Государственный университет — Высшая школа экономики

А.А.Быков

Решение задач ЕГЭ по математике

Текстовые задачи,
тригонометрия,
показательная и логарифмическая функции

Для учащихся 10-х и 11-х классов

Москва 2009

Содержание

Тема 12. Решение тригонометрических уравнений

12.1. Тригонометрические прогрессии

12.1.1. Тригонометрическая арифметическая прогрессия

679. Решите уравнение ($\star$) $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x = -0{,}5$.
♦ $\frac{\pi m}{9}$; $m \neq 9k$.

Решение. Заметим, что ни одно из чисел ($\star\star$) $x = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, не является корнем уравнения ($\star$). Умножим уравнение ($\star$) на $2\sin x$. При этом все числа вида ($\star\star$) станут корнями, так что при формулировании ответа их необходимо будет исключить. Итак, получим следствие (уравнение, которое содержит все корни исходного уравнения, но, может быть, и лишние корни),
$2\cos 2x\sin x + 2\cos 4x\sin x + 2\cos 6x\sin x + 2\cos 8x\sin x = -\sin x$,
преобразуем произведение в сумму,
$(\sin 3x-\sin x)+(\sin 5x-\sin 3x)+(\sin 6x-\sin 4x)+(\sin 9x-\sin 7x)+\sin x = 0$,
$\sin 9x = 0$, $x = \frac{\pi n}{9}, n \in \mathbf{Z}$. Теперь вспомним о необходимости исключить числа ($\star$), и добавим условие на индекс, $n \neq 9k$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

680. Найдите два наименьших положительных корня уравнения ($\star$) $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\sin 8x+\cdots+\sin 222x+\sin 224x = \sin 112x$
♦ $x_1 = \frac{\pi}{114}$; $x_2 = \frac{\pi}{112}$;

Решение. Заметим, что все числа ($\star\star$) $x = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, являются корнями уравнения ($\star$). Умножим уравнение ($\star$) на $2\sin x$. Итак, получим равносильное уравнение (уравнение, которое содержит все корни исходного уравнения, и не содержит лишних корней),
$2\sin 2x\sin x + 2\sin 4x\sin x + 2\sin 6x\sin x + \cdots + 2\sin 222x\sin x + 2\sin 224x\sin x = 2\sin 112x\sin x$.
Преобразуем произведение в сумму,
$(\cos x - \cos 3x) + (\cos 3x - \cos 5x) + (\cos 5x - \cos 7x) + \cdots + (\cos 221x - \cos 223x) + (\cos 223x - \cos 225x) = \cos 111x - \cos 113x$.

Проиежуточные слагаемые сократятся,
$\cos x - \cos 225x = \cos 111x - \cos 113x$,
$\sin 112x \sin 113x = \sin x \sin 112x$, $\sin 112x(\sin 113x - \sin x) = 0$,
$\sin 112x \sin 56x \cos 57x = 0$,
пары наименьших положительных корней каждой серии равны
$x_{a1} = \frac{\pi}{112}$, $x_{a2} = \frac{\pi}{56}$, $x_{b1} = \frac{\pi}{56}$, $x_{b2} = \frac{2\pi}{56}$, $x_{c1} = \frac{\pi}{114}$, $x_{c2} = \frac{3\pi}{114}$. ■

Теоретические сведения Аналогичные рассуждения показывают, что справедливы тождества
$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, $\sum_{k=1}^{n} \sin 2kx = \frac{\sin nx \sin (n+1)x}{\sin x}$.

12.1.2. Тригонометрическая геометрическая прогрессия

681. Решите уравнение $4\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$.
♦ $x = \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 3k, k \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Домножим обе части уравнения на $2\sin x$. При этом будут добавлены лишние корни, которые придется исключить на этапе формулирования ответа. В результате получим $2\sin 4x \cos 3x = 2\cos 6x \sin x$. Используя преобразование произведения в сумму, получим уравнение $\sin x + \sin 5x = 0$, $2\sin 3x \cos 2x = 0$, причем лишние корни πn, $n \in \mathbf{Z}$, нужно удалить. ■

682. Решите уравнение $8\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \cos 15x$.
♦ $\frac{\pi k}{14}, k \neq 14n$.
Решение. Домножим обе части уравнения на $2\sin x$. При этом будут добавлены лишние корни, которые придется исключить на этапе формулирования ответа. В результате получим
$16\sin x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = 2\sin x \cos 15x$,
$\sin 16x = \sin 16x - \sin 14x$, $\sin 14x = 0$. ■

12.2. Понижение порядка

683. Если x_1 и x_2 — два наименьших по величине положительных корня уравнения $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$, то значение величины $\frac{\pi}{x_1} + \frac{\pi}{x_2}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ Два наименьших положительных корня равны $x_1 = \frac{\pi}{10}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$. Все корни образуют две серии $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$.

Решение. Используем формулу понижения порядка для косинуса,
$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. После приведения подобных уравнение $(\star)$ примет вид $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$. Дальше можно сгруппировать слагаемые тремя способами, каждый из которых приведет к ответу с примерно равными затратами усилий. Сгруппируем, например, два крайних и два средних слагаемых, $2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$, $2\cos 5x \cdot 2\cos 2x \cos x = 0$, все корни образуют три серии, $(\star)$ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $(\star\star)$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, $(\star\star\star)$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, причем все корни $(\star\star\star)$ включены в $(\star)$. В условии требуются два наименьших положительных корня, поэтому из каждой серии $(\star)$ и $(\star\star)$ для сравнения нужно оставить $\{\frac{\pi}{10} \bigcup \frac{3\pi}{10}\}$, и $\{\frac{\pi}{4} \bigcup \frac{3\pi}{2}\}$. ■

684. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.
♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Произведем понижение порядка,
$1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x = 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x$,
$-\cos 2x - \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$,
$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$,
$2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$,
$4\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$. Осталось записать три серии корней. ■

685. Сумма всех различных целочисленных решений неравенства
$\cos^2 \frac{\pi x}{20} + \cos^2 \frac{\pi x}{10} + \cos^2 \frac{3\pi x}{20} + \cos^2 \frac{\pi x}{5} < 2$, на промежутке $x \in [0;\, 40]$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Решение. Все корни соответствующего уравнения образуют три серии $(\star)$ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $(\star\star)$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, $(\star\star\star)$ $x =$

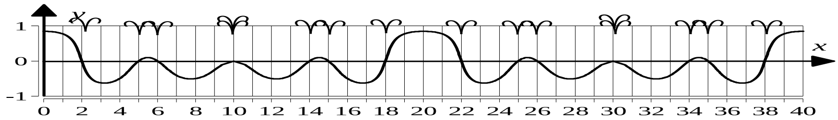

Рис. 19. Знаковый портрет на тригонометрическом круге

$\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, среди корней есть совпадающие. Знаковый портрет левой части показан на рис. 18b, одна единица выбрана равной $\frac{\pi}{20} = 9°$. рис. 19 ■

12.2.1. Формулы тройного угла

Теоретические сведения Используя формулы синуса и косинуса суммы, можно убедиться в том, что справедливы тождества $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

686. Пусть число t равно наименьшему положительному корню уравнения $\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x + \frac{3}{8} = 0$. Укажите остаток от деления на 5 натурального числа, расположенного на числовой оси ближе других натуральных чисел к значению выражения $\frac{94\pi}{t}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 48.

