \Subset [-3;\ 5]$.

Решение. Теперь $h(x) = \sin x$, $g(t) = t^2 + 4t = (t+2)^2 - 4$. Вершина квадратного трехчлена $t_0 = -2$ недостижима. На промежутке $t \in [-1;\ 1]$ функция $g(t)$ монотонна, так что множество значений совпадает с отрезком, концы которого равны значениям $g(t)$ в точках $t = \pm 1$, так что вычисляем $g(-1) = -3$ и $g(1) = 5$. Таким образом, $f(x) \Subset [-3;\ 5]$. ■

10.2.3. Множество значений дробно-линейной тригонометрической функции

Теоретические сведения

1. Если $f(x) \in [a;\ b]$, где $a > 0$, $b > a$, то $\frac{1}{f(x)} \in [b^{-1};\ a^{-1}]$.
2. Если $f(x) \in (0;\ b]$, где b>0, то $\frac{1}{f(x)} \in [b^{-1};\ +\infty)$.

3. Если $f(x) \in [-a;\, b]$, где a>0, b>0, то $\frac{1}{f(x)} \in (-\infty;\, -a^{-1}] \bigcup [b^{-1};\, +\infty)$.

356. Укажите множество значений функции $f(x) = \frac{60}{13+7\sin x}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\, -10] \bigcup [3;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\, 10]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\, 10]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\, 3] \bigcup [10;\, +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $[3;\, 10]$.

Решение. Пусть $f(x) = g(h(x))$, $g(t) = \frac{60}{t}$, $h(x) = 13 + 7\sin x$. На первом этапе найдем множество значений $h(x) \Subset [6;\, 20]$. На втором этапе требуется найти множество значений функции $g(t)$ на промежутке $t \in [6;\, 20]$. В данном случае это несложно. На этом промежутке функция $g(t)$ монотонна, поэтому множество значений совпадает с отрезком, концы которого равны $g(6) = 10$, $g(20) = 3$. При записи ответа концы отрезка следует указать в порядке возрастания. ■

357. Укажите множество значений функции $f(x) = \frac{60}{3\sin x - 3}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-6;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\, -6]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\, -6] \bigcup (0;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-6;\, 0)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\, -6) \bigcup (-6;\, +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $(-\infty;\, -6]$.

Решение. Пусть $f(x) = g(h(x))$, $g(t) = \frac{60}{t}$, $h(x) = 3\sin x - 3$. На первом этапе найдем множество значений $h(x) \Subset [-6;\, 0]$. Обратите внимание на то, что не следует писать ОДЗ. При использовании метода сложной функции ОДЗ учитывается автоматически. Сейчас мы увидим, как это происходит. На втором этапе найдем множество значений функции $g(t)$ на промежутке $t \in [-6;\, 0]$ На промежутке $t \in [-6;\, 0)$ функция $g(t)$ монотонно убывает, в точке $t = 0$ не существует. Поэтому множество значений совпадает с промежутком, один из концов которого равен $g(-6) = -10$. Так как функция убывает при изменении t от -6 до 0, то в ответе получится полупрямая $f(x) \Subset (-\infty;\, -6]$. Для того, чтобы проверить правильность выбора одной полупрямой из двух, целесообразно использовать метод пробной точки. Например, при $t = -3$ получим $g(t) = -20$. ■

358. Укажите множество значений функции $f(x) = \frac{60}{7+13\sin x}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\, -10] \bigcup [3;\, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\, 10]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\, 10]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\, 3] \bigcup [10;\, +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $f(x) \Subset (-\infty;\, -10] \bigcup [3;\, +\infty)$.

Решение. Пусть $f(x) = g(h(x))$, $g(t) = \frac{60}{t}$, $h(x) = 7 + 13\sin x \Subset [-6;\, 20]$. Требуется найти множество значений функции $g(t)$ на промежутке $t \in [-6;\, 20]$. На этом этапе совершается наибольшее количество ошибок. Целесообразно разбить этот промежуток на два, причем недопустимую точку $t = 0$ при этом можно исключить, $t \in [-6;\, 0) \bigcup (0;\, 20]$. На каждом промежутке функция $g(t)$ монотонна, причем $g(t) \in (-\infty;\, -10]$ при $t \in [-6;\, 0)$ и $g(t) \in [3;\, +\infty)$ при $t \in (0;\, 20]$. ■

359. Если $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ и $y \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, то величина $\cos(x-y)$ принадлежит промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\left(\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\left(-\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\left(\frac{1}{2};\, 1\right]$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\left(\frac{1}{2};\, 1\right]$.

10.3. Вычисление периода

360. Наименьший положительный период функции
$f(x) = 9\cos 6x + 6\cos 9x$ равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 54π $\boxed{\mathbf{4}}$ 18π $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{9}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $2\pi/3$.

Решение. Решение этой задачи целесообразно провести в два этапа.
(1) Сначала найдем периоды каждого из слагаемых, $T_1 = \frac{2\pi}{6}$, $T_2 = \frac{2\pi}{9}$. Найдем наименьшее общее кратное этих двух чисел, т.е. наименьшую пару натуральных чисел m и n такую, что $mT_1 = nT_2$, $m\frac{2\pi}{6} = n\frac{2\pi}{9}$, $3m = 2n$, так что $m = 2, n = 3$, $T = \frac{2\pi}{3}$. **(2)** Теперь следует убедиться, что найденное значение T — наименьший из положительных периодов. Для этого заметим, что $f(0) = 15$ и в следующий раз функция примет значение

15 в той точке, где $\begin{cases}\cos 6x = 1,\\ \cos 9x = 1.\end{cases}$ Эту систему насложно решить, $\begin{cases}x = \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbf{Z},\end{cases}$ после чего вновь получим $x = \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

361. Наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{\pi x}{24} + \cos\frac{\pi x}{28}$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $T = 2\cdot 24\cdot 7 = 2\cdot 28\cdot 6$.

Решение. **(1)** $T_1 = 48$, $T_2 = 56$, $48m = 56n$, $6m = 7n$, так что $m = 7, n = 6$, $T = 7\cdot 48 = 6\cdot 56 = \ldots 6$. **(2)** Заметим, что $f(0) = 2$ и в следующий раз функция примет значение 2 в той точке, где $\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{24} = 1,\\ \cos\frac{\pi x}{28} = 1,\end{cases}$ $x = 48m, m \in \mathbf{Z}$, $x = 56n, n \in \mathbf{Z}$, после чего $x = 336k$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

10.4. Тригонометрические преобразования

10.4.1. Выражения с модулем

Напомним, что тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Мы предполагаем, что Вы в совершенстве знаете основные тригонометрические тождества $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ и т.д. Обратим внимание на то, что для тождеств, включающих $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; знаменатель которых может обращаться в нуль; включающих выражения с корнями и т.д., необходимо уметь указать область определения.

362. Выражение $|\cos x|\cdot\sin x - |\sin x|\cdot\cos x$, при $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sin 2x$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\sin 2x$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0{,}5\sin 2x$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-0{,}5\sin 2x$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\sin 2x$.

Решение. При $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ имеем
$\cos x > 0$, $|\cos x| = \cos x$,

$\sin x < 0$, $|\sin x| = -\sin x$,
$|\cos x|\cdot\sin x-|\sin x|\cdot\cos x = \cos x\cdot\sin x+\sin x\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$. ■

10.4.2. Симметрические выражения

Теоретические сведения Если $x+\frac{1}{x}=a$, то $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$ и т.д.
Если $x-\frac{1}{x}=b$, то $x^2+\frac{1}{x^2}=b^2+2$, $x^3-\frac{1}{x^3}=b^3+3b$ и т.д.
Заметим, что равенство $x+\frac{1}{x}=a$ возможно только при условии $a\in(-\infty;\,-2]\bigcup[2;\,+\infty)$.
Эти простые теоремы широко применяются в тригонометрии, обычно $x=\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{1}{x}=\operatorname{ctg}\alpha$.

363. Если $\operatorname{tg}(\pi-x)+\operatorname{ctg}x=5$, то выражение $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x$ равно
$\boxed{1}$ 29 $\boxed{2}$ 21 $\boxed{3}$ 23 $\boxed{4}$ 25 $\boxed{5}$ 27

Ответ $\boxed{5}$♦ 27.

Решение. Из условия задачи и формул приведения следует, что $-\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=5$, $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-2=25$, $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=27$. ■

364. Если $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=1$, то значение выражения $\operatorname{tg}^3x-\operatorname{ctg}^3x$ равно
♦ 4.
Решение. Из условия задачи следует, что
$\operatorname{tg}^3x-\operatorname{ctg}^3x-3\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)=2$, $\operatorname{tg}^3x-\operatorname{ctg}^3x=1+3\cdot1=4$. ■

10.4.3. Однородные выражения

Следующие задачи этого раздела можно отнести к главе "уравнения", причем "заказанная" форма ответа несколько необычна для уравнений. Мы отнесли задачи указанного вида к разделу "преобразования"потому, что решать уравнение, указанное в условии задачи, не следует, ответ можно быстрее получить, не решая его.

365. Если $(\star)$ $\frac{\cos x-3\sin x}{2\cos x-\sin x}=2$, то величина $\operatorname{ctg}x$ равна
$\boxed{1}$ -3 $\boxed{2}$ $-0,(3)$ $\boxed{3}$ $0,(3)$ $\boxed{4}$ 3 $\boxed{5}$ 1

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}\blacklozenge$ $-0,(3)$.

Решение. Из условия следует, что $\sin x \neq 0$. Поэтому числитель и знаменатель левой части $(\star)$ можно разделить на $\sin x$, после чего получится равносильное уравнение $\frac{\operatorname{ctg} x-3}{2\operatorname{ctg} x-1}=2$, $\frac{\operatorname{ctg} x-3-4\operatorname{ctg} x+2}{2\operatorname{ctg} x-1}=0$, $\begin{cases}-3\operatorname{ctg} x-1=0,\\ 2\operatorname{ctg} x-1\neq 0,\end{cases}$ $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{3}$. ■

10.4.4. Формулы приведения

366. Выражение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}(x-\pi)-\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ $2\sin x$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-2\sin x$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\cos x$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-2\cos x$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}\blacklozenge$ 0.

Решение. Так как $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, $\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x$, $\cos\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$, то заданнное выражение на указанном множестве тождественно равно нулю. ■

367. Значение выражения $\operatorname{ctg}3^\circ\cdot\operatorname{ctg}6^\circ\cdot\operatorname{ctg}45^\circ\cdot\operatorname{ctg}84^\circ\cdot\operatorname{ctg}87^\circ$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ -1

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}\blacklozenge$ 1.

10.4.5. Формулы двойного и половинного угла

368. Выражение $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}\blacklozenge$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

369. Выражение $\log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 $\boxed{\mathbf{5}}$ -2

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}\blacklozenge$ -1.

Решение. $\log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})\right) = \log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \log_{\sqrt{2}}\left((\sqrt{2})^{-1}\right) = -1.$ ■

370. Если ($\star$) $\cos x + \sin x = 0{,}3$, то значение $\sin 2x$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-0{,}91$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0{,}82$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-0{,}18$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0{,}455$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-0{,}455$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $-0{,}91$.

Решение. Возведем в квадрат равенство ($\star$), $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 0{,}09$. Используем основное тригонометрическое тождество и формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получится $1 + \sin 2x = 0{,}09$. ■

371. Укажите все возможные значения выражения ($\star$) $\cos x + \sin x$, если $\sin 2x = -0{,}91$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-0{,}09$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $0{,}09$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\pm0{,}3$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0{,}3$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-0{,}3$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $\pm0{,}3$.

Решение. Пусть ($\star$) $\sin 2x = p$, $p \in (-1; 1)$, и ($\star\star$) $y = \cos x + \sin x$. Возведем в квадрат равенство ($\star\star$), $y^2 = \cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 1 + p$, причем $1 + p \in (0; 2)$. Поэтому $y = \pm\sqrt{1+p}$. Это равенство является следствием ($\star$), необходимо исследовать вопрос о том, какой знак может иметь y. Для этого решим уравнение ($\star$), и запишем ответ в виде двух серий, $x = \pi m + \frac{1}{2}\arcsin p$, $x = \pi m + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin p, m \in \mathbf{Z}$. Теперь вычислим y. В обоих случаях получим $\cos x + \sin x = (-1)^m\left(\cos(\frac{1}{2}\arcsin p) + \sin(\frac{1}{2}\arcsin p)\right)$. Поэтому возможны оба знака y. ■

372. Вычислите $\cos 2x$, если $\sin x = 0{,}8$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

♦ $-\frac{7}{25}$.

Решение. Если $\sin x = 0{,}8$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\cos x = -0{,}6$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}36 - 0{,}64 = -0{,}28$. ■

373. Вычислите $\cos 2x$, если $2\operatorname{ctg}^2 x + 7\operatorname{ctg} x + 3 = 0$ и $x \in \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$.

♦ $0{,}8$.

Решение. Если $2\operatorname{ctg}^2 x + 7\operatorname{ctg} x + 3 = 0$, то $\operatorname{ctg} x = \frac{-7\pm\sqrt{49-28}}{4} = \frac{-7\pm5}{4} \in \{-3; -\frac{1}{2}\}$.

Так как $x \in \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < -1$, поэтому $\operatorname{ctg} x = -3$, $\sin x < 0$, $\cos x > 0$. Используем тождество $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{1}{10}$, $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{4}{5}$. ■

10.4.6. Вычисление тригонометрических функций углов, кратных $15°$

Углы, кратные $15°$

374. Величина $\cos 15°$ равна

$\boxed{1}$ $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{3}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{4}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{5}$ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

Ответ $\boxed{1}$♦ $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Решение. $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. ■

375. Величина $\sin 15°$ равна

$\boxed{1}$ $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{3}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{4}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{5}$ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Решение. $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. ■

Углы, кратные $18°$

376. Вычислите $\sin 18°$

♦ $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Решение. Пусть $x = 18°$. Тогда $\cos 2x = \sin 3x$, $1 - 2\sin^2 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$, поэтому $\sin x$ удовлетворяет кубическому уравнению $4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$, $4z^3 - 2z^2 - 3z + 1 = 0$, это уравнение имеет очевидный корень $z = 1$. Выполняя деление на $z - 1$, получим квадратное уравнение. Выбор нужного корня проделайте самостоятельно. ■

10.4.7. Преобразование произведения в сумму

377. Выражение $\cos^2 x - \sin(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \cos(x - \frac{\pi}{6})$ равно

$\boxed{1}$ $\cos 2x$ $\boxed{2}$ $-\cos 2x$ $\boxed{3}$ 0,5 $\boxed{4}$ $-0{,}5$ $\boxed{5}$ 0,25

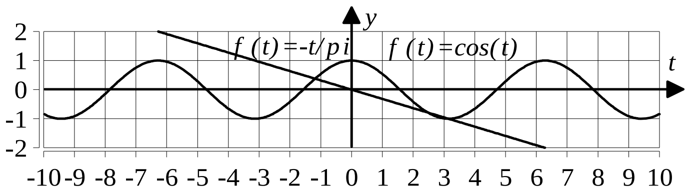


Рис. 13. Графики функций $f(t) = \cos t$, $g(t) = -\frac{t}{\pi}$.

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ 0,25.

Решение. $\cos^2 x - \sin(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos^2 x - \frac{1}{2}\Big[\sin\Big(\frac{\pi}{3} - x + x - \frac{\pi}{6}\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{3} - x - x + \frac{\pi}{6}\Big)\Big] = \cos^2 x - \frac{1}{2}\Big[\sin\frac{\pi}{6} + \sin\Big(\frac{\pi}{2} - 2x\Big)\Big] = \cos^2 x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x = \cos^2 x - \frac{1}{4} - \cos^2 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. ■

378. Число корней уравнения $\sin(x - \frac{\pi}{8}) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{x}{\pi} + (\sqrt{2})^{-3}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 3.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, $\sin\Big(x - \frac{\pi}{8}\Big) \cdot \sin\Big(x + \frac{\pi}{8}\Big) = \frac{1}{2}\Big[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 2x\Big] = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cos 2x$, поэтому уравнение $(\star)$ равносильно $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2}\cos 2x = \frac{x}{\pi}$, $\cos 2x = -\frac{2x}{\pi}$, $\cos t = -\frac{t}{\pi}$, рис. 13. Обратите внимание на то, что уравнение имеет корень $t = \pi$ и еще один корень $t \in (\frac{\pi}{2};\ \pi)$. ■

10.4.8. Тригонометрическая прогрессия

379. Значение выражения $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{8}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{3}{8}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{5}{8}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{1}{8}$.