Решение. Используем формулы
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 2\cos 2x \sin x + \sin x$, $\cos 3x = 2\cos 2x \cos x - \cos x$. Уравнение примет вид
$\sin^3 x \cos x(4\cos^2 x - 3) + \cos^3 x \sin x(3 - 4\sin^2 x) + \frac{3}{8} = 0.$
Приводим подобные члены,
$4\sin^3 x \cos^3 x - 3\sin^3 x \cos x + 3\cos^3 x \sin x - 4\cos^3 x \sin^3 x + \frac{3}{8} = 0,$
выносим общие множители за скобки,
$3\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{3}{8} = 0,$
$8\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0,$

используем формулы синуса и косинуса двойного угла,
$4\sin 2x\cos 2x+1=0$, $2\sin 4x=-1$, $\sin 4x=-\frac{1}{2}$,
решаем элементарное тригонометрическое уравнение,
$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. $t=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$, $\frac{94pi}{t}=\frac{7\cdot12\cdot\pi\cdot4}{7\pi}=48$. ■

687. Наименьший положительный корень уравнения
$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$ принадлежит промежутку
$\boxed{\mathbf{1}}$ $x\in(0;\ \frac{\pi}{6})$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x\in[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4})$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x\in[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3})$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x\in[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x\in[\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4})$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x=\frac{\pi m}{5}$; $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{9\pm\sqrt{17}}}{4}+\pi n$.

Решение. Используем формулы сложения для тангенсов, получим уравнение $\sin 5x\frac{\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x}{\cos x\cos 4x\cos 2x\cos 3x}=0$. Первая серия корней $(\star)$ $x=\frac{\pi n}{5}$. Найдем корни функции в числителе, $\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x=0$. Применим формулы косинуса двойного и тройного углов,
$\cos x(2(2\cos^2x-1)^2-1)+(2\cos^2x-1)(4\cos^3x-3\cos x)=0$, и выполним замену $t=\cos x$. После приведения подобных получим биквадратное уравнение $8t^4-9t^2+2=0$, которое имеет четыре корня, $t=\pm\frac{\sqrt{9\pm\sqrt{17}}}{4}$. Все четыре корня принадлежат промежутку $[-1;\ 1]$, поэтому в дополнение к $(\star)$ получим еще четыре (с учетом $\pm$) серии $(\star\star)$ $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{9\pm\sqrt{17}}}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. На основном промежутке $[0;\ 2\pi]$ расположены 8 корней серий $(\star\star)$. Наименьший положительный корень соответствует наибольшему положительному значению $\cos x$, которое равно $x=\arccos\frac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{4}$.
Сравним $\frac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{4}\bigvee\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{9+\sqrt{17}}\bigvee 2\sqrt{3}$, $9+\sqrt{17}\bigvee 12$, $\sqrt{17}\bigvee 3$, $17>9$,
$\arccos\frac{\sqrt{9+\sqrt{17}}}{4}<\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$. Наименьший положительный корень меньше числа, равного $\frac{\pi}{6}$. ■

12.2.2. Замена переменной

Теоретические сведения Замена переменной позволяет при-

вести тригонометрическое уравнение к алгебраическому уравнению. Следует иметь в виду следующие способы замены переменной:
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x\pm\cos x=t$.

12.2.2.1. Первая стандартная замена, $\sin x\pm\cos x=t$

688. Решите уравнение $\sin 2x-2\sin x-2\cos x=1$. ♦ $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{m+1}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Используем замену $\sin x+\cos x=t$. Для вычисления $\sin 2x$ возведем в квадрат равенство $\sin x+\cos x=t$, и получим $\sin 2x=t^2-1$. Уравнение приведется к квадратному уравнению $t^2-1-2t=1$, $t^2-2t-2=0$, корни которого равны $t=1\pm\sqrt{3}$. Каждое из получившихся уравнений, $\sin x+\cos x=1\pm\sqrt{3}$, следует решать методом введения вспомогательного угла. Больший корень приводит к уравнению, которое решений не имеет, меньший корень приводит к уравнению $\sin x+\cos x=1-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=1-\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Преобразуя уравнение к виду $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1-\sqrt{3}$, получим другую форму, указанную в ответе. ■

689. Решите уравнение $2\sin^3 x-2\cos^3 x-\sin x+\cos x=0$. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbf{Z}$.

Решение. Используем замену $\sin x-\cos x=t$.
$2(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)-(\sin x-\cos x)=0$,
$2t(t^2+\frac{3}{2}(1-t^2))-t=0$. Левая часть разлагается на множители, $t(2t^2+3-3t^2-1)=0$, $t(-t^2+2)=0$, $t(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)=0$. так что уравнение приведется совокупности элементарных уравнений $\sin x-\cos x=0$, $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$, $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$. Второе и третье уравнения можно решить методом введения вспомогательного угла. Все корни образуют три серии, $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$, которые можно обьединить в одну серию. ■

12.2.2.2. Универсальная тригонометрическая подстановка, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

Теоретические сведения Формулы универсальной подстановки, которая позволяет широкий класс тригонометрических уравнений приводит к алгебраическим уравнениям, имеют вид $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. При использовании универсальной подстановки возможно сужение ОДЗ.

690. Решите уравнение $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$.

♦ $(\star)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Уравнение приведется к кубическому уравнению $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$. Полезно обратить внимание на то, что сумма коэффициентов равна нулю, поэтому один из корней равен 1, других корней нет. Значения x, при которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует, образуют множество $\pi + 2\pi n$, корнями уравнения $(\star)$ не являются. ■

12.2.2.3. Различные типы замены переменной

691. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^8 x = 1$. ♦ $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение 1. Используем замену $\sin^2 x = t$. Уравнение приведется к уравнению четвертой степени, сумма коэффициентов равна нулю, поэтому один из корней равен 1. После разложения на множители уравнение примет вид $t(t-1)(t^2+t+2) = 0$. ■

Решение 2. Заметим, что $\begin{cases} \sin^4 x \leqslant \sin^2 x, \\ \cos^8 x \leqslant \cos^2 x, \\ \sin^4 x + \cos^8 x = 1, \end{cases}$ поэтому $(\star)$ равносильно системе $\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ \cos^8 x = \cos^2 x. \end{cases}$ ■

692. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^{-2} x = \sin x - \sin^{-1} x + 1,75$. ♦ $x = (-1)^{m+1} \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем замену $\sin x - \sin^{-1} x = t$. Уравнение приведется к квадратному уравнению $(t-0{,}5)^2 = 0$. Далее получим $\sin x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$, причем годится только меньший корень. ■

12.2.3. Метод вспомогательного угла

693. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$.