Решение. Пусть $(\star)$ $x = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$. Умножим обе части $(\star)$ на $2^3 \sin 20^\circ$, и получим уравнение $x \cdot 2^3 \sin 20^\circ = 2^3 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$. Три раза используем формулу синуса двойного угла, и получим $x \cdot 2^3 \sin 20^\circ = \sin 160^\circ$. Заметим, что $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$, поэтому $x \cdot 2^3 \sin 20^\circ = \sin 20^\circ$, $x \cdot 2^3 = 1$, $x = 2^{-3}$. ■

380. Значение выражения $4\cos\frac{\pi}{33} \cdot \cos\frac{2\pi}{33} \cdot \cos\frac{4\pi}{33} \cdot \cos\frac{8\pi}{33} \cdot \cos\frac{16\pi}{33}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{8}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\frac{1}{8}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $0,125$.

Решение. Пусть $(\star)$ $x = 4\cos\frac{\pi}{33} \cdot \cos\frac{2\pi}{33} \cdot \cos\frac{4\pi}{33} \cdot \cos\frac{8\pi}{33} \cdot \cos\frac{16\pi}{33}$.
Умножим обе части $(\star)$ на $2^5 \sin\frac{\pi}{33}$, и получим уравнение
$x \cdot 2^3 \sin\frac{\pi}{33} = 2^5 \sin\frac{\pi}{33} \cos\frac{\pi}{33} \cdot \cos\frac{2\pi}{33} \cdot \cos\frac{4\pi}{33} \cdot \cos\frac{8\pi}{33} \cdot \cos\frac{16\pi}{33}$.
Пять раз используем формулу синуса двойного угла, и получим
$x \cdot 2^3 \sin\frac{\pi}{33} = \sin\frac{32\pi}{33}$.
Заметим, что $\sin\frac{32\pi}{33} = \sin\frac{\pi}{33}$, поэтому $x \cdot 2^3 = 1$, $x = 2^{-3}$. ■

381. Значение выражения $4\cos\frac{\pi}{31} \cdot \cos\frac{2\pi}{31} \cdot \cos\frac{4\pi}{31} \cdot \cos\frac{8\pi}{31} \cdot \cos\frac{16\pi}{31}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{1}{8}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{1}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\frac{1}{8}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $-0,125$.

Решение. Пусть $(\star)$ $x = 4\cos\frac{\pi}{31} \cdot \cos\frac{2\pi}{31} \cdot \cos\frac{4\pi}{31} \cdot \cos\frac{8\pi}{31} \cdot \cos\frac{16\pi}{31}$.
Умножим обе части $(\star)$ на $2^5 \sin\frac{\pi}{31}$, и получим уравнение
$x \cdot 2^3 \sin\frac{\pi}{31} = 2^5 \sin\frac{\pi}{31} \cos\frac{\pi}{31} \cdot \cos\frac{2\pi}{31} \cdot \cos\frac{4\pi}{31} \cdot \cos\frac{8\pi}{31} \cdot \cos\frac{16\pi}{31}$.
Пять раз используем формулу синуса двойного угла, и получим
$x \cdot 2^3 \sin\frac{\pi}{31} = \sin\frac{32\pi}{31}$.
Заметим, что $\sin\frac{32\pi}{31} = -\sin\frac{\pi}{31}$, поэтому $x \cdot 2^3 = -1$, $x = -2^{-3}$. ■

10.4.9. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

382. Значение выражения $\frac{\cos 20^\circ + 2\cos 100^\circ}{2\sin 20^\circ}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 2 $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $0{,}5$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\frac{\cos 20^\circ + 2\cos 100^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{(\cos 20^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 100^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{2\cos 60^\circ \cos 40^\circ + \cos 100^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 100^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{2\cos 70^\circ \cos 30^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
■

10.4.10. Формулы вспомогательного угла

Теоретические сведения Пусть $f(x) = a\cos x + b\sin x$, где $a^2+b^2>0$. Найдем угол $\varphi \in [0;\,2\pi)$ такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если рассматривать эти два соотношения как систему уравнений с одной неизвестной величиной φ, то эта система будет иметь единственное решение на указанном промежутке. Тогда можно преобразовать заданную функцию к виду $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\varphi)$. Таким образом, это гармоническая функция с амплитудой $A = \sqrt{a^2+b^2}$ и сдвигом фазы φ.
Написать единую формулу для φ не удается, придется рассматривать два случая.
(1) $b \geqslant 0$. Тогда требуемое решение можно записать в виде $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
(2) $b<0$. Решение можно записать в виде $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Можно аналогичные формулы зписать с использованием $\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Сделайте это самостоятельно.
Найдем угол $\beta \in [0;\,2\pi)$ такой, что $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Тогда $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\beta)$.
Множество значений функции $f(x)$ совпадает с промежутком $[-\sqrt{a^2+b^2};\,\sqrt{a^2+b^2}]$. Функция $f(x)$ достигает наибольшее значение в точках $\varphi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, и достигает наименьшее значение в точках $\varphi+\pi+2\pi n$.

383. Укажите множество значений функции $f(x) = \cos x + \sin x$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\,1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-2;\,2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-\sqrt{3};\,\sqrt{3}]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-\sin 1-\cos 1;\,\sin 1+\cos 1]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-\sqrt{2};\,\sqrt{2}]$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $[-\sqrt{2};\,\sqrt{2}]$.

Решение. $f(x) = \sqrt{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\big) = \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\big) = \sqrt{2}\cos\big(x-\frac{\pi}{4}\big)$. Следовательно, $f(x)$ получается из $\cos x$ сдвигом вправо на $\frac{\pi}{4}$ (при этом ее множество значений не меняется) и растяжением вдоль оси y в $\sqrt{2}$ раз. ■

384. Укажите множество значений функции $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-7;\ 7]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-5;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-5\sqrt{2};\ 5\sqrt{2}]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-3\sin 2 - 4\cos 2;\ 3\sin 2 + 4\cos 2]$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $[-5;\ 5]$.

Решение 1. Вынесем за скобку величину $\sqrt{3^2+4^2}$, и для единообразия переставим слагаемые так, чтобы сначала шел косинус, $(\star)$ $f(x) = 5\big(-\frac{4}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\big)$.
Найдем угол φ, для которого выполнеы три условия, **(1)** $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$, **(2)** $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, и **(3)** $\varphi \in [0;\ 2\pi)$. Эти условия определяют единственный угол $\varphi = \pi - \arcsin\frac{3}{5}$. В данном случае для вычисления φ проще всего решить уравнение $(\star\star)$ $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. На промежутке $\varphi \in [0;\ 2\pi)$ уравнение $(\star\star)$ имеет два корня, $\varphi_1 = \arcsin\frac{3}{5}$ и $\varphi_2 = \pi - \arcsin\frac{3}{5}$, причем φ_1 лежит в первой четверти и $\cos\varphi_1 > 0$, φ_2 лежит во второй четверти и $\cos\varphi_2 < 0$, так что выбрать нужно значение φ_2. Теперь запишем функцию $(\star)$ в виде $f(x) = 5\big(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi\big)$, и используем формулу косинуса суммы, Следовательно, $f(x)$ получается из $\cos x$ сдвигом вправо на φ (при этом ее множество значений не меняется) и растяжением вдоль оси y в 5 раз. При этом ее наименьшее и наибольшее значения умножаются на 5. Одновременно мы нашли точку, в которой $f(x)$ достигает наибольшего значения, это точка $x = \varphi$. Своего наименьшего значения функция $f(x)$ достигает в точке $\varphi = 2\pi - \arcsin\frac{3}{5}$. ■

Решение 2. Функцию $f(x)$ можно записать также в виде $f(x) = 5\sin(x-\beta)$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\beta \in [0;\ 2\pi)$, так что $\beta = \arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5}$. ■

385. Пусть t — наименьшее положительное значение переменной x, при котором функция $f(x) = 5\cos x - 12\sin x$ принимает свое наибольшее значение. Укажите верное утверждение.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $t \in (0;\ \pi)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $t \in [\pi;\ \frac{5\pi}{4})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $t \in [\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $t \in [\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $t \in [\frac{7\pi}{4};\ 2\pi)$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $t = 2\pi - \arcsin\frac{12}{13} = 2\pi - \arccos\frac{5}{13}$.

Решение 1. Совершенно аналогично получим $f(x) = 13\cos(x - \varphi)$,
$\varphi = 2\pi - \arcsin\frac{12}{13}$. Точка максимума $t = 2\pi - \arcsin\frac{12}{13} \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4})$. ■

386. Укажите множество значений функции $f(x) = 12\sin 2x - 5\cos 2x$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-13\sqrt{2};\ 13\sqrt{2}]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-13;\ 13]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-12;\ 12]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-24;\ 24]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-17;\ 17]$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $[-13;\ 13]$.

Решение. График функции $f(x)$ получается из графика $g(x) = 12\sin x - 5\cos x$ сжатием в 2 раза вдоль оси x, при этом множество значений не меняется. Для функции $g(x)$ множество значений вычисляем по стандартной формуле, $g(x) \in [-\sqrt{12^2+5^2};\ \sqrt{12^2+5^2}]$. ■

387. Укажите множество значений функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4+\sqrt{7}\cos x+\sqrt{5}\sin x}}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[4-\sqrt{7};\ 4+\sqrt{7}]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ 1-\sqrt{3}] \bigcup [\sqrt{3}+1;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $[1-\sqrt{3};\ \sqrt{3}+1]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[2\sqrt{3}-2;\ 2\sqrt{3}+2]$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $[\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1]$.

Решение. Функцию $f(x)$ удобно интерпретировать как сложную функцию. Начнем исследование изнутри.
(1) Выделим под корнем в знаменателе два слагаемых, содержащих тригонометрические функции. Получится однородная функция первой степени $h(x) = \sqrt{7}\cos x + \sqrt{5}\sin x$. Вычислим в соответствии с методом вспомогательного угла величину амплитуды $A = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{3}$, величина сдвига фазы нас в данной задаче не интересует, и найдем множество значений, $h(x) \in [-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}]$.
(2) Теперь добавим под корнем в знаменателе оставшееся слагаемое,
$z(x) = 4 + h(x) = 4 + \sqrt{7}\cos x + \sqrt{5}\sin x$, $z(x) \in [4-2\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3}]$.
(3) Следующий этап — извлечение квадратного корня в знаменателе. Заметим, что для всех значений x будет $z(x) > 0$. Поэтому

множество значений функции $\sqrt{z(x)} \in [\sqrt{4-2\sqrt{3}};\ \sqrt{4+2\sqrt{3}}]$. Извлечем корни из иррациональных выражений (см. главу 5), $\left[\sqrt{4-2\sqrt{3}};\ \sqrt{4+2\sqrt{3}}\,\right] = [\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1]$,
(4) Теперь необходимо применить функцию $g(t) = \frac{1}{t}$ к каждой точке множества $t \in [\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1]$, полученного на предыдущем этапе. Мы уже выяснили, что структура множества значений зависит от того, принадлежит ли точка $t = 0$ множеству, на котором находится значение t. В данном случае это не так, все значения t находятся на числовой оси правее начала координат. Поэтому $\frac{2}{\sqrt{4+\sqrt{7}\cos x+\sqrt{5}\sin x}} \in [\frac{2}{\sqrt{3}+1};\ \frac{2}{\sqrt{3}-1}]$. Ибавимся от иррациональности в знаменателе, и получим ответ, $f(x) \in [\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1]$. ■

10.4.11. Симметрические функции

388. Найдите множество значений функции $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[\frac{1}{2};\ 1]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[\frac{1}{4};\ 1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[\frac{1}{8};\ 1]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $f(x) \in [-1;\ 1]$.

Решение. Заметим, что $f(x) = \cos 2x \in [-1;\ 1]$. ■

389. Функция $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ тождественно равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 2x$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\cos 2x$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$. ■

390. Функция $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ тождественно равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 2x$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\cos 2x$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. ■

391. Функция $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ тождественно равна
$\boxed{1}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ $\boxed{2}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ $\boxed{3}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 2x$ $\boxed{4}$ $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x$
$\boxed{5}$ $\cos 2x$

Ответ $\boxed{2}$♦ $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

Решение. Заметим, что $\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} - \frac{\sin^2 2x}{4} = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$ $= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$. ■

392. Найдите множество значений функции $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.
$\boxed{1}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[0;\ 1]$ $\boxed{3}$ $[\frac{1}{2};\ 1]$ $\boxed{4}$ $[\frac{1}{4};\ 1]$ $\boxed{5}$ $[\frac{1}{8};\ 1]$

Ответ $\boxed{3}$♦ $f(x) \in [\frac{1}{2};\ 1]$.

Решение. Используем тождество $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, $\cos 4x \in [-1;\ 1]$, $\frac{1}{4}\cos 4x \in [-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}]$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \in [\frac{3}{4} - \frac{1}{4};\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}]$. ■

393. Найдите множество значений функции $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$.
$\boxed{1}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[0;\ 1]$ $\boxed{3}$ $[\frac{1}{2};\ 1]$ $\boxed{4}$ $[\frac{1}{4};\ 1]$ $\boxed{5}$ $[\frac{1}{8};\ 1]$

Ответ $\boxed{4}$♦ $f(x) \in [\frac{1}{4};\ 1]$.

Решение. Используем тождество $f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$, $\cos 4x \in [-1;\ 1]$, $\frac{3}{8}\cos 4x \in [-\frac{3}{8};\ \frac{3}{8}]$, $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \in [\frac{5}{8} - \frac{3}{8};\ \frac{5}{8} + \frac{3}{8}]$. ■

394. Найдите множество значений функции $f(x) = \cos^8 x + \sin^8 x$.
$\boxed{1}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[0;\ 1]$ $\boxed{3}$ $[\frac{1}{2};\ 1]$ $\boxed{4}$ $[\frac{1}{4};\ 1]$ $\boxed{5}$ $[\frac{1}{8};\ 1]$

Ответ $\boxed{5}$♦ $f(x) \in [\frac{1}{8};\ 1]$.

Решение 1. Возведем в квадрат тождество $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$,
$(\cos^4 x + \sin^4 x)^2 = (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)^2$.
После приведения подобных получим
$\cos^8 x + \sin^8 x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$.
Пусть $t = \sin^2 2x \in [0;\ 1]$. Тогда $\cos^8 x + \sin^8 x = 1 - t + \frac{1}{8}t^2$.
Исследование множества значений квадратного трехчлена на промежутке проводится стандартным методом,
$\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{t^2-8t+8}{8} = \frac{(t-4)^2-8}{8} \in [\frac{1}{8};\ 1]$. ■

Решение 2. Вычислим производную $f'(x) = -8\cos^7 x \sin x + 8\sin^7 x \cos x$,
$f'(x) = -8\sin x\cos x(\cos^6 x - \sin^6 x)$,
$f'(x) = -4\sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x)$,
$f'(x) = -4\sin 2x\cos 2x(\cos^4 x + \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x)$,
$f'(x) = -2\sin 4x(\cos^4 x + \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x)$.
В скобках стоит положительная величина, поэтому знак f' совпадает со знаком функции $g(x) = -2\sin 4x$. Заметим, что $g(x) < 0$ при
$x \in (\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2})$, и $g(x) > 0$ при $x \in (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}), n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, точки локального максимума $f(x)$ — это точки $\frac{\pi n}{2}$, точки локального минимума $f(x)$ — это точки $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Остается вычислить значения $f(x)$ в этих точках. Сделайте это самостоятельно. ■

395. Значение выражения $\left(\sin\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть $x = \frac{3\pi}{8}$. Тогда $\left(\sin\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \left(\sin\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x = 1 + \sin\frac{3\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

396. Значение выражения $\sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{5}{8}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{7}{8}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\frac{7}{8}$.

Решение. Пусть $x = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$. Тогда
$\sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{8}$. ■

397. Выражение $\sin^6\frac{\pi}{8} + \cos^6\frac{7\pi}{8}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $-\frac{13}{16}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{5}{8}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{5}{8}$.

Решение. Пусть $x = \frac{\pi}{8}$. Тогда
$\sin^6 \frac{\pi}{8} + \cos^6 \frac{7\pi}{8} = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{3}{8}$. ■

398. Число, равное разности наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x$, принадлежит промежутку

$\boxed{1}$ $[0;\ 0,125)$ $\boxed{2}$ $[0,125;\ 0{,}25)$ $\boxed{3}$ $[0{,}25;\ 0,375)$ $\boxed{4}$ $[0,375;\ 0{,}5)$
$\boxed{5}$ $[0{,}5;\ 1]$

Ответ $\boxed{1}$♦ $y_{max} - y_{min} = 0$, указанная функция тождественно равна 1.

Решение. Так как $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$, то
$f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1$. Функция $f(x)$ равна константе, поэтому ее наименьшее и наиболшее значения совпадают. ■

10.5. Задачи для самостоятельного решения

10.5.0.1. Свойства тригонометрических функций, 1

399. Значение выражения $\cos \frac{2006}{9}\pi$ равно

$\boxed{1}$ $\sin\frac{\pi}{9}$ $\boxed{2}$ $\sin\frac{3\pi}{9}$ $\boxed{3}$ $-\sin\frac{7\pi}{18}$ $\boxed{4}$ $-\sin\frac{5\pi}{18}$ $\boxed{5}$ $-\sin\frac{3\pi}{18}$

400. Значение выражения $\sqrt{0{,}5 - 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos x}}$ при $x \in (4\pi; 5\pi)$ равно

401. Если $\mathrm{ctg}(\pi - x) + \mathrm{ctg}(\pi/2 - x) = 3$, то выражение $\mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{ctg}^3\, x$ равно

$\boxed{1}$ 27 $\boxed{2}$ 18 $\boxed{3}$ 42 $\boxed{4}$ 36 $\boxed{5}$ 30

402. Выражение $\mathrm{tg}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin(x - \pi) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ равно

$\boxed{1}$ $-\sin x \cdot \cos x$ $\boxed{2}$ $\sin x \cdot \cos x$ $\boxed{3}$ $-\sin^2 x$ $\boxed{4}$ $-\cos^2 x$ $\boxed{5}$ $-\sin^2 x$

403. Выражение $\frac{\sin 4{,}1\pi \cdot \mathrm{ctg}\, 1{,}6\pi \cdot \mathrm{ctg}\, 0{,}9\pi}{\sin 0{,}1\pi}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ -2 $\boxed{5}$ 0,5

404. Значение выражения $||\sin 44^\circ - \operatorname{tg} 44^\circ| - |\operatorname{ctg} 46^\circ - \cos 46^\circ||$ равно

$\boxed{1}$ 0 $\boxed{2}$ $2\sin 44^\circ$ $\boxed{3}$ $-2\cos 46^\circ$ $\boxed{4}$ $2\operatorname{tg} 44^\circ$ $\boxed{5}$ $2\operatorname{ctg} 44^\circ$

405. Вычислите $\cos 195^\circ$.

$\boxed{1}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{3}$ $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{4}$ $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{5}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

406. Все корни уравнения $\sin(\frac{\pi}{3}-x)\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ определяются формулой ($n \in \mathbf{Z}$):

$\boxed{1}$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$\boxed{4}$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{5}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$

407. Значение выражения $\frac{\cos 35^\circ + 2\cos 85^\circ}{\sqrt{3}\cos 55^\circ}$ равно

$\boxed{1}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{2}$ 1 $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{5}$ 0,5

408. Если $\operatorname{tg} x \cdot |\cos x| + |\operatorname{ctg} x| \cdot \sin x = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, то величина x принадлежит

$\boxed{1}$ 1-й четверти $\boxed{2}$ 2-й четверти $\boxed{3}$ 3-й четверти
$\boxed{4}$ 4-й четверти $\boxed{5}$ 1-й или 2-й четверти

409. Вычислите $\cos\frac{x}{2}$, если $\cos x = -0{,}6$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right)$.

410. Укажите область определения функции
$y = \sqrt{(\operatorname{ctg} 42^\circ - x)(x - \sin 42^\circ)}$.

$\boxed{1}$ $[\sin 42^\circ;\ \operatorname{ctg} 48^\circ]$ $\boxed{2}$ $[\cos 48^\circ;\ \operatorname{ctg} 42^\circ]$
$\boxed{3}$ $(-\infty;\ \sin 42^\circ] \bigcup [\operatorname{ctg} 48^\circ;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $[\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 42^\circ]$
$\boxed{5}$ $[\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 48^\circ]$

411. Сравните $x = \sin(4{,}9) + \sin(5{,}1)$ и $y = 2\sin(5)$.

$\boxed{1}$ $x > y > 0$ $\boxed{2}$ $x = y$ $\boxed{3}$ $0 < x < y$ $\boxed{4}$ $0 > x > y$ $\boxed{5}$ $x < y < 0$

412. Сравните $x = 25[\cos(4{,}2) - 2\cos(4) + \cos(3{,}8)]$ и $y = -\cos(4)$.

$\boxed{1}$ $x > y > 0$ $\boxed{2}$ $x = y$ $\boxed{3}$ $0 < x < y$ $\boxed{4}$ $0 > x > y$ $\boxed{5}$ $x < y < 0$

413. Выражение $\cos^6\frac{9\pi}{8} - \sin^6\frac{\pi}{8}$ равно

$\boxed{1}$ $-\frac{5}{8}$ $\boxed{2}$ $\frac{5}{8}$ $\boxed{3}$ $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{4}$ $-\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{5}$ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

414. Если наименьший положительный период функции $f(x) = \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a} + \frac{\pi}{3}\right)$ равен 5, то наименьший положительный период функции $f(x) = \pi\,\mathrm{ctg}(2ax + \pi)$ равен

1 $\frac{5\pi}{4}$ **2** $\frac{\pi}{15}$ **3** $\frac{\pi}{30}$ **4** $2,5$ **5** 5

415. Наименьший положительный период функции $y = \cos^2\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} + \sin x$ равен

1 π **2** 2π **3** 3π **4** 6π **5** 12π

416. Наименьший положительный период функции $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,2x$ равен

1 π **2** 2π **3** $0{,}5\pi$ **4** $1,5\pi$ **5** 3π

417. Наименьший положительный период функции $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ равен

1 $0{,}5\pi$ **2** π **3** $1,5\pi$ **4** 2π **5** $2,5\pi$

418. Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2 x = x^3 - 6x^2 + 5x + 1$.

419. Число, равное наибольшему значению разности функции $y = 3\cos^4 x + 3\sin^4 x$ и $y = 2\cos^6 x + 2\sin^6 x$, принадлежит промежутку

1 $[0;\, 0,125)$ **2** $[0,125;\, 0{,}25)$ **3** $[0{,}25;\, 0,375)$ **4** $[0,375;\, 0{,}5)$
5 $[0{,}5;\, 1]$

420. Укажите множество значений функции $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$.

1 $[-\sqrt{2};\, \sqrt{2}]$ **2** $[-1;\, 1]$ **3** $[-2;\, 2]$ **4** $[-3\sqrt{2};\, 3\sqrt{2}]$
5 $[-\sin 3 - \cos 3;\, \sin 3 + \cos 3]$

421. Укажите множество значений функции $f(x) = 3\sin 3x - 5\cos 3x$.

1 $[-34\sqrt{3};\, 34\sqrt{3}]$ **2** $[-3\sin 3 - 5\cos 3;\, 3\sin 3 + 5\cos 3]$
3 $[-8;\, 8]$ **4** $[-\sqrt{34};\, \sqrt{34}]$ **5** $[-5;\, 5]$

422. Укажите множество значений функции $y = \sin x$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{6};\, \frac{2\pi}{3}\right)$.

1 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$ **2** $\left(\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3** $\left(\frac{1}{2};\, 1\right]$ **4** $\left[-1;\, -\frac{1}{2}\right)$ **5** $\left(-\frac{1}{2};\, 1\right]$

423. Укажите множество значений функции $y = \sin x$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3}\right)$.
1 $[-1;\ 1]$ **2** $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ **3** $\left(-\frac{1}{2};\ 1\right]$ **4** $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right)$ **5** $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right]$

424. Укажите промежуток, в котором заключено наибольшее значение функции $y = 2\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} - \frac{1}{2}\cos^2 x + 1$
1 $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ **2** $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$ **3** $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ **4** $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ **5** $\left[1;\ \frac{\pi}{2}; 0\right)$

425. Наибольшее значение функции $y = \frac{0{,}5}{1+\sin x}$ на промежутке $x \in \left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$ равно
1 100 **2** 0,25 **3** $0,(3)$ **4** 4 **5** 1

426. Укажите множество значений функции $y = 24\sin x - 7\cos x$

1 $[-24;\ 24]$ **2** $[-17;\ 24]$ **3** $[-25;\ 25]$ **4** $[-24\sqrt{2};\ 24\sqrt{2}]$
5 $[-17;\ 31]$

10.5.0.2. Свойства тригонометрических функций, 2

427. Значение выражения $\sin \frac{2006}{13}\pi$ равно
1 $\cos\frac{8\pi}{26}$ **2** $\cos\frac{5\pi}{26}$ **3** $-\cos\frac{5\pi}{13}$ **4** $-\cos\frac{5\pi}{26}$ **5** $-\cos\frac{7\pi}{26}$

428. Значение выражения $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ при $x \in (\pi; 1,5\pi)$ равно

429. Если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$, то выражение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ равно
1 27 **2** 18 **3** 42 **4** 36 **5** 30

430. Выражение $\sin\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)\cdot\cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)\cdot\sin(5\pi + x)$ равно
1 -1 **2** $-\cos 2x$ **3** 0 **4** $-\sin 2x$ **5** $\cos 2x$

431. Выражение $\frac{\cos 0{,}9\pi\cdot\operatorname{ctg} 0{,}4\pi\cdot\operatorname{ctg} 2{,}1\pi}{\cos 2{,}1\pi}$ равно
1 1 **2** -1 **3** 2 **4** -2 **5** 0,5

432. Значение выражения $||\sin 44^\circ - \operatorname{tg} 44^\circ| + |\operatorname{ctg} 46^\circ - \sin 43^\circ||$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sin 44^\circ - \cos 47^\circ$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $2\operatorname{tg} 44^\circ - \cos 47^\circ - \sin 44^\circ$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $\sin 43^\circ - \cos 46^\circ$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sin 43^\circ + \cos 46^\circ$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\cos 47^\circ + \cos 46^\circ - 2\operatorname{ctg} 46^\circ$

433. Вычислите $\cos 105^\circ$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

434. Все корни уравнения $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$ определяются формулой ($n \in \mathbf{Z}$):
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$

435. Значение выражения $\frac{\sin 70^\circ+\cos 40^\circ}{\sin 280^\circ}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\operatorname{tg} 300^\circ$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\operatorname{tg} 315^\circ$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 1 $\boxed{\mathbf{5}}$ -1

436. Значение выражения $\cos^2 85^\circ + \sin 115^\circ \cdot \sin 55^\circ$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{7}{8}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{3}{8}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{5}{8}$

437. Выражение $|\cos 402^\circ - \sin 41^\circ|$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sin 48^\circ - \sin 42^\circ$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\cos 48^\circ - \sin 41^\circ$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sin 48^\circ - \cos 49^\circ$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\cos 48^\circ - \cos 41^\circ$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\cos 41^\circ - \cos 48^\circ$

438. Вычислите $\cos\frac{x}{2}$, если $\cos x = 0{,}8$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

439. Сравните $x=\cos(1{,}9)+\cos(2{,}1)$ и $y=2\cos(2)$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x>y>0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x=y$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0<x<y$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0>x>y$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x<y<0$

440. Сравните $x=10000[-\sin(5{,}01)+2\sin(5)-\sin(4{,}99)]$ и $y=\sin(5)$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x>y>0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x=y$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0<x<y$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0>x>y$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x<y<0$

441. Значение выражения $\sin^6\frac{5\pi}{8}+\cos^6\frac{3\pi}{8}$ равно
$\boxed{\mathbf{1}}$ $-\frac{5}{8}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{5}{8}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{7\sqrt{2}}{16}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

442. Наименьший положительный период функции $3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ π $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 2π $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{2\pi}{3}$

443. Наименьший положительный период функции $y=\cos^2 x-\sin x$ равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ $0{,}5\pi$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2π $\boxed{\mathbf{3}}$ $1,5\pi$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0{,}25\pi$ $\boxed{\mathbf{5}}$ π

444. Наименьший положительный период функции $y=\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ равен
$\boxed{\mathbf{1}}$ π $\boxed{\mathbf{2}}$ 2π $\boxed{\mathbf{3}}$ $0{,}5\pi$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $1,5\pi$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 3π

445. Решите уравнение $1+\operatorname{tg}^2 x=x^3-5x^2+6x+\frac{1}{\cos^2 x}$.

446. Число, равное разности наибольшего и наименьшего значений функции
$y=2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$, принадлежит промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[0;\ 0,125)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0,125;\ 0{,}25)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[0{,}25;\ 0,375)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[0,375;\ 0{,}5)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[0{,}5;\ 1]$

447. Укажите множество значений функции
$f(x)=\sin(3x-1)+\sqrt{3}\cos(3x-1)$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-2;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-\sin 3-\cos 3;\ \sin 3+\cos 3]$

448. Укажите множество значений функции $y=\sin x$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right)$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\left(\frac{1}{2};\ 1\right]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\left(-\frac{1}{2};\ 1\right]$

449. Укажите множество значений функции $y=\log_{0,5} 2^{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$

450. Наименьшее значение функции $y=2\sqrt{\frac{1-\cos(\pi-2x)}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1$ заключено в промежутке
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$

451. Наибольшее значение функции $y = \frac{\sqrt{3}}{\cos x}$ на промежутке $x \in \left[\frac{-\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ равно

1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **3** $2\sqrt{3}$ **4** 2 **5** $\sqrt{3}$

452. Укажите множество значений функции $y = 9\sin x - 12\cos x$

1 $[-12; 12]$ **2** $[3; 21]$ **3** $[-12; 21]$ **4** $[-12\sqrt{2}; 12\sqrt{2}]$
5 $[-15; 15]$

Ответы

10.5.0.3. Свойства тригонометрических функций, 1

399. $\boxed{3}$ 400. ♦ $-\sin\frac{x}{4}$. **401.** $\boxed{4}$ **402.** $\boxed{4}$ **403.** $\boxed{1}$ **404.** $\boxed{1}$ **405.** $\boxed{3}$ **406.** $\boxed{2}$ **407.** $\boxed{2}$ **408.** $\boxed{3}$ 409. ♦ $\sqrt{0{,}2}$. **410.** $\boxed{2}$ **411.** $\boxed{4}$ **412.** $\boxed{3}$ **413.** $\boxed{3}$ **414.** $\boxed{3}$ **415.** $\boxed{4}$ **416.** $\boxed{1}$ **417.** $\boxed{4}$ 418. ♦ $x \in \{0; 1; 5\}$. **419.** $\boxed{5}$ **420.** $\boxed{1}$ **421.** $\boxed{4}$ **422.** $\boxed{3}$ **423.** $\boxed{1}$ **424.** $\boxed{4}$ **425.** $\boxed{3}$ **426.** $\boxed{3}$

10.5.0.4. Свойства тригонометрических функций, 2

427. $\boxed{2}$ 428. ♦ $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **429.** $\boxed{2}$ **430.** $\boxed{1}$ **431.** $\boxed{2}$ **432.** $\boxed{2}$ **433.** $\boxed{2}$ **434.** $\boxed{4}$ **435.** $\boxed{2}$ **436.** $\boxed{2}$ **437.** $\boxed{3}$ 438. **439.** $\boxed{4}$ **440.** $\boxed{4}$ **441.** $\boxed{2}$ **442.** $\boxed{2}$ **443.** $\boxed{2}$ **444.** $\boxed{2}$ 445. ♦ $x \in \{0; 2; 3\}$. **446.** $\boxed{1}$ **447.** $\boxed{3}$ **448.** $\boxed{5}$ **449.** $\boxed{4}$ **450.** $\boxed{2}$ **451.** $\boxed{3}$ **452.** $\boxed{5}$

Тема 11. Тригонометрические уравнения

11.1. Элементарные уравнения

11.1.1. Уравнения вида $\sin x = p$, $\cos x = p$

11.1.1.1. Уравнения вида $\sin x = p$

Напомним основные положения, связанные с понятием обратной функции.