♦ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на величину $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Уравнение примет вид $\cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Остается решить элементарное уравнение $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$. ■

694. Решите уравнение $a\cos x + b\sin x = c$, где a и b не равны нулю одновременно.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на величину $\sqrt{a^2 + b^2}$, которая по условию задачи строго больше нуля. Уравнение примет вид
$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Найдется единственный угол $\alpha \in [0; 2\pi)$ такой, что одновременно будут верны равенства $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Этот угол равен $\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $a > 0$, равен
$\pi + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $a < 0$, $\frac{\pi}{2}$ при $a = 0 \bigcap b > 0$, равен $\frac{3\pi}{2}$ при $a = 0 \bigcap b < 0$ (проверьте сами справедливость этого утверждения). Остается решить элементарное уравнение $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, то уравнение корней не имеет. Если $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, то уравнение решется стандартным путем. ■

695. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{\pi n}{6}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Применим метод вспомогательного угла. Начнем с того, что в левой части вынесем число 2 за скобки, $2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\Big) = \sqrt{3}$. Теперь мы должны сделать выбор, приводить уравнение к косинусу разности или синусу суммы. Большой разницы нет, для элементарного уравнения с косинусом решение записыватся немного проще, поэтомы выберем косинус, $2\Big(\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x\Big) = \sqrt{3}$.

Применим формулу косинуса разности, $\cos\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \quad ■$$

696. Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

$\boxed{1}$ $x = \frac{\pi n}{2}$ $\boxed{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\boxed{3}$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n$
$\boxed{4}$ $x = 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\boxed{5}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

Ответ $\boxed{3}$♦ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n.$

Решение. Применим метод вспомогательного угла,
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 1$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда
$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

697. Решите уравнение $\cos\frac{\pi x}{16} - \sin\frac{5\pi x}{48} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi x}{48} - \sin\frac{\pi x}{16}\right)$. Укажите в ответе остаток от деления на 5 пятого по величине положительного корня.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ $x_5 = 44,\ x = -4 + 48n, n \in \mathbf{Z}, x = 3 + 12m, m \in \mathbf{Z}.$

Решение 1. Сгруппируем слагаемые с одинаковыми периодами, $\cos\frac{\pi x}{16} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{16} = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi x}{48} + \sin\frac{5\pi x}{48}$. Используем метод вспомогательного угла, $2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{16} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{16}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{5\pi x}{48} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi x}{48}\right)$.
Применим формулу косинуса разности, $(\star)$ $\cos\left(\frac{\pi x}{16} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi x}{48} - \frac{\pi}{6}\right)$.
Применим правило решения уравнений вида $\cos ax = \cos bx$, и приведем $(\star)$ к совокупности элементарных уравнений,
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{16} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi x}{48} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ \frac{\pi x}{16} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi x}{48} + \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3x - 16 = 5x - 8 + 96n, \\ 3x - 16 = -5x + 8 + 96m, \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} 2x = -8 - 96n, \\ 8x = 24 + 96m, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = -4 + 48n, \\ x = 3 + 12m. \end{array}\right.$$
Наименьшие положительные корни первой серии $x \in \{44; 92\}$, второй серии $x \in \{3; 15; 27; 39; 51\}$. Пятый по величине корень принадлежит первой серии и равен 44. $\blacksquare$

Решение 2. Выполним замену $t = \frac{\pi x}{48}$, $\cos 3t + \sqrt{3}\sin 3t = \sqrt{3}\cos 5t + \sin 5t$,
$2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 3t + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3t\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 5t + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5t\right)$,

$\cos\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$, дальнейший ход решения не отличается от уже описанного. На замене переменной можно сэкономить некоторое количество бумаги и уменьшить вероятность ошибки. ■

698. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=2\sin x$.
♦ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}, x=-\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
Решение. Используем формулу вспомогательного угла в левой части, $2\cos(3x-\frac{\pi}{6})=2\sin x$, $\cos(3x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, **(1)** $3x-\frac{\pi}{6}-(\frac{\pi}{2}-x)=2\pi m$, $4x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{2}$, $\cos(3x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, . ■

12.3. Однородные уравнения

12.3.1. Однородные уравнения первой степени

699. Укажите наименьший положительный корень уравнения ($\star$) $3\sin x+4\cos x=0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Решение 1. Заметим, что если x — корень, то $\cos x\neq 0$. Поэтому ($\star$) можно разделить на $\cos x$, получится равносильное уравнение $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$. Все корни можно записать в виде серии $\pi n-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}, n\in\mathbf{Z}$. Наименьший положительный корень равен $\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. ■

Решение 2. Применим метод вспомогательного угла, преобразуем к косинусу. Уравнение ($\star$) равносильно уравнению $5\cos(x-\arccos\frac{4}{5})=0$, все корни можно записать в виде серии $x=\arccos\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. Наименьший положительный корень равен $\arccos\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}$. Так как $\sin(\arccos\frac{4}{5})=\frac{3}{5}$, то $\operatorname{tg}(\arccos\frac{4}{5})=\frac{3}{4}$, $\arccos\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$. ■

Решение 3. Применим метод вспомогательного угла, преобразуем к синусу. Уравнение равносильно уравнению $5\sin(x+\arcsin\frac{4}{5})=0$, все корни можно записать в виде серии $-\arcsin\frac{4}{5}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. Дальнейшие преобразования проводятся аналогично. ■

12.3.2. Однородные уравнения второй степени

Теоретические сведения Однородным тригонометрическим уравнением второй степени называется уравнение $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0$, в котором не все коэффициенты равны нулю. Если $A \neq 0$ и x — корень, то $\cos x \neq 0$. Поэтому в этом случае уравнение можно разделить на $\cos^2 x$, полчучится равносильное квадратное тригонометрическое уравнение
$A\,\mathrm{tg}^2\, x + B\,\mathrm{tg}\, x + C = 0$.

700. Найдите наименьшее возможное значение величины $|x_1 - x_1|$, где x_1 и x_2 — два различных корня уравнения
$(\star)$ $\sqrt{5}\sin^2 x - 13\sin x\cos x - \sqrt{5}\cos^2 x = 0$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{13}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{6}$
Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Заметим, что если x — корень, то $\cos x \neq 0$. Уравнение можно поделить на $\cos^2 x$, получится равносильное уравнение $\sqrt{5}\,\mathrm{tg}^2\, x - 13\,\mathrm{tg}\, x - \sqrt{5} = 0$. Выполним замену $t = \mathrm{tg}\, x$, получим квадратное уравнение $\sqrt{5}t^2 - 13t - \sqrt{5} = 0$, которое имеет положительный дискриминант $D > 0$, и два различныхз корня t_1 и t_2 такие, что $t_1 \cdot t_2 = -1$. Пусть $t_1 > 0$ и $x_1 = \mathrm{arctg}(t_1)$, $t_2 < 0$ и $x_2 = \mathrm{arctg}(t_2)$. Рассмотрим значение величины $x_2 = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{t_1} = \mathrm{arctg}(t_1) - \frac{\pi}{2}$. Поэтому $x_1 - x_2 = \frac{\pi}{2}$. Если x_3 — следующий по счету корень, то $x_3 - x_1 = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, все корни уравнения $(\star)$ можно записать в виде одной серии $\mathrm{arctg}(t_1) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. ■

12.3.3. Уравнения вида $A\cos^2 x + D\sin x\cos x + B\sin^2 x = E$.