Теоретические сведения Пусть функция $f(x)$, заданная на

непустом множестве $x \in X$, имеет обратную функцию, которую мы обозначим $g(x) = f^{-1}(x)$. Обозначим множество значений функции $f(x)$, $x \in X$, буквой Y. Тогда уравнение $(\star)$ $f(x) = b$ имеет единственный корень для тех и только тех значений параметра b, которые принадлежат множат множеству Y. Этот корень можно найти с помощью формулы $x = g(b)$. Если же b не принадлежит Y, тот уравнение $(\star)$ корней не имеет.

Для решения уравнения вида $\sin x = p$ нам потребуется функция, обратная к функции $f(x) = \sin x$. Так как для каждого числа $b \in [-1; 1]$ найдется бесвонечно много точек x таких, что $\sin x = b$, то функция $f(x) = \sin x$ не имеет обратной на всей числовой оси. Для того, чтобы построить функцию, обратную к $\sin x$, необходимо сузить область определения так, чтобы каждое значение $b \in [-1; 1]$ принималось только один раз. Это можно сделсть многоими способами. Исторически сложилось так, что принято строить обратную функцию к функции $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Эта функция обозначается $g(x) = \arcsin x$. Подробное исследование этой функции будет проведено в следующей глава, а сейчас ограничимся следующим определением.

Определение 11.1. Если $|b| \leqslant 1$, то значение $\arcsin b$ определяется как угол α такой, что $\sin \alpha = b$ и $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Если $|b| > 1$, то значение $\arcsin b$ считается не определенным.

Замечание. Данное определение является корректным, т.е. для каждого $b \in [-1;\, 1]$ существует единственное значение угла α, удовлетворяющее сформулированным условиям.

453. Решите уравнение $\sin x = b$, где $|b| < 1$.

♦ Все корни можно записать в виде двух серий, $x = \arcsin b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$,
$x = \pi - \arcsin b + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Ответ можно также записать в виде одной серии,
$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, но эта форма непригодна для практического использования.

Решение. Из определения величины $\arcsin b$ вытекает, что на промежутке $x \in (-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2})$ найдется единственное решение уравнения $\sin x = b$, а именно $x = \arcsin b$. Так как $\sin(\pi - x) \equiv \sin x$, то на промежутке $x \in (\frac{\pi}{2};\, \frac{3\pi}{2})$ найдется единственное решение уравнения $\sin(\pi - x) = b$, а именно $x = \pi - \arcsin b$. Полный ответ получается присоединением всех значений, отличающихся от двух найденных корней на произвольное целое число периодов функции $\sin x$, т.е. на величину $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Замечание. Тот же ответ можно использовать и для случаев $b = \pm 1$. В этом случае, однако, каждый корень будет присутствовать пл два раза, что неудобно для дальнейшего анализа. Поэтому случаи $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ лучше рассмотреть отдельно.

454. Решите уравнение $\sin x = 1$.

♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. На промежутке $x \in [0;\, \frac{\pi}{2}]$ функция $\sin x$ возрастает, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, на промежутке $x \in [\frac{\pi}{2};\, \frac{3\pi}{2}]$ функция $\sin x$ убывает, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, на промежутке $x \in [\frac{3\pi}{2};\, 2\pi]$ функция $\sin x$ возрастает, $\sin 2\pi = 0$, поэтому величина $\sin x$ равна 1 в единственной точке промежутка $[0;\, 2\pi)$, а именно в точке $\frac{\pi}{2}$. Остальные корни получаются прибавлением целого числа периодов 2π (точнее, целого числа наименьших положительных периодов, хотя звучит эта фраза хуже). ■

455. Решите уравнение $\sin x = -1$.

♦ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Из определения функции $f(x) = \sin x$ следует, что значение этой функции равно -1 в единственной точке промежутка $[0;\ 2\pi)$, а именно в точке $x = \frac{3\pi}{2}$. Присоединяя целое число периодов, получим полный ответ,
$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, который можно записать также в виде
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

456. Решите уравнение $\sin x = 0$.
♦ $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Из определения функции $f(x) = \sin x$ следует, что значение этой функции равно 0 в двух точках тригонометрического круга, а именно в точке $x = 0$ и в точке $x = \pi$. Присоединяя целое число периодов, получим ответ. ■

457. Наименьший положительный корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{11\pi}{6}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x = \frac{7\pi}{6}$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Наименьшие положительные корни в каждой серии равны соответственно
$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.
Осталось выбрать наименьшее из этих двух выражений. ■

458. Сумма двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = \frac{3}{10}$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3π $\boxed{\mathbf{2}}$ $\pi + 2\arcsin\frac{3}{10}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ π

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x_1 = \arcsin\frac{3}{10},\ x_2 = \pi - \arcsin\frac{3}{10}$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = \arcsin\frac{3}{10} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - \arcsin\frac{3}{10} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Наименьшие положительные корни в каждой серии равны соответственно $\arcsin\frac{3}{10}$ и $\pi - \arcsin\frac{3}{10}$. Осталось найти сумму этих двух выражений. ■

459. Сумма двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = -\frac{3}{10}$ равна

$\boxed{1}$ 3π $\boxed{2}$ $\pi + 2\arcsin\frac{3}{10}$ $\boxed{3}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{4}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{5}$ π

Ответ $\boxed{1}$♦ $x_1 = \arcsin\frac{3}{10}$, $x_2 = \pi - \arcsin\frac{3}{10}$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = -\arcsin\frac{3}{10} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - \arcsin(-\frac{3}{10}) + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Так как функция $f(x) = \arcsin x$ нечетная, вторую серию можно записать также в виде $x = \pi + \arcsin\frac{3}{10} + 2\pi m$. Наименьшие положительные корни в двух сериях равны соответственно $2\pi - \arcsin\frac{3}{10}$ и $\pi + \arcsin\frac{3}{10}$. Осталось найти сумму этих двух выражений. ■

460. Сумма двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = \sqrt{\frac{7}{24}} + \sqrt{\frac{5}{24}}$ равна

$\boxed{1}$ π $\boxed{2}$ $2\arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{24}} + \sqrt{\frac{5}{24}}\right)$ $\boxed{3}$ Уравнение корней не имеет

$\boxed{4}$ $2\pi - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{24}} + \sqrt{\frac{5}{24}}\right)$ $\boxed{5}$ 3π

Ответ $\boxed{1}$♦ $x_1 + x_2 = \pi$.

Решение. Пусть $b = \sqrt{\frac{7}{24}} + \sqrt{\frac{5}{24}}$. Так как $b^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{35}{36}}$ и $b > 0$, то
$0 < b < 1$. Два наименьших положительных корня уравнения $\sin x = b$ при таких значениях b равны соответственно
$x_1 = \arcsin b$ и $x_2 = \pi - \arcsin b$, $x_1 + x_2 = \pi$. ■
Можно заметить, что сумма двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = b$ может быть равна одному из трех чисел,
$x_1 + x_2 \in \{\pi; 3\pi; 5\pi\}$. Этот факт иллюстрируют следующие две задачи.

461. Найдите сумму двух наименьших положительных корней уравнения
$\sin x = b$ при $b \in (0; 1)$.

$\boxed{1}$ 3π $\boxed{2}$ $\pi + 2\arcsin b$ $\boxed{3}$ $2\pi + 2\arcsin b$ $\boxed{4}$ $2\pi + \arcsin b$ $\boxed{5}$ π

Ответ $\boxed{5}$♦ $x_1 + x_2 = \pi$.

Решение. При $b \in (-1;\ 1)$ множество всех корней можно записать в виде двух серий, $x = \arcsin b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - \arcsin b + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$, причем общих элементов в этих сериях нет. При $b \in (0;\ 1)$ значение функции $\arcsin b \in (0;\ \frac{\pi}{2})$, поэтому наименьшие положительные элементы в каждой серии равны соответственно $\arcsin b$ и $\pi - \arcsin b$. ■

462. Найдите сумму двух наименьших положительных корней уравнения
$\sin x = b$ при $b \in (-1;\ 0)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3π $\boxed{\mathbf{2}}$ $\pi + 2\arcsin b$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\pi + 2\arcsin b$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ π

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x_1 + x_2 = 3\pi$.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей запишем множество всех корней в виде двух серий. Так как теперь $\arcsin b < 0$, то наименьшие положительные корни в каждой из серий равны соответственно
$2\pi + \arcsin b$ и $\pi - \arcsin b$. ■

463. Найдите сумму двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = -1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ π $\boxed{\mathbf{2}}$ 2π $\boxed{\mathbf{3}}$ 3π $\boxed{\mathbf{4}}$ 4π $\boxed{\mathbf{5}}$ 5π

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x_1 + x_2 = 5\pi$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде одной серии,
$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. Два наименьших положительных корня равны соответственно $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} + 2\pi$. ■

11.1.1.2. Уравнения вида $\sin(x) = \sin(a)$

Теоретические сведения Уравнение ($\star$) $\sin x = \sin a$ имеет бесконечное множество корней при любом значении a, так как при любом a будет верным включение $\sin a \in [-1;\ 1]$. Так как $\sin x - \sin a = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right)$, то уравнение ($\star$) равносильно совокупности уравнений $\sin\frac{x-a}{2} = 0$ и $\cos\frac{x+a}{2} = 0$. Множество всех корней совпадает с обьединением множеств $x - a = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ и $x + a = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, среди элементов которых могут быть совпадающие числа. Для тех значений a, при которых $\sin a = \pm 1$, достаточно взять одну серию, например $x = a + 2\pi n$.

464. Решите уравнение ($\star$) $\sin x = \sin(0{,}7)$.
$\boxed{1}$ $x = 0{,}7 + 2\pi n$, $x = \pi - 0{,}7 + 2\pi m$ $\boxed{2}$ $x = \arcsin(0{,}7) + 2\pi n$, $x = \pi - \mathrm{ar}$
$\boxed{3}$ $x = \pm 0{,}7 + 2\pi n$ $\boxed{4}$ Корней нет $\boxed{5}$ $x = \sin(0{,}7) + 2\pi n$, $x = \pi - \sin(0{,}7)$

Ответ $\boxed{1}$♦ $x = 0{,}7 + 2\pi n$, $x = \pi - 0{,}7 + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$.

Решение 1. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
($\star\star$) $x = \arcsin(\sin(0{,}7)) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - \arcsin(\sin(0{,}7)) + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Так как функция $\arcsin x$ является обратной к функции $\sin x$ на промежутке $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то $\arcsin(\sin x) = x$ при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. В частности,
$\arcsin(\sin(0{,}7)) = 0{,}7$. Осталось подставить это выражение в ($\star\star$). ■

Решение 2. Одним из корней уравнения ($\star$) является, очевидно, число
$x = 0{,}7$. Прибавляя число, кратное периоду, получим серию корней
$x = 0{,}7 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. В соответствии с формулами приведения, $\sin(\pi - 0{,}7) = \sin(0{,}7)$. Поэтому число, равное $\pi - 0{,}7$ — тоже корень. Поэтому вторая серия корней $x = \pi - \arcsin(\sin(0{,}7)) + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. ■

465. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin x = \sin(5)$.
$\boxed{1}$ 5 $\boxed{2}$ $5 - \pi$ $\boxed{3}$ $3\pi - 5$ $\boxed{4}$ $2\pi - 5$ $\boxed{5}$ $5 - \frac{\pi}{2}$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x = 3\pi - 5$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = 5 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - 5 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Наименьший положительный корень в первой серии получается при $n = 0$, он равен 5. Во второй серии при $m = 0$ получается отрицательное число, при $m = 1$ — положительное число, равное $3\pi - 5$. Сравним наименьшие положительные корни в каждой серии, $5 \bigvee 3\pi - 5$, равносильно $10 \bigvee 3\pi$. Так как $\pi \in (3{,}1; 3{,}2)$, то $3\pi \in (9{,}3; 9{,}6)$, и $10 > 3\pi$. ■

466. Найдите наименьшие положительные корни уравнений $\sin x = \sin(k)$ для $k \in \{1; 2; \ldots; 9\}$.

♦ Если x_k — наименьший положительный корень уравнения $x_k = k$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \pi - 1$, $x_3 = \pi - 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 3\pi - 5$, $x_6 = 3\pi - 6$, $x_7 = 7 - 2\pi$, $x_8 = 3\pi - 8$. $x_9 = 3\pi - 9$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = k + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pi - k + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Задача решается аналогично предыдущей. Например, при $k = 8$ придется сравнить $8 - 2\pi \bigvee 3\pi - 8$, равносильно $16 \bigvee 5\pi$. Так как $\pi \in (3{,}1;\ 3{,}15)$, то $5\pi \in (15{,}5;\ 15{,}75)$, поэтому $16 > 5\pi$. ■

467. Укажите количество корней уравнения $\sin x = \sin 4$ на промежутке $x \in [-17;\ 17]$.

1 11 **2** 12 **3** 13 **4** 14 **5** 10

Ответ **1** ♦ 11.

Решение. Для серии корней $x = 4 + 2\pi n$ условие задачи дает $n \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$, а для серии $x = \pi - 4 + 2\pi m$ получим $m \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. ■

468. Укажите два наименьших положительных корня уравнения $\sin x = -\cos 1$.

1 $1;\ \frac{\pi}{2} - 1$ **2** $\frac{3\pi}{2} - 1;\ \pi + 1$ **3** $\frac{\pi}{2} \pm 1$ **4** $\pi \pm 1$ **5** $\frac{3\pi}{2} \pm 1$

Ответ **5** ♦ $x = 3\pi/2 \pm 1$.

Решение. Используя формулы приведения, запишем уравнение в виде
$\sin x = \sin(1 - \pi/2)$. Все корни образуют две серии, $x = \frac{3\pi}{2} + 1 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, и $x = \frac{3\pi}{2} - 1 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Наименьшие положительные корни соответственно $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 1$, $x_2 = \frac{3\pi}{2} - 1$. ■

469. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin x = -\frac{\pi}{4}$.

1 $2\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **2** $\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **3** $\arcsin \frac{\pi}{4}$ **4** $\pi + \arcsin \frac{\pi}{4}$
5 $2\pi - \arcsin \frac{\pi}{4}$

Ответ **4** ♦ $x = \pi + \arcsin(\pi/4)$.

Решение. Множество всех корней можно записать в виде совокупности двух серий, $x = -\arcsin \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, и $x = \pi + \arcsin \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Наименьшие корни в каждой из серий равны соответственно $2\pi - \arcsin \frac{\pi}{4}$ и $\pi + \arcsin \frac{\pi}{4}$. Сравнение

$2\pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \bigvee \pi + \arcsin\frac{\pi}{4}$, равносильно $\pi \bigvee 2\arcsin\frac{\pi}{4}$, равносильно $\frac{\pi}{2} > \arcsin\frac{\pi}{4}$ показывает, что второе значение является наименьшим. ■

470. Решите уравнение ($\star$) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{13}}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{13}}\right) + 2\pi n$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\pm\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{13}}\right) + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ корней нет

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{13}}\right) + 2\pi n$

Решение. Заметим, что если $p > 0$, $q > 0$, $0 < r < p$, то $0 < \sqrt{\frac{p-r}{q}} + \sqrt{\frac{p+r}{q}} < 2$. Поэтому уравнение ($\star$) следует решать по общей формуле для уравнения $\sin x = b$, $0 < |b| < 1$. ■

11.1.1.3. Уравнения вида $\cos x = a$

Определение 11.2. Если $|b| \leqslant 1$, то значение $\arccos b$ определяется как угол β такой, что $\cos\beta = b$ и $\beta \in [0; \pi]$. Если $|b| > 1$, то значение $\arccos b$ считается не определенным.

471. Решите уравнение $\cos x = b$, где $|b| < 1$.
♦ $x = \pm\arccos b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, причем все эти значения различны.

Решение. Из определения величины $\arccos b$ вытекает, что на промежутке $x \in (0; \pi)$ найдется единственный корень уравнения $\cos x = b$, а именно $x = \arccos b$. Так как $\cos(-x) \equiv \cos x$, то на промежутке $x \in (-\pi; 0)$ также найдется единственный корень уравнения $\cos x = b$, а именно $x = -\arccos b$. Для записи полного ответа присоединяем значения, отличающиеся на целое число периодов. ■

472. Решите уравнение $\cos x = 1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pi + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ πn $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение 1. Все корни можно записать в виде двух серий, $x = \arccos 1 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = -\arccos 1 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Так как $\arccos 1 = 0$, вторая серия совпадает с первой и можно оставить только одну из них. ■

Решение 2. Из определения функции $f(x) = \cos x$ следует, что значение этой функции равно 1 в единственной точке тригонометрического круга, а именно в точке $x = 0$. Присоединяя период, получаем $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

473. Решите уравнение $\cos x = -1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pi + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ πn $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Из определения функции $f(x) = \cos x$ следует, что значение этой функции равно -1 в единственной точке тригонометрического круга $x = \pi$. Присоединяя период, получаем $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

474. Решите уравнение $\cos x = 0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pi + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ πn $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Из определения функции $f(x) = \cos x$ следует, что значение этой функции равно 0 в двух точках тригонометрического круга, а именно в точке $x = \frac{\pi}{2}$ и в точке $x = \frac{3\pi}{2}$. Присоединяя период, получаем ответ в виде двух серий, которые несложно преобразовать в одну. ■

475. Решите уравнение $2\cos x = \sqrt{\frac{12}{13}} + \sqrt{\frac{13}{12}}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-1)^n \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{12}}\right) + 2\pi n$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\pm\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{13}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{12}}\right) + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ корней нет

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ Корней нет.

Решение. Заметим, что если $p > 0$, $q > 0$, то в соответствии с неравенством Коши ($\star$) $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} > 2$. Поэтому значение функции $2\cos x \in [-2;\ 2]$ не может быть равно величине ($\star$). ■

11.1.1.4. Уравнения вида $\cos x = \cos a$

Теоретические сведения Уравнение $\cos x = \cos a$ равносильно совокупности уравнений $x = a+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ и $x+a = 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. При $a = \pi k, k \in \mathbf{Z}$, множества корней в этих сериях совпадают.

476. Решите уравнение $\cos x = \cos 3$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $3+2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-1)^n \cdot 3 + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-1)^n \cdot 3 + \pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\pm 3 + \pi n$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\pm 3 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $\pm 3 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Все корни можно записать в виде двух серий, $x = \pm \arccos(\cos 3) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. На промежутке $t \in [0; \pi]$ функции $f(t) = \cos t$ и $g(z) = \arccos z$ являются взаимно обратными, поэтому $\arccos \cos 3 = 3$. ■

477. Найдите наименьшие положительные корни уравнений $\cos x = \cos k$ для $k \in \{1; 2; \ldots; 9\}$.
♦ Если x_k — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = \cos k$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2\pi - 4$, $x_5 = 2\pi - 5$, $x_6 = 2\pi - 6$, $x_7 = 7 - 2\pi$, $x_8 = 8 - 2\pi$, $x_9 = 9 - 2\pi$.
Решение. Множество всех корней можно записать в виде двух серий,
$x = k + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = -k + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Задача решается аналогично предыдущей. Например, при $k = 9$ придется сравнить $4\pi - 9 \bigvee 9 - 2\pi$, равносильно $6\pi \bigvee 18$, причем $6\pi > 18$. ■

11.1.1.5. Уравнения вида $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

Теоретические сведения Для любого $a \in (-\infty; +\infty)$ все корни уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ образуют одну серию, $x = a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

478. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \sqrt{2}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2} + \pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $\sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Все корни можно записать в виде серии $x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \sqrt{2}) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. На промежутке $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ функции $f(t) = \operatorname{tg} t$ и $g(z) = \operatorname{arctg} z$ являются взаимно обратными, и к тому же $\sqrt{2} = 1{,}41...$, $\frac{\pi}{2} = 1{,}57...$, так что $\sqrt{2} \in (0;\ \frac{\pi}{2})$, поэтому $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. ■

11.1.2. Тригонометрические уравнения с параметром

479. При каких значениях параметра p уравнение $\sin x = p$ имеет по крайней мере один корень?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\{0\}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\emptyset$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\{-1;\ 1\}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $p \in [-1;\ 1]$.

Решение. Пусть X — непустое множество вещественных чисел. Напомним, что уравнение $f(x) = p$ имеет по крайней мере один корень $x \in X$ для тех и только тех значений параметра p, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)$ на множестве X. В данном случае множество значений функции $\sin x$ на всей числовой оси совпадает с промежутком $[-1;\ 1]$. ■

480. При каких значениях параметра p уравнение $\sin x = p$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $x \in (-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\frac{1}{2};\ 1]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\emptyset$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $p \in (-\frac{1}{2};\ 1]$.

Решение. Множество значений функции $f(x) = \sin x$ на на промежутке $x \in (-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$ совпадает с промежутком $(-\frac{1}{2};\ 1]$. ■

481. При каких значениях параметра p уравнение $(\star)$ $4\sin x = p^2 - 6p + 4$ имеет по крайней мере один корень?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[0;\ 2] \bigcup [4;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[0;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[4;\ 6]$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $p \in [0;\ 2] \bigcup [4;\ 6]$.

Решение. Множество значений функции $f(x) = 4\sin x$ совпадает с промежутком $[-4;\ 4]$. Поэтому уравнение $(\star)$ имеет по крайней мере один корень для тех и только тех значений параметра p, для которых $p^2 - 6p + 4 \in [-4;\ 4]$, $\begin{cases} p^2 - 6p \leqslant 0, \\ p^2 - 6p + 8 \geqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} p \in [0;\ 6], \\ p \in (-\infty;\ 2] \bigcup [4;\ +\infty), \end{cases}$ $p \in [0;\ 2] \bigcup [4;\ 6]$. ■

482. При каких значениях параметра p уравнение $\cos x + \sqrt{2}\sin x = \operatorname{tg} p$ имеет по крайней мере один корень?
$\boxed{1}$ $\left[-\sqrt{3}+\pi n;\ \sqrt{3}+\pi n\right]$ $\boxed{2}$ $\left[-\sqrt{2}+\pi n;\ \sqrt{2}+\pi n\right]$
$\boxed{3}$ $\left[-\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+\pi n;\ \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+\pi n\right]$
$\boxed{4}$ $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$ $\boxed{5}$ $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$
Ответ $\boxed{4}$♦ $x \in [-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n], n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Множество значений функции $f(x) = \cos x + \sqrt{2}\sin x$ совпадает с промежутком $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. Все решения неравенства $-\sqrt{3} \leqslant \operatorname{tg} p \leqslant \sqrt{3}$ образуют семейство промежутков $p \in \left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$. ■

483. При каких значениях параметра p уравнение $\sin x = \sin p + \cos p$ имеет по крайней мере один корень?
♦ $p \in \left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Следует решить неравенство $-1 \leqslant \sin p + \cos p \leqslant 1$. Решение можно получить, например, с помощью метода вспомогательного угла: $-1 \leqslant \sqrt{2}\cos(p - \frac{pi}{4}) \leqslant 1$, $-1/\sqrt{2} \leqslant \cos(p-\frac{\pi}{4}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$. ■

484. Решите уравнение $\sin(x+5) = \sin(x-1)$.
♦ $x = \frac{\pi}{2} - 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Данное уравнение равносильно совокупности $(x+5)-(x-1) = 2\pi m$, $(x+5)+(x-1) = \pi + 2\pi n$. Первое уравнение корней не имеет. ■

11.1.3. Уравнения вида $f(ax) = f(bx)$ и аналогичные

11.1.3.1. Уравнения вида $\sin ax = \sin bx$

Теоретические сведения Уравнения вида $\sin ax = \sin bx$, $\cos ax = \cos bx$, $\sin ax = \cos bx$ и аналогичные решаются методом разложения на множители с использованием формул сложения для тригонометрических функций. При этом получаются две серии ответов, которые могут иметь общие элементы. Рассмотрим уравнение $(\star)$ $\sin ax = \sin bx$, где $a \neq \pm b$. Используя формулу для разности синусов, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, можно убедиться в том, что уравнение ($\star$) равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\frac{(a-b)x}{2} = 0,\\ \cos\frac{(a+b)x}{2} = 0.\end{array}\right.$ Решая каждое из получившихся элементарных уравнений, получим две серии, $x = \frac{2\pi n}{a-b}, n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi+2\pi m}{a+b}, m \in \mathbf{Z}$. Перед тем, как дать окончательный ответ, следует проверить возможность совпадения некоторых корней двух получившихся серий. Если a и b — целые числа, то приравнивание значений x из разных серий приводит к линейному уравнению в целых числах, которое решается одним из стандартных методов.

485. Сколько корней имеет уравнение $\sin 3x = \sin 7x$ на промежутке
$x \in (0;\ 2\pi)$?

1 11 **2** 12 **3** 13 **4** 9 **5** 10

Ответ **1** ♦ 11 корней.

Решение. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos 5x = 0.\end{array}\right.$ Корни каждой серии равны $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, m \in \mathbf{Z}$. Найдем общие корни, $\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $5n = 1 + 2m$, $n = 2k+1$, $m = 5k+2, k \in \mathbf{Z}$. Это означает, что все нечетные значения n дают корни первой серии, которые присутствуют также во второй серии. Поэтому в первой серии оставим только четные значения n. Обе серии можно записать в виде $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$,
$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, m \in \mathbf{Z}$, причем в сериях не будет общих корней. В первой серии $0 < \pi n < 2\pi$, $0 < n < 2$, $n = 1$, один корень. Во второй серии $0 < \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5} < 2\pi$, $0 < \frac{1}{10} + \frac{m}{5} < 2$, $0 < 1 + 2m < 20$, $-1 < 2m < 19$, $-0{,}5 < m < 9{,}5$, $m \in \{0; \ldots; 9\}$, 10 корней. ■

486. Укажите количество корней уравнения ($\star$) $\sin 5x + \sin 7x = 0$ на промежутке $x \in [0;\ 2\pi]$.

1 11 **2** 12 **3** 13 **4** 14 **5** 15

Ответ **3** ♦ 13 корней, $x = \pi n/6$, $n \in \{0; \ldots; 12\}$.

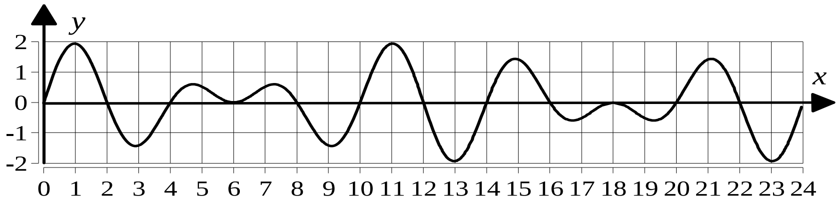


Рис. 14. Знаковый портрет функции $\tilde{f}(x) = f(\frac{\pi x}{12})$,
$f(x) = \sin 5x + \sin 7x$.

Решение. Используем в левой части $(\star)$ формулу сложения для синусов, $2\sin 6x \cos x = 0$. Все корни уравнения $(\star)$ содержатся в двух сериях,
$(\ddagger)$ $x = \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$, $(\ddagger\ddagger)$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, причем некоторые корни двух серий могут совпадать. Исследуем вопрос о наличии совпадающих корней, $\frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $(\star\star)$ $n = 3 + 6m$. Таким образом, вторая серия (как множество) целиком включена в первую серию, и указывать ее в ответе не следует. Общее число различных корней на указанном промежутке будет равно количеству корней в первой серии. В первой серии $(\ddagger)$ на промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$ имеется 13 корней, $x = \frac{\pi n}{6}, n \in \{0;\, \ldots;\, 12\}$. Во второй серии $(\ddagger\ddagger)$ имеется 2 корня, но каждый из них присутствует в первой серии. ■

487. Множество всех решений неравенства $(\star)$ $\sin 5x + \sin 7x \leqslant 0$ на промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$ можно представить в виде обьединения непересекающихся промежутков. Укажите наименьшее количество таких промежутков.

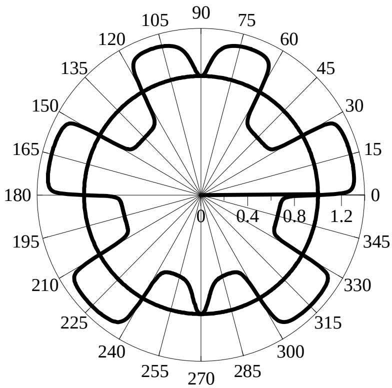
$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ 8 $\boxed{\mathbf{4}}$ 9 $\boxed{\mathbf{5}}$ 10

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x \in$
$2\pi n + \{\{0\} \bigcup [\pi/6;\, \pi/3] \bigcup \{\frac{\pi}{2}\} \bigcup [2\frac{\pi}{3};\, \frac{5\pi}{6}] \bigcup [\pi;\, \frac{7\pi}{6}] \bigcup [4\frac{\pi}{3};\, \frac{5\pi}{3}] \bigcup [\frac{11\pi}{6};\, 2\pi]\}$.

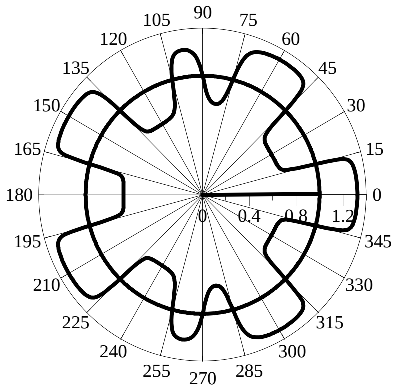
Решение. Используем результаты решения предыдущей задачи. Мы уже убедились в том, что неравенство $(\star)$ равносильно $(\star\star)$ $2\sin 6x \cos x \leqslant 0$. В каждой точке $(\ddagger)$ $x = \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbf{Z}$, функция $f(x) = \sin 6x$ меняет свой знак. Левая часть $(\star\star)$ меняет свой знак также во всех точках $(\ddagger\ddagger)$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$, где функция $g(x) = \cos x$ меняет свой знак, причем все эти точки уже были упомянуты по одному разу в первой серии. Следовательно, в этих точках знак левой части меняется два раза, а это означает, что знак не меняется. В точке $x = \frac{\pi}{4}$ левая часть ($\star$) положительна, поэтому каждая точка промежутка, начинающиегося в точке $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ не является решением. Дальше следует перебрать все промежутки, границы которых указаны в ($\ddagger$), и указать знак левой части (внутри каждого такого промежутка знак не может измениться). Если на границе знак меняется два раза (или четное число раз), то знак не меняется. Можно облегчить формулирование ответа, использовав знаковый портрет функции $f(x)$ (методика использования знакового портрета подробно изложена в гл.3, посвященной решению неравенств). Так как аргумент тригонометрических функций измеряется в радианах (или градусах), удобно использвать линейную замену переменных при рисовании графика, с тем, чтобы привести характерные точки к целочисленным значениям. Например, использовать в качестве единицы измерения на оси абсцисс величину $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{12} = 15°$, или аналогичную. На рис. 14 показан график функции $f(x)$ в единицах $\frac{\pi}{12} = 15°$. Можно сказать, что на этом рисунке показан график функции $\tilde{f}(x) = f(\frac{\pi x}{12})$. При этом точки перемены знака принимают целочисленные значения $\{0; 2; 4; 6; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 18; 20; 22\}$. Значения $\{6; 18\}$ укаазаны по два раза, так как присутствуют в двух сериях каждое. В этих точках функция имеет корень, но не меняет знак. На рис. 15а показан знаковый портрет той же функции на тригонометрическом круге. Положительные значения изображены вне окружности радиуса 1, отрицательные — внутри. На наш взгляд, если рассматриваемая функция имеет период 2π, то использование знакового портрета на тригонометрическом круге более предпочтительно, однако выбор способа отображения Вы должны сделать для себя самостоятельно. ■

11.1.3.2. Уравнения вида $\cos ax = \cos bx$

Теоретические сведения Используя формулу для разности косинусов, $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$, можно разложить уравнение



a



b

Рис. 15. Знаковый портрет на тригонометрическом круге

$\cos ax = \cos bx$, $a \neq b$, на элементарные множители. Решая каждое из получившихся элементарных уравнений, получим две серии,
$(a-b)x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $(a+b)x = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Следует проверить возможность совпадения некоторых корней двух получившихся серий.