Уравнение $A\cos^2 x + D\sin x\cos x + B\sin^2 x = E$ можно привести к однородному уравнению второй степени с помощью основного тригонометрического тождества $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

701. Решите уравнение $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 4$.

Решение. Заменим 4 в правой части на $4\cos^2 x + 4\sin^2 x$. Получим однородное уравнение второй степени $\sin^2 x - 2\sin x\cos x +$

$2\cos^2 x = 0$, равносильное квадратному уравнению $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 2 = 0$, которое корней не имеет ■

12.3.4. Однородные уравнения старших степеней

702. Решите уравнение
$\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1$.
♦ $\frac{\pi m}{2}$.

Решение. В правой части используем тождество $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$. Заметим, что все значения x, при которых $\cos x = 0$, являются корнями и внесем их в ответ. Теперь рассмотрим те значения x, при которых $\cos x \neq 0$, и выполним замену $\operatorname{tg} x = t$, получим $t^4+t^3+t^2+t+1 = t^4+2t^2+1$, $t^3-t^2+t = 0$, единственный корень $t = 0$. ■

12.3.5. Уравнения вида $a\cos x + b\sin x = c$

703. Решите уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1$. Используя формулу синуса суммы двух углов, приведем уравнение к равносильному, $\sin(x+\varphi) = 1$, где $\varphi = \arcsin(0{,}6)$. ■
♦ $x = -\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

704. Решите уравнение $\sin x + 3\cos x + 3 = 0$.
♦ $x = 3\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} - \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}, x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Применим метод вспомогательного угла,
$\sqrt{10}\cos(x - \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}) + 3 = 0$, $\cos(x - \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$,
$x = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} \pm \arccos(\frac{-3}{\sqrt{10}}) + 2\pi n, x = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} \pm (\pi - \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}) + 2\pi$
■

12.4. Симметрические уравнения

705. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$.
♦ $x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используя тождество $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, приведем уравнение к виду $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

706. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.
♦ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем формулу $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5+3\cos 4x}{8} = 1 - 0{,}75 \cdot \sin^2 2x$, $\frac{5+3\cos 4x}{8} = \frac{7}{16}$, $5 + 3\cos 4x = \frac{7}{2}$, $3\cos 4x = -\frac{3}{2}$, $\cos 4x = -\frac{1}{2}$. ■

707. Пусть число z равно наименьшему положительному корню уравнения $8\sin^6 x + 4 + 8\cos^6 x = 15\cos 2x$. Укажите верное утверждение.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $z \in (0;\ 0{,}375)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $z \in [0{,}375;\ 0{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $z \in [0{,}5;\ 0{,}75)$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $z \in [0{,}75;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $z \in [1;\ 999)$
Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $z = \frac{\pi}{6}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем тождество $8\cos^6 x + 8\sin^6 x = 8 - 6\sin^2 2x$, получим $8 - 6\sin^2 2x + 4 = 15\cos 2x$,
$6 + 6\cos^2 2x = 15\cos 2x$, $6\cos^2 2x - 15\cos 2x + 6 = 0$, $2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 2 = 0$, $\cos 2x \in \left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

708. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$.
♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем формулу разности квадратов и двойного угла,
$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 4x$, $\cos 2x = 2\sin 2x\cos 2x$, $2\cos 2x(\frac{1}{2} - \sin 2x) = 0$, **(1)** $\cos 2x = 0$, **(2)** $\sin 2x = \frac{1}{2}$. ■

709. Укажите множество всех значений параметра p, при которых уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\sin p$ имеет корни
♦ $p \in [-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n]$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Уравнение равносильно $\cos 2x = 2\sin p$, разрешимо при условии $\sin p \in [-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}]$, откуда получим $p \in [-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n]$. ■

710. Решите уравнение $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{1}{16}$.
♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решение. Наименьшее значение функции $f(x) = \cos^{10} x + \sin^{10} x$ равно $\frac{1}{16}$ ■ и достигается в точках $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. Этот факт легко устанавливается, например, с помощью производной, $f' = -10\cos^9 x \sin x + 10\sin^9 x \cos x = -10\cos x \sin x(\cos^8 x - \sin^8 x) = -5\sin 2x(\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos^4 x - \sin^4 x) = -5\sin 2x(\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = -2{,}5\sin 4x(\cos^4 x + \sin^4 x)$. Производная меняет знак с отрицательного на положительный в точках $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

12.5. Уравнения с параметром

711. Наибольшее значение параметра p, при котором уравнение $5\sin x + 12\cos x = p$ имеет по крайней мере один корень, равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3**♦ $p_{\max} = 13$.

Решение. Используя метод вспомогательного угла, приведем уравнение к виду $13\cos(x - \arccos\frac{12}{13}) = p$, которое имеет корни при $p \in [-13;\ 13]$. ■

712. Укажите все значения параметра p, при которых уравнение $\cos^4 x + \sin^4 x = p$ имеет по крайней мере один корень.

1 $[0,125;\ 1]$ **2** $[0{,}25;\ 1]$ **3** $[0{,}5;\ 1]$ **4** $(0{,}25;\ 1]$ **5** $(0{,}5;\ 1]$

Ответ **3**♦ $p \in [0{,}5;\ 1]$.

Решение. Так как $\cos^4 x + \sin^4 x \equiv \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, то уравнение равносильно уравнению $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = p$, $\cos 4x = 4p - 3$, Это уравнение разрешимо при $4p - 3 \in [-1;\ 1]$, $4p \in [2;\ 4]$, $p \in [0{,}5;\ 1]$. ■

713. Укажите все значения параметра p, при которых уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = p$ имеет по крайней мере один корень.

1 $[0,125;\ 1]$ **2** $[0{,}25;\ 1]$ **3** $[0{,}5;\ 1]$ **4** $(0{,}25;\ 1]$ **5** $(0{,}5;\ 1]$

Ответ **2**♦ $p \in [0{,}25;\ 1]$.

Решение. Используем тождество $\cos^6 x + \sin^6 x \equiv \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$, получим $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = p$, $3\cos 4x = 8p - 5$. Условие наличия корней имеет вид $8p - 5 \in [-3;\ 3]$, $8p \in [2;\ 8]$, $p \in [0{,}25;\ 1]$. ■

714. Укажите все значения параметра p, при которых уравнение $\cos^{10} x + \sin^{10} x = p$ имеет по крайней мере один корень.

$\boxed{1}$ $[0,125;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[0{,}25;\ 1]$ $\boxed{3}$ $[0{,}5;\ 1]$ $\boxed{4}$ $[0,0625;\ 1]$ $\boxed{5}$ $[0,03125;\ 1]$

Ответ $\boxed{4}$♦ $p \in [0,0625;\ 1]$.

Решение. Так как $(\cos^{10} x + \sin^{10} x)' = -2{,}5\sin 4x(\cos^4 x + \sin^4 x)$, функция $f(x) = \cos^{10} x + \sin^{10} x$ убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in \mathbf{Z}$, и возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right], n \in \mathbf{Z}$. Наименьшее значение $f(x)$ равно $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{16}$, Наибольшее значение $f(x)$ равно $f(0) = 1$. Это и есть наименьшее и наибольшее значения параметра, при котором уравнение $f(x) = p$ имеет по крайней мере один корень. ■

715. Укажите множество всех значений параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = p^2 - 6p + 6$ имеет по крайней мере один корень.

♦ $p \in [1; p_1] \bigcup [p_2;\ 5]$, где $p_1 = 3 - \sqrt{3}$, $p_2 = 3 + \sqrt{3}$ — корни уравнения $p^2 - 6p + 7 = 0$.

Решение. Так как $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \Subset [-1;\ 2]$, то условие разрешимости имеет вид $p^2 - 6p + 6 \in [-1;\ 1]$, $\begin{cases} p^2 - 6p + 7 \geqslant 0, \\ p^2 - 6p + 5 \leqslant 0, \end{cases}$ решения образуют два промежутка, $p \in [1; p_1] \bigcup [p_2;\ 5]$, где $p_1 = 3 - \sqrt{3}$, $p_2 = 3 + \sqrt{3}$ — корни уравнения $p^2 - 6p + 7 = 0$. ■

716. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} - a^2 = 0$ имеет по крайней мере один корень?

♦ $a \in [-1, 5;\ 1, 5]$.

Решение 1. Запишем уравнение в виде $\sin^2 x - \sin x = a^2 - \frac{1}{4}$. Заметим, что $\sin^2 x - \sin x = (\sin x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Subset [-\frac{1}{4};\ 2]$, поэтому для разрешимости необходимо и достаточно $a^2 - \frac{1}{4} \in [-\frac{1}{4};\ 2]$, $a^2 \in [0;\ 2{,}25]$, $a \in [-1{,}5;\ 1{,}5]$. ■

Решение 2. Уравнение имеет очевидные корни, $\sin x \in \{\frac{1}{2} \pm a\}$, поэтому решения существуют тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} - a \in [-1;\ 1] \bigcup \frac{1}{2} + a \in [-1;\ 1]$, $a \in [-0{,}5;\ 1{,}5] \bigcup a \in [-1{,}5;\ 0{,}5]$. ■

12.6. Метод мажорант

Теоретические сведения Метод мажорант основан на очевидном свойстве неравенств, которое можно сформулировать в виде теоремы.

Theorem 12.1. Если $\begin{cases} A \leqslant a \\ B \leqslant b \\ A + B \geqslant a + b, \end{cases}$ то $\begin{cases} A = a \\ B = b. \end{cases}$

Если применить эту теорему к неравенству $f(x) + g(x) \geqslant a + b$, получим

Theorem 12.2. Если на множестве X справедливы неравенства $\begin{cases} f(x) \leqslant a \\ g(x) \leqslant b \\ f(x) + g(x) \geqslant a + b, \end{cases}$ то на множестве X неравенство $f(x) + g(x) \geqslant a + b$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = b. \end{cases}$ Разумеется, знаки в неравенствах можно одновременно заменить на противоположные.

717. Билл может перенести не больше 37 кг груза, Джек — не больше 44 кг. За один раз они месте перенесли 81 кг груза. Сколько груза перенес Билл?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 36 кг $\boxed{\mathbf{2}}$ 35 кг $\boxed{\mathbf{3}}$ 37 кг $\boxed{\mathbf{4}}$ 44 $\boxed{\mathbf{5}}$ 81

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ 37кг.

Решение. Пусть x — вес груза, который перенес Билл, y — вес груза, который перенес Джек. Тогда $\begin{cases} x \leqslant 37, \\ y \leqslant 44, \\ x + y = 81. \end{cases}$ Так как $37 + 44 = 81$, то в соответствии с теоремой $x = 37$, $y = 44$. В данном случае, в отличие от условия теоремы, имеет место равенство $(\star)$ $x + y = 81$ вместо неравенства $(\star\star)$ $x + y \geqslant 81$. Однако, $(\star\star)$ есть следствие $(\star)$, поэтому заключение теоремы также верно. ∎

12.6.1. Мажорирование суммы

718. Сумма всех различных корней уравнения $3\sin\frac{\pi x}{12}+4\cos\frac{\pi x}{3}=7$ на промежутке $x\in(0;\,100)$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3** ♦ $24\cdot 7=\ldots 8$.

Решение. Так как $\begin{cases}3\sin\frac{\pi x}{12}\leqslant 3,\\ 4\cos\frac{\pi x}{3}\leqslant 4,\\ 3\sin\frac{\pi x}{12}+4\cos\frac{\pi x}{3}=7,\end{cases}$ то $\begin{cases}3\sin\frac{\pi x}{12}=3,\\ 4\cos\frac{\pi x}{3}=4.\end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases}\frac{\pi x}{12}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z},\\ \frac{\pi x}{3}=2\pi m, m\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}x=6+24n,\\ x=6m,\end{cases}$ $1+4n=m$, $x=6(1+4n)=6+24n$, $0<6+24n<100$, $0\leqslant n\leqslant 3$, $a_0+\cdots+a_3=\frac{6+6+24\cdot 3}{2}\cdot 4=12\cdot(1+2\cdot 3)\cdot 2=24\cdot 7=\ldots 8$. ■

12.6.2. Мажорирование произведения

719. Сумма всех различных корней уравнения $\sin\frac{\pi x}{12}\cos\frac{\pi x}{3}=1$ на промежутке $x\in(0;\,100)$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

Ответ **3** ♦ $24\cdot 7=\ldots 8$.

Решение. Так как $\begin{cases}\left|\sin\frac{\pi x}{12}\right|\leqslant 1,\\ \left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|\leqslant 1,\\ \left|\sin\frac{\pi x}{12}\right|\cdot\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|=1,\end{cases}$ то $\begin{cases}\left|\sin\frac{\pi x}{12}\right|=1,\\ \left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|=1.\end{cases}$ Возможны два случая, **(1)** $(\star)$ $\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{12}=1,\\ \cos\frac{\pi x}{3}=1,\end{cases}$ **(2)** $(\star\star)$ $\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{12}=-1,\\ \cos\frac{\pi x}{3}=-1.\end{cases}$ Первый случай рассмотрен в предыдущей задаче. Рассмотрим только второй случай. $\begin{cases}\frac{\pi x}{12}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z},\\ \frac{\pi x}{3}=\pi+2\pi m, m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$ Решим два элементарных тригонометрических уравнения, $\begin{cases}x=18+24n,\\ x=3+6m,\end{cases}$ $18+$

$24n = 3+6m$, $5 = -8n+2m$. Правая часть — четное число, левая часть — нечетное число. Корней нет. ■

12.6.3. Мажорирование степеней

720. Сумма всех различных корней уравнения $\sin^7 x+\cos^{11} x = 1$ на промежутке $x \in (0;\, 4\pi)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{7\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 3π $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{11\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{9\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 5π

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x = 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Так как на всей числовой оси справедливы неравенства
$\sin^7 x \leqslant \sin^2 x$ и $\cos^{11} x \leqslant \cos^2 x$, а также справедливо тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то из условия задачи следует, что $\begin{cases}\sin^7 x = \sin^2 x,\\ \cos^{11} x = \cos^2 x.\end{cases}$ Разложим на множители каждое из уравнений, $\begin{cases}\sin^2(\sin^5 x - 1) = 0,\\ \cos^2(\cos^9 x - 1) = 0.\end{cases}$ Множество всех корней совпадает с пересечением двух множеств $\begin{cases} x \in \{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},\\ x \in \{0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z},\end{cases}$ так что $x \in \{0;\ \frac{\pi}{2}\} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