488. Решите уравнение $(\star)$ $\cos 5x + \cos 7x = 0$ и укажите количество корней на промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 11 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 13 $\boxed{\mathbf{4}}$ 14 $\boxed{\mathbf{5}}$ 15

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 14 корней.

Решение. Используем в левой части $(\star)$ формулу сложения для косинусов, $2\cos 6x \cos x = 0$. Все корни уравнения $(\star)$ содержатся в двух сериях, $(\ddagger)$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $(\ddagger\ddagger)$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}, m \in \mathbf{Z}$, причем некоторые корни двух серий могут совпадать. Исследуем вопрос о наличии совпадающих корней, $\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}$, $(\star\star)$ $5 + 12n = 2m$. Таким образом, совпадающих корней нет, так как слева в $(\star\star)$ стоит нечетное число, а справа — четное. Общее число различных корней на указанном промежутке будет равно сумме количества корней в каждой серии. В первой серии $(\ddagger)$ на промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$ имеется 2 корня. Во второй серии (‡‡) имеется 12 корней, всего 14 корней. ■

489. Множество всех решений неравенства $(\star)$ $\cos 5x + \cos 7x \geqslant 0$ на промежутке $x \in [0;\, 2\pi]$ можно представить в виде обьединения непересекающихся промежутков. Укажите наимньшее количество таких промежутков.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ 8 $\boxed{\mathbf{4}}$ 9 $\boxed{\mathbf{5}}$ 10

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in$
$2\pi n + \{[0;\, \pi/12] \bigcup [3\pi/12;\, 5\pi/12] \bigcup [6\pi/12;\, 7\pi/12] \bigcup [9\pi/12;\, 11\pi/12] \bigcup [13\pi/12;\, 15\pi/12] \bigcup [17\pi/12;\, 18\pi/12] \bigcup [19\pi/12;\, 21\pi/12]\} \bigcup [23\pi/12;\, 2\pi]\}.$

Решение. Используем результаты решения предыдущей задачи. В каждой точке (‡) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, (‡‡) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}, m \in \mathbf{Z}$, левая часть неравенства $(\star)$ меняет свой знак, причем совпадающих точек в двух указанных множествах нет. Расположив точки с неотрицательными координатами из указанных множеств в порядке возрастания, получим набор $x \in \left\{\frac{\pi}{12};\, \frac{3\pi}{12};\, \frac{5\pi}{12};\, \frac{6\pi}{12};\, \frac{7\pi}{12};\, \frac{9\pi}{12};\, \frac{11\pi}{12};\, \frac{13\pi}{12};\, \frac{15\pi}{12};\, \frac{17\pi}{12};\, \frac{18\pi}{12};\, \frac{19\pi}{12};\, \frac{21\pi}{12};\, \frac{23\pi}{12}\right\}$. В точке $x = 0$ левая часть $(\star)$ положительна, поэтому каждая точка промежутка, начинающиегося в точке $\frac{23\pi}{12} - 2\pi$, и кончающегося в точке $\frac{\pi}{12}$, является решением. Дальше следует пропустить один промежуток и взять следующий и т.д. Можно облегчить формулирование ответа, использовав знаковый портрет функции $f(x)$ (методика использования знакового портрета подробно изложена в гл.3, посвященной решению неравенств). Так как аргумент тригонометрических функций измеряется в радианах (или градусах), удобно использвать линейную замену переменных при рисовании графика, с тем, чтобы привести характерные точки к целочисленным значениям. Например, использовать в качестве единицы измерения на оси абсцисс величину $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$, или аналогичную. На рис. 16 показан график функции $f(x)$ в единицах $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$. Можно сказать, что на этом рисунке показан график функции $\tilde{f}(x) = f(\frac{\pi x}{12})$. При этом точки перемены знака принимают целочисленные значения $\{1;\, 3;\, 5;\, 6;\, 7;\, 9;\, 11;\, 13;\, 15;\, 17;\, 18;\, 19;\, 21;\, 23\}$. На рис. 15 показан знаковый портрет той же функции на тригонометрическом круге. Положительные значения изображены вне окружности радиуса 1, отрицательные — внутри. ■

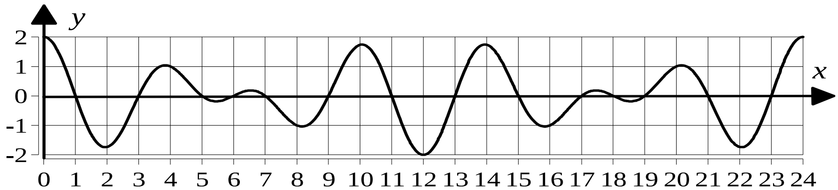


Рис. 16. Знаковый портрет функции $\tilde{f}(x) = f(\frac{\pi x}{12})$,
$f(x) = \cos 5x + \cos 7x$.

11.2. Алгебраические уравнения

11.2.1. Квадратные тригонометрические уравнения

490. Решите уравнение $\sin^2 x = 0{,}5$.
♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

Решение 1. Уравнение равносильно совокупности $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Обьединяем 4 серии, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{-3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, в одну серию $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. ■

Решение 2. Используем метод понижения порядка, $\frac{1-\cos 2x}{2} = 0{,}5$,
$\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Этот способ более эффективен. ■

491. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$.
♦ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. $\operatorname{ctg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, ■ $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi n$.

492. Решите уравнение $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.
♦ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Выполним замену $\cos x = t$ и решим квадратное уравнение
$2t^2 - 5t + 2 = 0$. Получим $t \in \{2;\ 0{,}5\}$. Уравнение $\cos x = 2$ корней не имеет. ■

493. Решите уравнение $13\sin 2x - \cos 4x + 7 = 0$.
♦ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Преобразование $\cos 4x = 1 - 2\sin^2(2x)$ приводит к квадратному уравнению $2t^2 + 13t + 6 = 0$, где $t = \sin x$. Один из его корней $t_1 = -0{,}5$, второй корень $t_2 < -1$. ■

494. Решите уравнение $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 2$.
♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Решение. Замена $\operatorname{tg} x = t$ приводит к квадратному уравнению $t - \frac{3}{t} = 2$, корни которого $t \in \{-1;\ 3\}$ ■

495. Решите уравнение $2\sin^2 2x + 7\cos^2 x - 7\sin^2 x = 7$.
♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Использование формулы косинуса двойного угла приводит к уравнению $2 - 2\cos^2 2x + 7\cos 2x - 7 = 0$. ■

11.2.2. Тригонометрические уравнения старших степеней

496. Решите уравнение $4\sin^3 x + 4\cos^2 x = 1 + 3\sin x$.
Решение. Используем замену переменной $\sin x = z$ и приведем уравнение к кубическому уравнению $4z^3 - 4z^2 - 3z + 3 = 0$. Решая методом разложения на множители, получим $z = 1$; $z = \pm\sqrt{3}/2$. ■ ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

497. Решите уравнение $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.
♦ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = (-1)^m \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Решение. Для того, чтобы разложить уравнение на множители, сгруппируем два первых слагаемых, а в третьем слагаемом используем основное тригонометрическое тождество, $\sin x(\sin x + 1) + (1 - \sin^2 x)\cos x = 0$.
$(\sin x + 1)\big(\sin x + (1 - \sin x)\cos x\big) = 0$,
$(\sin x + 1)\big(\sin x + \cos x - \sin x\cos x\big) = 0$. Выполним замену $t = \sin x + \cos x$, $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$, получим квадратное уравнение $t - \frac{t^2-1}{2} = 0$, $t^2 - 2t - 1 = 0$, два корня которого равны $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Теперь выполним обратную замену, $\sin x + \cos x = t \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, поэтому только один корень $t = 1 - \sqrt{2}$ приводит к разрешимому уравнению, $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}$, $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

498. Решите уравнение $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.
♦ $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Приведем уравнение к виду $2\cos^2 x+2\sin x\cos x+(\sin x+\cos x)=0$,
после чего разложим на множители, $(2\cos x+1)(\sin x+\cos x)=0$. ■

11.3. Основные методы

11.3.1. Применение формул двойного угла

499. Решите уравнение $\sin 2x+2\sin x=0$.
♦ $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решение. Используя формулу синуса двойного угла, получим совокупность уравнений $(\star)$ $\sin x=0$ и $(\star\star)$ $\cos x=-1$, причем все корни уравнения $(\star\star)$ являются также корнями уравнения $(\star)$. ■

500. Укажите все корни уравнения $2\cos x\cdot(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x)-1=\sqrt{3}\operatorname{ctg} x$.

$\boxed{1}$ $-\frac{\pi}{3}+\pi n$ $\boxed{2}$ $\frac{\pi}{3}+\pi n$ $\boxed{3}$ $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$ $\boxed{4}$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$
$\boxed{5}$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

Решение. Разложим уравнение на множители, $(2\cos x-1)(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x)=0$. Каждый из двух множителей порождает серию корней,
$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, $x=\frac{2\pi}{3}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$. Для корректной записи ответа нужно заметить, что две серии имеют общие элементы
$x=\frac{2\pi}{3}+\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, которые следует исключить из второй серии. ■

501. Решите уравнение $16\sin x-\sin 2x=1-\cos 2x$.
♦ $x=\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Решение. После разложения на множители получается уравнение
$\sin x(16-2\cos x-2\sin x)=0$, равносильное совокупности уравнений $(\star)$ $\sin x=0$ и $(\star\star)$ $16=2\cos x+2\sin x$, причем $(\star\star)$

корней не имеет, так как множество значений правой части $2\cos x + 2\sin x \in [-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}]$ не содержит числа 16. ■

502. Решите уравнение $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$.

♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}, \quad x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Решение. Сложим два первых слагаемых,
$2\sin 2x\cos x - 2\sin x\cos x - 2\cos x(\cos x - 1) = 0$. Теперь можно разложить уравнение на множители, $2\cos x((\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)) = 0$. Уравнение $\sin x + \cos x = 0$ относится к классу однородных уравнений первого порядка, его корни $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. Уравнение $\sin x + \cos x = 1$ решается методом вспомогательного угла, его корни $x = 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

503. Решите уравнение $4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x$.

♦ $\frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем формулу синуса двойного угла в правой части,
$2\sin 2x(2\sin x \cdot \sin 3x - \cos 2x) = 0$. Теперь используем формулу умножения синусов, $2\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$, равносильное совокупности уравнений $\sin 2x = 0$, $2x = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, и $\cos 4x = 0$, $4x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

504. Решите уравнение $\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\sin 2x}$.

♦ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Заметим, что $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$. Уравнение является тождеством. ■

11.3.2. Преобразование произведения в сумму

505. Решите уравнение $(\star)$ $\cos 3x + 2\sin x \cdot \sin 2x = 0$.

♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Преобразуем произведение в сумму, $\cos 3x + \cos x - \cos 3x = 0$, поэтому $(\star)$ равносильно уравнению $\cos x = 0$. ■

506. Решите уравнение $\cos 13x \cdot \cos 16x = \cos 14x \cdot \cos 17x$.

♦ $x = \frac{\pi n}{30}, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Пребразуем произведение в сумму в левой и правой частях,
$\cos 3x - \cos 29x = \cos 3x - \cos 31x$, поэтому $\cos 31x - \cos 29x =$

0. Теперь пребразуем сумму в произведение, $2\sin 30x \sin x = 0$. Вторая серия целиком включена в первую серию. ■

507. Решите уравнение $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x=\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x=\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$.

Решение. Пребразуем произведение в сумму в левой части, $-\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}=1$, поэтому $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

11.3.3. Преобразование суммы в произведение

508. Решите уравнение $\cos 3x+2\cos x=0$.
♦ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(\cos 3x+\cos x)+\cos x=0$, и преобразуем сумму в скобках в произведение, $2\cos x\cos 2x+\cos x=0$, разложим на множители $2\cos x(\cos 2x+\frac{1}{2})=0$, и запишем корни каждого из уравнений, $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $2x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi m$. ■

509. Решите уравнение $\sin 53x+\sin 11x=\sin 32x$.
♦ $x=\frac{\pi n}{32}, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{63}+\frac{2\pi m}{21}, m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Применив формулу преобразования суммы в произведение, приведем уравнение к виду $2\sin 32x\left(\cos 21x-\frac{1}{2}\right)=0$. ■

510. Решите уравнение $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.
♦ $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$, $\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Группируя слагаемые, получим последовательно $2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$, $\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\right)=0$, $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos x=0$. Все корни содержатся в трех сериях, $(\star)$ $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $(\star\star)$ $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathbf{Z}$, $(\star\star\star)$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$. Все корни серии $(\star)$ содержатся в серии $(\star\star)$. ■

511. Решите уравнение $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.
♦ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi m}{5}, m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Группируя слагаемые, получим последовательно $-2\sin 8x\sin x - 2\sin 2x\sin x = 0$, $\sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0$, $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \cos 3x = 0$. Все корни содержатся в трех сериях, $(\star)$ $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $(\star\star)$ $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $(\star\star\star)$ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$. Все корни серии $(\star)$ содержатся в серии $(\star\star)$. ■

512. Найдите сумму S всех различных корней уравнения $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x = 0$ на промежутке $x \in (0; 2\pi)$ и укажите значение величины $\frac{2S}{\pi}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 16 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 18 $\boxed{\mathbf{4}}$ 24 $\boxed{\mathbf{5}}$ 22

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x = \frac{\pi k}{10}$, $k \in \{3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19\}$.

Решение. Сгруппируем слагаемые, $(\sin x + \sin 3x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 0$. Используя формулы сложения для синусов и косинусов, преобразуем уравнение к виду $2\sin 2x\cos x + 2\cos 3x\cos x = 0$. Таким образом, левую часть можно разложить на множтели, $2\cos x(\sin 2x + \cos 3x) = 0$. Левая часть может быть равна нулю в двух случаях,

(1) $\cos x = 0$, $(\ddagger)$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, и

(2) $\sin 2x + \cos 3x = 0$. Используя формулы приведения, заменим $\sin 3x$ на тождественно равное выражение $\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$, получим уравнение

$\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \cos 3x = 0$. Сложим косинусы, $2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}) = 0$. Опять придется рассмотреть два случая,

(3) $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) = 0$, $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$, все корни этой серии включены в ранее полученную серию $(\ddagger)$, и

(4) $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}) = 0$, $\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, $\frac{5x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $(\ddagger\ddagger)$ $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$. Найдем общие корни двух серий, $\frac{\pi}{2} + \pi m = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $5 + 10m = -1 + 4k$, $10m + 6 = 4k$, $5m + 3 = 2k$, $m = 2j + 1$, $10j + 8 = 2k$, $5j + 4 = k$. Таким образом, следует оставить целиком вторую серию $(\ddagger\ddagger)$, $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, а из первой серии оставить только четные значения $m = 2j$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m. m \in \mathbf{Z}$. Величина $\frac{10x}{\pi}$ принимает значения $\{3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19\}$, сумма которых равна 60. Следовательно, $\frac{10S}{\pi} = 60$, $\frac{2S}{\pi} = 12$. ■

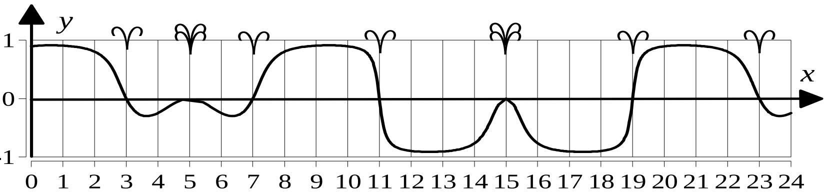


Рис. 17. Знаковый портрет функции $\tilde{f}(x) = f(\frac{\pi x}{10})$,
$f(x) = \sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x$.

513. Найдите сумму S всех различных целочисленных решений неравенства $(\star)$ $\sin\frac{\pi x}{10} + \cos\frac{2\pi x}{10} + \sin\frac{3\pi x}{10} + \cos\frac{4\pi x}{10} \geqslant 0$ на промежутке $x \in [0;\, 20]$ и укажите остаток от деления величины S на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x \in \{0; \ldots; 3\} \bigcup \{5\} \bigcup \{7; \ldots; 11\} \bigcup \{15\} \bigcup \{19;\, 20\}$.

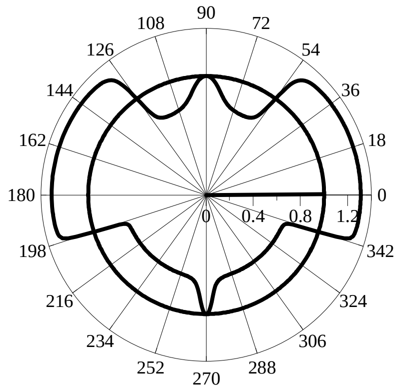
Решение. Используем результаты решения предыдущей задачи. Левая часть $(\star)$ равна произведению трех функций, которые меняют знак на промежутке $x \in [0;\, 20]$ в точках соответcпвенно **(1)** $x = 5 + 10n$, $n \in \{0;\, 1\}$, **(2)** $x = 5 + 20m$, $m = 0$, **(3)** $x = 3 + 4k$, $k \in \{0; \ldots; 4\}$. Общие корни первых двух серий $x = 5$, а у первой и третьей серии $x = 15$. Знак левой части меняется в точках $x \in \{3;\, 7;\, 11;\, 19\}$, и не меняется в точках $x \in \{5;\, 15\}$, в которых эта функция имеет корни. Знаковый портрет показан на рис. 17, рис. 18а. ■

514. Наименьший положительный корень уравнения
$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$ принадлежит промежутку

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (0;\, \frac{\pi}{6})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [\frac{\pi}{6};\, \frac{\pi}{4})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [\frac{\pi}{4};\, \frac{\pi}{3})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [\frac{\pi}{3};\, \frac{\pi}{2})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [\frac{\pi}{2};\, \frac{7\pi}{4})$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x = \frac{\pi m}{5}$.

Решение. Сгруппируем пару крайних и пару средних слагаемых и используем формулы сложения для тангенсов, $\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} - \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0$. Уравнение раскладывается на множители,



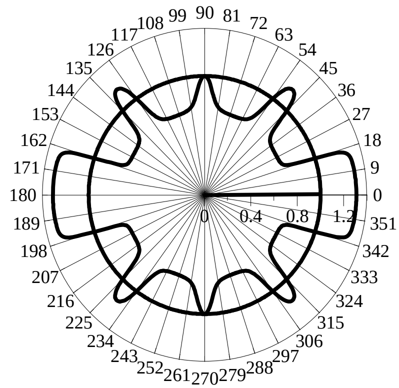


Рис. 18. Знаковый портрет на тригонометрическом круге

$\sin 5x \frac{-\cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x}{\cos x \cos 4x \cos 2x \cos 3x} = 0$, $\sin 5x \frac{-\cos 5x - \cos 3x + \cos 5x + \cos x}{2 \cos x \cos 4x \cos 2x \cos 3x} = 0$, $\sin 5x \frac{\sin 2x \sin x}{2 \cos x \cos 4x \cos 2x \cos 3x} = 0$.

(1) $\sin 5x = 0$, $(\star)$ $x = \frac{\pi n}{5}$. Корнями будут только те значения x, при которых знаменатель не обращается в нуль. Равенство $k\frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m$, или $2kn = 5 + 10m$ при $m \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$ не может быть верным, так как слева и справа стоят целые числа разной четности. Поэтому все числа $(\star)$ — корни.

(2) $\sin 2x = 0$, $(\star\star)$ $x = \frac{\pi n}{2}$. В этой серии значения с нечетными n не являются корнями, так как обращают знаменатеоь в нуль, а четные n уже вошли в серию $(\star)$. **(3)** $\sin x = 0$, $(\star\star)$ $x = \pi n$ вошли в серию $(\star)$.

Можно в числителе преобразовать тождественно $\sin 2x \sin x = 2\sin^2 x \cos x$, тогда сразу получим единственную серию $x = \pi k$, все корни которой вошли в серию $(\star)$. ■

515. Пусть число z равно второму по величине положительному корню уравнения $3\sin 7x - 14\sin 5x + 32\sin 3x - 47\sin x = 0$. Укажите верное утверждение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $z \in (0;\ \frac{\pi}{12})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $z \in [\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{8})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $z \in [\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{6})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $z \in [\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $z \in [\frac{\pi}{4};\ \pi)$

Ответ $\boxed{4}$♦ $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} \in (\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4})$.

Решение. Заметим, что в левой части присутствуют синусы от углов, образующих арифметическую прогрессию, пропорциональную числам $1; 3; 5; 7$. Преобразуем уравнение к виду
$3(\sin 7x - \sin 5x) - 11(\sin 5x - \sin 3x) + 21(\sin 3x - \sin x) - 26\sin x = 0$.
Применим формулу сложения для синусов,
$2\sin x(3\cos 6x - 11\cos 4x + 21\cos 2x - 13) = 0$,
и выполним замену $t = \cos 2x$. Получим кубическое уравнение $3(4t^3 - 3t) - 11(2t^2 - 1) + 21t - 13 = 0$, которое после приведения подобных примет вид $12t^3 - 22t^2 + 12t - 2 = 0$, $6t^3 - 11t^2 + 6t - 1 = 0$. Один из корней равен 1, остальные найдем из квадратного уравнения, $t \in \{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\}$. Осталось решить три элементарных уравнения,
(1) $\cos 2x = 1$, $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, **(2)** $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, **(3)** $\cos 2x = \frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

516. Пусть число y равно наименьшему положительному корню уравнения $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{ctg} 3x + 4\operatorname{ctg} 4x = 0$ и $z = 5\cos 2y$. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $z \in (0;\ 1{,}11)$ $\boxed{2}$ $z \in [1{,}11;\ 1{,}33)$ $\boxed{3}$ $z \in [1{,}33;\ 1{,}66)$
$\boxed{4}$ $z \in [1{,}66;\ 1{,}88)$ $\boxed{5}$ $z \in [1{,}88;\ 999)$

Ответ $\boxed{4}$♦ $y = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n$.

Решение. Используем тождество $\operatorname{tg} z + 2\operatorname{ctg} 2z = \operatorname{ctg} z$. Получим $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x + 2\operatorname{ctg} 2x = 0$. Еще раз используем то же тождество, $\operatorname{ctg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = 0$. Приведем к общему знаменателю, $\frac{\cos x\sin 3x + 5\cos 3x\sin x}{\sin x\sin 3x} = 0$. В числителе преобразуем произведение в сумму,
$\sin 2x + \sin 4x + 5\sin 4x - 5\sin 2x = 0$, приведем подобные,
$6\sin 4x - 4\sin 2x = 0$, $3\sin 4x - 2\sin 2x = 0$, используем формулу синуса двойного угла, $3\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0$, $\sin 2x(3\cos 2x - 1) = 0$. Так как исходное уравнение включает котангенс двойного угла, то $\sin 2x \neq 0$, поэтому множество всех корней совпадает с множеством всех корней уравнения $\cos 2x = \frac{1}{3}$. ■

11.4. Задачи для самостоятельного решения

11.4.0.1. Элементарные тригонометрические уравнения, 1

517. Решите уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

518. Решите уравнение $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

1 $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ **2** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ **3** $\pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$ **4** $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$
5 $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

519. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{12}{13}} + \sqrt{\frac{13}{12}}\right)$ на промежутке $x \in [0;\ 2\pi]$?

1 один **2** два **3** три **4** четыре **5** корней нет

520. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

521. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

522. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 7 **2** 8 **3** 9 **4** 4 **5** 5

523. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 7 **2** 8 **3** 9 **4** 4 **5** 5

524. Наименьший положительный корень уравнения $\sin x = \sin 5$ принадлежит промежутку

1 $[5;\ 10]$ **2** $[4,5;\ 5)$ **3** $[4;\ 4,5)$ **4** $[2;\ 4)$ **5** $[0;\ 2)$

525. Укажите количество корней уравнения $\sin x = -1 + \frac{4x}{5\pi}$.

1 корней нет **2** один **3** два **4** три **5** четыре

526. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

527. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

528. Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

$\boxed{1}$ корней нет $\boxed{2}$ $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{3}$ $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n$
$\boxed{4}$ $(-1)^n \sin\frac{1}{2}+\pi n$ $\boxed{5}$ $(-1)^n\frac{1}{2}+\pi n, n\in \mathbf{Z}$

529. Решите уравнение $\cos x = -\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{1}$ $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$ $\boxed{2}$ $\pm(\pi-\arccos\frac{\pi}{6})+2\pi n$ $\boxed{3}$ $\pm\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$
$\boxed{4}$ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$ $\boxed{5}$ корней нет

530. Решите уравнение $\sin x = \sin 1$.

531. Укажите количество корней уравнения $\sin x = \sin 2$ на промежутке $-13 < x < 13$.

532. Решите уравнение $\sin x = \cos 2$.

533. Решите уравнение $\cos x = \sin 1$.

534. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2$.

535. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2$.

536. Все корни уравнения $2\sin^2 65^\circ\cdot\sin x = \sin 40^\circ + \sin^2 25^\circ$ образуют множество

$\boxed{1}$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $\boxed{2}$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $\boxed{3}$ $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{4}$ $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$
$\boxed{5}$ $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

537. Решите уравнение $1+\sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

538. Решите уравнение $\cos x = \cos 4x$.

539. Сумма всех корней уравнения $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 7x$ на промежутке $[0;\,\pi]$ равна

$\boxed{1}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{2}$ 2π $\boxed{3}$ π $\boxed{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\boxed{5}$ $\frac{2\pi}{3}$

540. Решите уравнение $\frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin 2x}$.

11.4.0.2. Элементарные тригонометрические уравнения, 2

541. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

542. Решите уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

543. Решите уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ $\boxed{2}$ $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ $\boxed{3}$ $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{4}$ $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$
$\boxed{5}$ $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

544. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{12}{13}} + \sqrt{\frac{14}{13}}\right)$ на промежутке $x \in [0;\ 2\pi]$?

$\boxed{1}$ один $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ корней нет

545. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

546. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

547. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ 7 $\boxed{2}$ 8 $\boxed{3}$ 9 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

548. Наименьший положительный корень уравнения $\cos x = \cos 5$ принадлежит промежутку

$\boxed{1}$ $[0;\ 0,5)$ $\boxed{2}$ $[0,5;\ 1)$ $\boxed{3}$ $[1;\ 1,25)$ $\boxed{4}$ $[1,25;\ 1,5)$ $\boxed{5}$ $[1,5;\ 6]$

549. Укажите количество корней уравнения $\cos x = 1 - \frac{2x}{3\pi}$.

$\boxed{1}$ один $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять

550. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{8\sqrt{65} - 8\sqrt{63}}$.

551. Решите уравнение $\cos x = 4\left(\sqrt{17} - \sqrt{15}\right)$.

552. Решите уравнение $\cos x = 256\left(\sqrt{17} + \sqrt{15} - 8\right)$.

553. Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{1}$ корней нет $\boxed{2}$ $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{3}$ $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n$
$\boxed{4}$ $(-1)^n \sin\frac{1}{2} + \pi n$ $\boxed{5}$ $(-1)^n\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

554. Решите уравнение $\cos x = -\frac{2\pi}{3}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\pm(\pi-\arccos\frac{2\pi}{3})+2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\pm\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ корней нет

555. Решите уравнение $\sin x = \sin 2$.

556. Решите уравнение $\cos x = \cos 1$.

557. Решите уравнение $\cos x + \cos 2 = 0$.

558. Укажите количество корней уравнения $\sin x = \sin 3$ на промежутке $-11 < x < 11$.

559. Сумма корней уравнения $\cos \pi x = -\frac{1}{2}$, принадлежащих промежутку $(-2;\ 1)$ равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ -2 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-1,(3)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 0 $\boxed{\mathbf{4}}$ $1,(3)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 2

560. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

561. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 0$.

562. Решите уравнение $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$.

563. Все корни уравнения $2\sin^2 115^\circ\cdot\cos x = \cos 50^\circ + \cos^2 65^\circ$ образуют множество
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

564. Решите уравнение $1-\sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

565. Сумма всех корней уравнения $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} 7x$ на промежутке $[0;\ \pi]$ равна
$\boxed{\mathbf{1}}$ π $\boxed{\mathbf{2}}$ 2π $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{3\pi}{3}$

11.4.0.3. Разложение на множители, 1

566. Решите уравнение $\sin 2x = \sin x$.

567. Решите уравнение $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$.

568. Решите уравнение $\sin 2x - 2\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0$.

569. Решите уравнение $\sin 2x + \sin x + 2\cos x = \cos 2x$. $(\sin x + 1) + 2\cos x(\sin x+1) - 2(1-\sin x)(1+\sin x) = 0$.

570. Решите уравнение $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ $(1+\cos 2x)+2\sin x\cos x+(\cos x+\sin x)=0$.

571. Решить уравнение: $\frac{1}{\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}2x}-\frac{1}{\operatorname{ctg}5x+\operatorname{ctg}2x}=\operatorname{tg}3x$.

11.4.0.4. Разложение на множители, 2

572. Решите уравнение $\sin 2x=4\cos x$.

573. Решите уравнение $\sin 2x+\sin x=2\cos x+1$.

574. Решите уравнение $\sin 2x+1=2\cos^2\frac{x}{2}$.

575. Решите уравнение $(\cos x-\sin x)^2-0{,}5\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$.

576. Решите уравнение $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=\cos 2x$. $\frac{\sin^3 x(\sin x+\cos x)}{\sin x}+\frac{\cos^3 x(\sin x+\cos x)}{\cos x}=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$.

577. Решить уравнение: $\frac{1}{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x}-\frac{1}{\operatorname{ctg}3x+\operatorname{ctg}4x}=-\operatorname{ctg}^2 7x$.

11.4.0.5. Преобразование суммы в произведение, 1

578. Решите уравнение $\sin 2x=\sin 5x$.

579. Решите уравнение $\sin x=\sin 5x$.

580. Решите уравнение $\cos x=\cos 3x$.

581. Решите уравнение $\cos 5x=\cos 4x$.

582. Решите уравнение $\sin x=\cos 5x$.

583. Решите уравнение $\sin 3x+\cos 11x=0$.

584. Решите уравнение $\cos(x+1)=\cos(x-1)$.

585. Решите уравнение $\sin(x+7\pi)=\sin(x-3\pi)$.