721. Сумма всех различных корней уравнения $(\star)$ $\sin^7 x - \cos^{11} 2x = 2$ на промежутке $x \in (0;\, 4\pi)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{7\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 3π $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{13\pi}{4}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{9\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 5π

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Так как на всей числовой оси справедливы неравенства
$\sin^7 x \leqslant 1$ и $-\cos^{11} 2x \leqslant 1$, то из условия задачи следует, что каждое слагаемое левой части $(\star)$ по отдельности должно быть равно своему наибольшему значению, $\begin{cases}\sin^7 x = 1,\\ \cos^{11} 2x = -1.\end{cases}$ Решим каждое из элементарных уравнений, $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z},\end{cases}$ и найдем пересечение множеств всех корней, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, ■

12.6.4. Метод вспомогательного угла и метод мажорант

722. Сумма всех различных корней уравнения
$(\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x)\sin 3x = 2$ на промежутке $x \in (0;\, 10)$ равна
$\boxed{1}$ $\frac{11\pi}{6}$ $\boxed{2}$ $\frac{13\pi}{6}$ $\boxed{3}$ $\frac{7\pi}{3}$ $\boxed{4}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\boxed{5}$ $\frac{11\pi}{3}$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Так как $\begin{cases} \left|\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x\right| \leqslant 2, \\ |\sin 3x| \leqslant 1, \\ \left|\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x\right| \cdot |\sin 3x| = 2, \end{cases}$ то
$\begin{cases} \left|\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x\right| = 2, \\ |\sin 3x| = 1. \end{cases}$ Возможны два случая,

(1) $(\star)$ $\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2, \\ \sin 3x = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}, \end{cases}$
$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}, \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, $6n = 4m$, $n = 2k, k \in \mathbf{Z}$, $m = 3k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

(2) $(\star\star)$ $\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -2, \\ \sin 3x = -1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}, \end{cases}$
$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi m}{3}, \end{cases}$ $\frac{2\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi m}{3}$, $4 + 6n = 3 + 4m$, $1 + 6n = 4m$, целочисленных решений нет (левая часть — нечетное, правая — четное число). ■

723. Найдите наибольшее возможное количество корней уравнения $3\cos(x - p) + 4\sin(x - p) - 18 = 5\cos(x\sqrt{2}) + 12\sin(x\sqrt{2})$ при всех возможных значениях параметра p.
$\boxed{1}$ один $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре или больше четырех
$\boxed{5}$ ни одного

Ответ $\boxed{1}$♦ один.

Решение. Используем метод вспомогательного угла и приведем уравнение к виду $(\star)$ $5\cos(x - p - \arccos\frac{3}{5}) - 5 = 13 + 13\cos(x\sqrt{2} -$

$\arccos\frac{5}{13})$. Так как $\begin{cases} 5\cos(x-p-\arccos\frac{3}{5})-5\in[-10;\,0], \\ 13+13\cos(x\sqrt{2}-\arccos\frac{5}{13}\in[0;\,26], \end{cases}$ то левая и правая части уравнения ($\star$) могут быть равны друг другу только при выполнении условий $\begin{cases} \cos(x-p-\arccos\frac{3}{5})=1, \\ 13+13\cos(x\sqrt{2}-\arccos\frac{5}{13})=0. \end{cases}$ Решим два элементарных тригонометрических уравнения $\begin{cases} \cos(x-p-\arccos\frac{3}{5})-5=0, \\ \cos(x\sqrt{2}-\arccos\frac{5}{13})=-1. \end{cases}$ и получим $\begin{cases} x-p-\arccos\frac{3}{5}=2\pi n, n\in\mathbf{Z}, \\ x\sqrt{2}-\arccos\frac{5}{13}=\pi+2\pi m, m\in\mathbf{Z}. \end{cases}$ Эта система равносильна системе ($\star\star$) $\begin{cases} x=p+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n, \\ x=\frac{\arccos\frac{5}{13}+\pi+2\pi m}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ Так как в двух уравнениях системы ($\star\star$) значение x — одно и то же, то ($\ddagger$) $p+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n=\frac{\arccos\frac{5}{13}+\pi+2\pi m}{\sqrt{2}}$. Таким образом, уравнение ($\star$) имеет по крайней мере один корень при всех тех значениях параметра p, которые могут быть представлены в виде $p=-(\arccos\frac{3}{5}+2\pi n)+\frac{\arccos\frac{5}{13}+\pi+2\pi m}{\sqrt{2}}$. Пусть p_1 — одно из таких чисел, и $m_1\in\mathbf{Z}$ и $n_1\in\mathbf{Z}$ — целые числа, при которых верно ($\ddagger$). Исследуем вопрос о количестве корней уравнения ($\ddagger$). Рассмотрим ($\ddagger$) как уравнение, в котором неизвестными величинами являются m и n. Пусть имеется еще одно решение, $m_2\in\mathbf{Z}$ и $n_2\in\mathbf{Z}$. Тогда $\begin{cases} p_1=-(\arccos\frac{3}{5}+2\pi n_1)+\frac{\arccos\frac{5}{13}+\pi+2\pi m_1}{\sqrt{2}}, \\ p_1=-(\arccos\frac{3}{5}+2\pi n_2)+\frac{\arccos\frac{5}{13}+\pi+2\pi m_2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ Вычтем эти два уравнения, $0=2\pi(n_1-n_2)+\frac{2\pi(m_1-m_2)}{\sqrt{2}}$, поделим на 2π и получим ($\ddagger\ddagger$) $\sqrt{2}(n_1-n_2)=-(m_1-m_2)$. Правая часть ($\ddagger\ddagger$) — целое число. Следовательно, левая часть ($\ddagger\ddagger$) — тоже целое число. Но $\sqrt{2}$ — иррациональное число, поэтому при любых целых $n_1\neq n_2$ левая часть ($\ddagger\ddagger$) — иррациональное число и не может иметь целочисленное значение. Следовательно, $n_1=n_2$ и $m_1=m_2$. Итак, уравнение ($\star$) имеет или ровно один корень (и тогда значение параметра p находится из уравнения ($\ddagger$)), или не имеет ни одного корня. ■

12.6.5. Тригонометрические функции и многочлены

724. Сумма всех различных корней уравнения
$(\star)$ $\sin\frac{\pi x}{4}=(x^2-12x+20)^2+1$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 8 $\boxed{\mathbf{2}}$ 12 $\boxed{\mathbf{3}}$ 18 $\boxed{\mathbf{4}}$ 16 $\boxed{\mathbf{5}}$ 15

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x\in\{2;\,10\}$.