586. Решите уравнение $\sin(x-3)=\sin(x-5)$.

587. Решите уравнение $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

588. Решите уравнение $\sin 11x+2\sin 12x=-\sin 13x$.

589. Решите уравнение $\cos x+\cos 5x=\cos 3x+\cos 7x$.

590. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

591. Если число p равно наименьшему положительному корню уравнения $\cos(2004x)+\cos(1378x)=0$, то значение выражения

$\frac{2\pi}{p}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

592. Если число $\mathcal{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $\sin(362x) + \sin(238x) + \sin(600x) = 0$, то значение выражения $\frac{\pi}{\mathcal{X}}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

593. Если x — наименьший положительный корень уравнения $\sin(13x) + \sin(22x) = \sin(17x) + \sin(26x)$, то значение выражения $\frac{\pi}{x}$ является натуральным числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

11.4.0.6. Преобразование суммы в произведение, 2

594. Решите уравнение $\cos 2x = \cos 7x$.

595. Решите уравнение $\cos 5x = \cos 7x$.

596. Решите уравнение $\sin 4x + \cos 10x = 0$.

597. Решите уравнение $\sin(x + 1) = \sin(x - 1)$.

598. Решите уравнение $\cos(x + 5) = \sin(x - 3)$.

599. Решите уравнение $\sin(x + 3) = \sin(x - 5)$.

600. Решите уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

601. Решите уравнение $\cos 5x + \cos 7x = -\cos 6x$.

602. Решите уравнение $\sin x + \sin 5x = \sin 3x + \sin 7x$.

603. Решите уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

604. Если число p равно наименьшему положительному корню уравнения $\cos(2004\,x) + \cos(1671\,x) = 0$, то значение выражения $\frac{2\pi}{p}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

605. Если число $\mathcal{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $\sin(473x) + \sin(227x) + \sin(700x) = 0$, то значение выражения $\frac{\pi}{\mathcal{X}}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

606. Если x — наименьший положительный корень уравнения $\sin(15x) + \sin(22x) = \sin(18x) + \sin(25x)$, то значение выражения $\frac{\pi}{x}$ является натуральным числом, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

11.4.0.7. Преобразование произведения в сумму, 1

607. Решите уравнение $\cos 4x = \cos 7x \cdot \cos 3x$.

608. Решите уравнение $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

609. Решите уравнение $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$.

610. Решите уравнение $2 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x$.

11.4.0.8. Преобразование произведения в сумму, 2

611. Решите уравнение $\sin 5x = \sin 3x \cdot \cos 2x$.

612. Решите уравнение $\cos 7x + \sin 3x \cdot \sin 4x = 0$.

613. Решите уравнение $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

614. Решите уравнение $\cos 4x \cos 5x = \cos 6x \cos 7x$.

11.4.0.9. Квадратные тригонометрические уравнения, 1

615. Решите уравнение $\sin^2 x = 0{,}25$.

616. Решите уравнение $2 \sin^2 x + 19 \sin x - 10 = 0$.

617. Решите уравнение $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

618. Решите уравнение $4 \sin^2 x + \cos x - 3,5 = 0$.

619. Решите уравнение $6 \cos^2 x + \sin x - 5 = 0$.

620. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 15 \cos x - 8 = 0$.

621. Решите уравнение $14 \sin^2 x + \cos 4x - 10 = 0$.

622. Решите уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

623. Решите уравнение $\cos 2x + \sin x = 0$.

624. Решите уравнение $\cos 2x - 2\sin^2 x = 0$.

625. Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.

626. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

627. Решите уравнение $2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 1$.

628. Решите уравнение $2\operatorname{tg}^4 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$.

629. Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$.

630. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$.

631. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{ctg}^2 x = 4$.

632. Если x_2 — второй по величине положительный корень уравнения $\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 0{,}25$, то
$\boxed{1}$ $x_2 \in (0;\ 8,1)$ $\boxed{2}$ $x_2 \in [8,1;\ 9,2)$ $\boxed{3}$ $x_2 \in [9,2;\ 10{,}3)$
$\boxed{4}$ $x_2 \in [10{,}3;\ 11,4)$ $\boxed{5}$ $x_2 \in [11,4;\ 999)$

633. Наименьший положительный корень уравнения $2\sin^2 x + \sqrt{27}\sin x + 3 = 0$ принадлежит промежутку
$\boxed{1}$ $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ $\boxed{2}$ $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ $\boxed{3}$ $x \in \left(\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right]$ $\boxed{4}$ $x \in \left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right]$
$\boxed{5}$ $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$

634. Все корни уравнения $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$ образуют множество
$\boxed{1}$ $(-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m$ $\boxed{2}$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ $\boxed{3}$ $(-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m;\ (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m$
$\boxed{4}$ $(-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m$ $\boxed{5}$ $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$

11.4.0.10. Квадратные тригонометрические уравнения, 2

635. Решите уравнение $\sin^2 x = 0{,}75$.

636. Решите уравнение $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$.

637. Решите уравнение $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$.

638. Решите уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

639. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

640. Решите уравнение $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

641. Решите уравнение $6\sin^2 x - \cos x - 5 = 0$.

642. Решите уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

643. Решите уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$.

644. Решите уравнение $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$.

645. Решите уравнение $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

646. Решите уравнение $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$.

647. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} = 25$.

648. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x = 3$.

649. Решите уравнение $3\operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$.

650. Решите уравнение $\frac{3}{\sin^2 x} = 2\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 6$.

651. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2$.

652. Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 12$.

653. Если x_2 — второй по величине положительный корень уравнения $\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 0{,}75$, то
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x_2 \in (0;\ 8,1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x_2 \in [8,1;\ 9,2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x_2 \in [9,2;\ 10{,}3)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x_2 \in [10{,}3;\ 11,4)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x_2 \in [11,4;\ 999)$

654. Наименьший положительный корень уравнения $2\sin^2 x + \sqrt{18}\sin x + 2 = 0$ принадлежит промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in \left[\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in \left[\frac{5\pi}{4};\ 2\pi\right]$

655. Все корни уравнения $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ образуют множество
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{5\pi}{3} + 2\pi m$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{2\pi}{3} + \pi m$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$

11.4.0.11. Однородные тригонометрические уравнения, 1

656. Решите уравнение $\sin x = \cos x$.

657. Решите уравнение $5\sin 3x = 2\cos 3x$.

658. Решите уравнение $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$.

659. Решите уравнение $\cos^2 x + 2\sin 2x = 2$.

660. Решите уравнение $22\sin^2 7x - 3\sin 14x + 10\cos^2 7x = 10$.

661. Решите уравнение $4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$.

662. Решите уравнение
$\sin^4 2x + \sin^3 2x\cos 2x - 8\sin 2x\cos^3 2x - 8\cos^4 2x = 0$.

663. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

664. Решите уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

665. Укажите сумму всех корней уравнения $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$, принадлежащих отрезку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.
1 $\frac{\pi}{3}$ **2** $\frac{2\pi}{3}$ **3** π **4** $\frac{4\pi}{3}$ **5** $\frac{5\pi}{3}$

11.4.0.12. Однородные тригонометрические уравнения, 2

666. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

667. Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

668. Решите уравнение $2\cos^2 x + \sin 2x = 2$.

669. Решите уравнение $\cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

670. Решите уравнение $\sin^6 x + \sin^4 x\cos^2 x = \sin^3 x\cos^3 x + \sin x\cos^5 x$.

671. Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

672. Укажите сумму всех корней уравнения $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$, принадлежащих отрезку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.
1 $\frac{\pi}{3}$ **2** $\frac{2\pi}{3}$ **3** π **4** $\frac{4\pi}{3}$ **5** $\frac{5\pi}{3}$

11.4.0.13. Сложные тригонометрические уравнения, 1

673. Пусть число y равно наименьшему положительному корню уравнения $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 7\operatorname{ctg} 3x + 4\operatorname{ctg} 4x = 0$ и $z = 3\cos 2y$. Укажите верное утверждение.
1 $z \in (0;\ 1{,}11)$ **2** $z \in [1{,}11;\ 1{,}22)$ **3** $z \in [1{,}22;\ 1{,}33)$
4 $z \in [1{,}33;\ 1{,}44)$ **5** $z \in [1{,}44;\ 999)$

674. Пусть число z равно второму по величине положительному корню уравнения $7\sin 3x + 6\sin 9x + 5\sin 15x + 4\sin 21x = 0$. Укажите верное утверждение.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $z \in (0;\ \frac{5\pi}{12})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $z \in [\frac{5\pi}{12};\ \frac{7\pi}{12})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $z \in [\frac{7\pi}{12};\ \frac{9\pi}{12})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $z \in [\frac{9\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $z \in [\frac{11\pi}{12};\ 2\pi)$

675. Решите уравнение $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

11.4.0.14. Сложные тригонометрические уравнения, 2

676. Решите уравнение $3\sin x + 4\sin 3x + 2\sin 5x + \sin 7x = 0$.

677. Пусть число y равно наименьшему положительному корню уравнения $18\sin 7x - 67\sin 5x + 131\sin 3x - 184\sin x = 0$ и $z = 10\cos 2y$. Укажите верное утверждение.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $z \in (0;\ 0{,}55)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $z \in [0{,}55;\ 0{,}77)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $z \in [0{,}77;\ 0{,}99)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $z \in [0{,}99;\ 1{,}11)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $z \in [1{,}11;\ 999)$

678. Решите уравнение $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^3 x - 6\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Ответы

11.4.0.15. Элементарные тригонометрические уравнения, 1

517. ♦ $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **518.** $\boxed{2}$ **519.** $\boxed{5}$ **520.** $\boxed{2}$
521. $\boxed{3}$ **522.** $\boxed{5}$ **523.** $\boxed{2}$ **524.** $\boxed{3}$ **525.** $\boxed{4}$
526. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ **527**. ♦ Корней нет.
528. $\boxed{1}$ **529.** $\boxed{2}$
530. ♦ $x = 1 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pi - 1 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$ **531**. ♦ 8 корней **532**. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} - 2 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. Другая форма записи ответа: $x = \frac{\pi}{2} \pm 2 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
533. ♦ $x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **534**. ♦ $x = 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.
535. ♦ $x = \frac{\pi}{2} - 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **536.** $\boxed{3}$
537. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.
538. ♦ $x = \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z},\ m \neq 3k, k \in \mathbf{Z}$.
539. $\boxed{2}$ **540**. ♦ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

11.4.0.16. Элементарные тригонометрические уравнения, 2 **541**. ♦ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

542. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **543.** $\boxed{1}$ **544.** $\boxed{2}$ **545.** $\boxed{4}$
546. $\boxed{4}$ **547.** $\boxed{1}$ **548.** $\boxed{4}$ **549.** $\boxed{5}$
550. ♦ $x = \pm\arccos b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **551**. ♦ корней нет.
552. ♦ корней нет. **553.** $\boxed{3}$ **554.** $\boxed{5}$
555. ♦ $x = 2 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pi - 2 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$
556. ♦ $x = \pm 1 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **557**. ♦ $x = \pm(\pi - 2) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
558. ♦ 7 корней **559.** $\boxed{2}$ **560**. ♦ $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
561. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **562**. ♦ $x = -\frac{\pi}{12} + (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$
563. $\boxed{1}$ **564**. ♦ $x = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$. **565.** $\boxed{1}$

11.4.0.17. Разложение на множители, 1

566. ♦ $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.
567. ♦ $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.
568. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.
569. ♦ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^m \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
$(\sin x + 1) + 2\cos x(\sin x + 1) - 2(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$.
570. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
$(1 + \cos 2x) + 2\sin x\cos x + (\cos x + \sin x) = 0$.
571. ♦ $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$, $k \neq 5m + 2$.

11.4.0.18. Разложение на множители, 2

572. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.
573. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.
574. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.
575. ♦ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
576. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.
$\frac{\sin^3 x(\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}{\cos x} = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$.
577. ♦ $x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$, $k \neq 7m + 3$, $x_2 = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $k \neq 7m + 1$.

11.4.0.19. Преобразование суммы в произведение, 1

578. ♦ $x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbf{Z}$. Серии не имеют

общих элементов. **579**. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.
580. ♦ $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. **581**. ♦ $x = \frac{\pi n}{9}, n \in \mathbf{Z}$.
582. ♦ $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.
583. ♦ $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z};\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbf{Z}$.
584. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **585**. ♦ $x \in (-\infty; +\infty)$.
586. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 4 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **587**. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
588. ♦ $x = \frac{\pi n}{12}, n \in \mathbf{Z}$. **589**. ♦ $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$.
590. ♦ $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + 2\pi m;\ \frac{2\pi k}{5}$. **591.** $\boxed{4}$ **592.** $\boxed{2}$ **593.** $\boxed{4}$

11.4.0.20. Преобразование суммы в произведение, 2

594. ♦ $x = \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}, x = \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbf{Z},\ m \neq 9k, k \in \mathbf{Z}$.
595. ♦ $x = \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbf{Z}$. **596**. ♦ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};$
$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbf{Z}$. **597**. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
598. ♦ $x = -1 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **599**. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 1 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
600. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
601. ♦ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbf{Z};\quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z};$
602. ♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z};\ x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
603. ♦ $x = \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z},\ m \neq 3k, k \in \mathbf{Z};\quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.
604. $\boxed{5}$ **605.** $\boxed{3}$ **606.** $\boxed{5}$

11.4.0.21. Преобразование произведения в сумму, 1

607. ♦ $x = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbf{Z},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.
608. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.
609. ♦ $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z};\quad x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{12}, m \in \mathbf{Z}$.
610. ♦ $\pi m, m \in \mathbf{Z};\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

11.4.0.22. Преобразование произведения в сумму, 2

611. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.
612. ♦ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.
613. ♦ $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$. **614**. ♦ $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};\quad x = \frac{\pi m}{11}, m \in \mathbf{Z}$.

11.4.0.23. Квадратные тригонометрические уравнения, 1

615. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **616**. ♦ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
617. ♦ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
618. ♦ $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
619. ♦ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z};\ x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

620. ♦ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **621**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
622. ♦ $\frac{\pi}{6}$
623. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
624. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **625**. ♦ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **626**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
627. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=-\operatorname{arctg}2+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
628. ♦ $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
629. ♦ $x=\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
630. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **631**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; **632**. $\boxed{3}$ **633**. $\boxed{4}$ **634**. $\boxed{1}$

11.4.0.24. Квадратные тригонометрические уравнения, 2 **635**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **636**. ♦ $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
637. ♦ $\emptyset$. **638**. ♦ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
639. ♦ не существует. **640**. ♦ $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
641. ♦ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
642. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$; $x=\pi+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
643. ♦ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
644. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
645. ♦ $x=2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
646. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$. **647**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
648. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **649**. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **650**. ♦ $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **651**. ♦ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}$.
652. ♦ $x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **653**. $\boxed{1}$ **654**. $\boxed{1}$ **655**. $\boxed{2}$

11.4.0.25. Однородные тригонометрические уравнения, 1 **656**. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **657**. ♦ $x=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}$.
658. ♦ $x=\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\operatorname{arctg}3+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
659. ♦ $x=\operatorname{arctg}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **660**. ♦ $x=\frac{\pi n}{7}, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{7}, n\in\mathbf{Z}$. **661**. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
662. ♦ $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}$;
663. ♦ $x=\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

664. ♦ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ **665.** $\boxed{4}$

11.4.0.26. Однородные тригонометрические уравнения, 2 **666**. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **667**. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **668**. ♦ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **669**. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **670**. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;

671. ♦ $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \pi m, m \in \mathbf{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

672. $\boxed{2}$

11.4.0.27. Сложные тригонометрические уравнения, 1

673. ♦ $z = \frac{9}{8}$, $y = \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{8}$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{8} + \pi n$. **674.** $\boxed{1}$

675. ♦ $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg}\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

11.4.0.28. Сложные тригонометрические уравнения, 2

676. ♦ πn; $\frac{\pi}{2} + \pi m$. **677.** $\boxed{5}$ **678**. ♦ $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.