Решение. Так как для всех x выполнены неравенства $\sin\frac{\pi x}{4}\leqslant 1$ и
$(x^2-12x+20)^2+1\geqslant 1$, то равенство $(\star)$ может быть верным только в том случае, когда $(\star\star)$ $\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{4}=1,\\(x^2-12x+20)^2+1=1.\end{cases}$ Второе уравнение системы $(\star\star)$ имеет ровно два корня, $x\in\{2;\,10\}$, оба корня принадлежат множеству корней первого уравнения. ■

725. Сумма всех различных корней уравнения
$(\star)$ $\mathrm{tg}^8 x+\mathrm{ctg}^8 x=2\cos 8x\sin 2x$ на промежутке $(0;\,4\pi)$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{9\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{17\pi}{4}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{11\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{21\pi}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 7π

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\{0;\ldots;3\}$.

Решение. Пусть $t=\mathrm{tg}^8 x\in[0;+\infty)$. Тогда левая часть уравнения $(\star)$ равна $t+t^{-1}\in[2;+\infty)$. Значение функции в правой части этого уравнения $2\cos 8x\sin 2x\in[-2;\,2]$. Поэтому равенство $(\star)$ может быть верным только в том случае, когда $(\star\star)$ $\begin{cases}\mathrm{tg}^8 x+\mathrm{ctg}^8 x=2,\\2\cos 8x\sin 2x=2.\end{cases}$ Все корни первого уравнения системы образуют множество $\frac{\pi n}{4},n\in\mathbf{Z}$. Левая часть уравнения $\cos 8x\sin 2x=1$ равна произведению двух функция, каждая из которых по модулю не превосходит 1. В то же самое время их произведение должно быть равно 1, поэтому возможны два случая,

(1) $\begin{cases}\cos 8x=1,\\\sin 2x=1,\end{cases}$ $\begin{cases}8x=2\pi m,\ m\in\mathbf{Z},\\2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\pi m}{4},\\x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\end{cases}$ $x=\frac{\pi}{4}+\pi k.$

(2) $\begin{cases}\cos 8x=-1,\\\sin 2x=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}8x=\pi+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z},\\2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4},\\x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\end{cases}$ корней нет. ■

726. Решите уравнение $4x^2 - 4x\cos y + 1 = 0$.
♦ $x = 0{,}5,\ y = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, x = -0{,}5,\ y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Решение. Используем условие разрешимости квадратного уравнения, $4\cos^2 y - 4 \geqslant 0$, $\cos^2 y \geqslant 1$, $\cos y = 1$, причем x определяется из уравнения $4x^2 \pm 4x + 1 = 0$. ■

727. При каких значениях параметра a уравнение
$2\sin 3x + \sin 5x = a^2 - 4a + 7$ имеет по крайней мере один корень?
♦ $\emptyset$

Решение. Метод мажорант приводит к системе $\sin 3x = 1$; $\sin 5x = 1$, которая решений не имеет. ■

12.7. Иррациональные

728. Все решения неравенства $(\star)$ $\sqrt{\sin x} < \sqrt{-\cos x}$ образуют множество

$\boxed{1}$ $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$ $\boxed{2}$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$
$\boxed{3}$ $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$ $\boxed{4}$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$
$\boxed{5}$ $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$.

Решение. Неравенство $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Для функций f и g, входящих в $(\star)$, получим систему
$\begin{cases} \sin x < -\cos x, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$ На промежутке $x \in [0;\ 2\pi)$ эта система равносильна
$\begin{cases} x \in \left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right), \\ x \in [0;\ \pi]. \end{cases}$ Пересечение промежутков дает $x \in \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$. Осталось добавить наименьший положительный период 2π с любым целочисленным коэффициентом. ■

729. Все решения неравенства $(\star)$ $\frac{\sqrt{-\sin x}}{\sqrt{x(2\pi - x)}} > \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{x(2\pi - x)}}$ образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{1}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\boxed{5}$ решений нет

Ответ $\boxed{2}$♦ $x \in \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$.

Решение. Отличие от предыдущей задачи в том, что неравенство имеет вид $h(x)\cdot\sqrt{f(x)} > h(x)\cdot\sqrt{g(x)}$, где функция $h(x) > 0$ на всей своей области определения, которая совпадает с промежутком $x \in (0;\,2\pi)$. Поэтому ($\star$) равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ x \in (0;\,2\pi). \end{cases}$ По аналогии с предыдущей задачей получим $x \in (\frac{3\pi}{4};\,\pi)$. ■

12.8. Системы

730. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\cos x = \sin y$.
♦ Две серии параллельных прямых, $y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $y = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
Решение. Уравнение равносильно $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$,
(1) $x + \frac{\pi}{2} - y = 2\pi n$, **(2)** $x - \frac{\pi}{2} + y = 2\pi m$. ■

731. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\cos^2 x + \cos^2 y = 1$.

Решение. Уравнение равносильно $\cos^2 x = \sin^2 y$, возможны два случая,
(1) $\cos x = \sin y$, и тогда $x + \frac{\pi}{2} - y = 2\pi n$, $x - \frac{\pi}{2} + y = 2\pi m$.
(2) $\cos x = -\sin y$, и тогда $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + y)$, $x + \frac{\pi}{2} + y = 2\pi n$, $x - \frac{\pi}{2} - y = 2\pi m$. ■

732. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

733. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\cos 4x + \sin 3y = 4, \\ 2x + 3y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

♦ $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n,\, \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbf{Z}$.
Решение. Из первого уравнения системы следует, что $\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin 3y = 1, \end{cases}$ поэтому $x = \frac{\pi n}{2} \bigcap y = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$. Теперь

из второго уравнения получим $\frac{2\pi n}{2}+\frac{3\pi}{6}+\frac{6\pi m}{3}=\frac{3\pi}{2}$, $n+\frac{1}{2}+2m=\frac{3}{2}$, $n+2m=1$, $n=1-2m$, и окончательный ответ получим упрощением формул $x=\frac{\pi(1-2m)}{2}\bigcap y=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$. ■

734. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\sin x+2\sin y=1+\sqrt{3},\\2\cos x+2\cos y=1+\sqrt{3}.\end{cases}$

♦ $\left(\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left((-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)+\pi(n+2k);\right.$ $\left.\frac{\pi}{4}\pm(-1)\arccos\left((-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)+\pi(n-2k)\right)$, $n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}$. Обратим внимание на то, что форма ответа определяется способом решения. Проверьте: очевидное решение $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$ входит в наш ответ.

Решение. Используем формулы для суммы или разности синусов или косинусов, $\begin{cases}4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1+\sqrt{3},\\4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1+\sqrt{3},\end{cases}$ $2\left(\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}=0$, поэтому возможны два варианта,

(1) $\cos\frac{x-y}{2}=0$, но это невозможно ввиду уравнения $(\star)$,

(2) $\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0$, равносильно $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, теперь возьмем одно из уравнений системы, $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим первую серию,

$(-1)^{n+1}\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $(-1)^{n+1}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$,

$\frac{x-y}{2}=\pm\arccos\left((-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$,

$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\\frac{x-y}{2}=\pm\arccos\left((-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z},\end{cases}$

$x=\pm\arccos\left((-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4}+\pi n+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$, ■

12.9. Задачи для самостоятельного решения

12.9.0.1. Тригонометрическая арифметическая прогрессия, 1

735. Решите уравнение $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=-1$.

736. Решите уравнение $4\cos^2 x+4\cos^2 2x+4\cos^2 3x+4\cos^2 4x = 7$.

737. Найдите два наименьших положительных корня уравнения $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cdots + \cos 111x + \cos 112x = \sin 56x$.

12.9.0.2. Тригонометрическая арифметическая прогрессия, 2

738. Решите уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0{,}5$.

739. Решите уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$.

740. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \cdots + \sin 110x + \sin 111x = 0$.

12.9.0.3. Тригонометрическая геометрическая прогрессия, 1

741. Решите уравнение $8\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x + \cos 17x = 0$.

742. Решите уравнение $8\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$.

743. Решите уравнение $16\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \cos 15x$

744. Пусть x_1 — наименьший положительный корень уравнения $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \cos(8x) \cdot \cos(16x) \cdot \cos(32x) \cdot \cos(64x) \cdot \cos(128x) \cdot \cos(256x) \cdot \cos(512x) \cdot \cos(1024x) = \frac{1}{4096}$.
Найдите значение выражения $\frac{\pi}{x_1}$ и укажите в ответе остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

745. Если x — наименьший положительный корень уравнения $256 \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \cos(8x) \cdot \cos(16x) \cdot \cos(32x) \cdot \cos(64x) \cdot \cos(128x) = \cos(255x)$, то значение выражения $\frac{\pi}{x}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

12.9.0.4. Тригонометрическая геометрическая прогрессия, 2

746. Решите уравнение $16\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1$.

747. Решите уравнение $16\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x + \cos 17x = 0$

748. Пусть x_1 — наименьший положительный корень уравнения $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \cos(8x) \cdot \cos(16x) \cdot \cos(32x) \cdot \cos(64x) \cdot \cos(128x) \cdot \cos(256x) \cdot \cos(512x) \cdot \cos(1024x) = \frac{1}{2048}$.
Найдите значение выражения $\frac{\pi}{x_1}$ и укажите в ответе остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

749. Если x — наименьший положительный корень уравнения $128 \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \cos(8x) \cdot \cos(16x) \cdot \cos(32x) \cdot \cos(64x) \cdot \cos(128x) + \cos(257x) = 0$, то значение выражения $\frac{\pi}{x}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

12.9.0.5. Понижение порядка, 1

750. Все корни уравнения $1 - \cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x$ образуют множество
1 $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi m$ **2** $x = \frac{3\pi}{4} + \pi m$ **3** $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$
4 $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi m$ **5** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$

751. Решите уравнение $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

752. Решите уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

753. Решите уравнение $2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x = 3$.

754. Решите уравнение $\cos^2 19x + \cos^2 37x + \cos^2 47x + \cos^2 65x = 2$.

12.9.0.6. Понижение порядка, 2

755. Все корни уравнения $1 + \cos 2x = 6 \cdot \sin^2 x$ образуют множество
1 $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$ **2** $x = \frac{5\pi}{6} + \pi m$ **3** $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi m$
4 $x = \frac{\pi}{6} + \pi m$ **5** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$

756. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

757. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 8x$

758. Решите уравнение $2\sin^2 x + 2\sin^2 2x + 2\sin^2 3x = 3$.

759. Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$.

12.9.0.7. Симметрические тригонометрические уравнения, 1

760. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = -\frac{1}{2}$.

761. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos x = 0$.

762. Решите уравнение $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8}$.

763. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

764. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{16}$.

765. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$.

766. Решите уравнение $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{81}{128}$.

767. Решите уравнение $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{29}{64}$.

768. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0$.

769. Решить уравнение: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 4$.

12.9.0.8. Симметрические тригонометрические уравнения, 2

770. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$.

771. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$.

772. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$.

773. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}$.

774. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = 0{,}25$.

775. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = 4$.

776. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6$.

777. Пусть число z равно наименьшему положительному корню уравнения $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x) = \cos 2x$. Укажите верное утверждение.
$\boxed{1}$ $z \in (0;\ 1{,}375)$ $\boxed{2}$ $z \in [1{,}375;\ 1{,}5)$ $\boxed{3}$ $z \in [1{,}5;\ 1{,}75)$
$\boxed{4}$ $z \in [1{,}75;\ 2)$ $\boxed{5}$ $z \in [2;\ 999)$

12.9.0.9. Формулы тройного угла, 1

778. Решите уравнение $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$.

779. Решите уравнение $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

780. Решите уравнение $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x = 3\sin 2x$.

12.9.0.10. Формулы тройного угла, 2

781. Решите уравнение $\sin 3x + 3\sin 2x = 3\sin x$.

782. Решите уравнение $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

783. Решите уравнение $\sin^3 x\sin 3x + \cos^3 x\cos 3x = \cos^3 4x$.

784. Решите уравнение $\cos 4x - \cos^2 3x = 0$.

12.9.0.11. Замена переменной, 1

785. Решите уравнение $\sin(\cos x) = \frac{1}{2}$.

786. Решите уравнение $\sin(\sin(\sin x)) = 0$.

787. Решите уравнение $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$.

788. Решите уравнение $11\sin x + 11\cos x - 5\sin 2x = 7$. Замена $\sin x + \cos x = t$.

789. Решите уравнение $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

790. Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 2$ Примените тождества $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

791. Решите уравнение $\frac{59}{4}\cos x + 6\sin x\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 4\operatorname{tg} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

792. Решите уравнение $4\sin^4 x + \cos 2x = 8\cos^6 x$.

793. Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - 0{,}5\sin 2x$.

12.9.0.12. Замена переменной, 2

794. Решите уравнение $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

795. Решите уравнение $\cos(\sin x) = -\frac{1}{2}$.

796. Решите уравнение $\sin(\sin(\cos x)) = 0$.

797. Решите уравнение $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = 1$.

798. Решите уравнение $5\sin x + 5\cos x + \sin 2x + 1 = 0$. Замена $\sin x + \cos x = t$.

799. Решите уравнение $2\sin x + 3\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 5$.

800. Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 3$ Примените тождества $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

801. Решите уравнение $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2\cos x$.

802. Решите уравнение $1 + \cos 2x + \operatorname{tg} x = 0$.

12.9.0.13. Метод вспомогательного угла, 1

803. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 2$.

804. Решите уравнение $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

805. Решите уравнение $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

806. Все корни уравнения $\sin x - \cos x = -1$ определяются формулой

$\boxed{1}$ $x = \frac{\pi n}{2}$ $\boxed{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{3}$ $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
$\boxed{4}$ $x = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{5}$ $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

807. Все корни уравнения $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ образуют множество

$\boxed{1}$ $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{2}$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{3}$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
$\boxed{4}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{5}$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

808. Укажите промежуток, которому принадлежит хотя бы один корень уравнения $4\sin x + 3\cos x = -5$.

$\boxed{1}$ $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ $\boxed{3}$ $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ $\boxed{4}$ $\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4}$
$\boxed{5}$ $\frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$

809. Пусть x — наименьший положительный корень уравнения $\sin(7x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. Укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к числу $\frac{\pi}{x}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

810. Решите уравнение $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\cos 8x + \sin 6x)$.

811. Решите уравнение $5\sin x - 12\cos x = 13$.

812. Решите уравнение $\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{5}$.

813. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 3x$.

814. Решите уравнение $2\sin 3x + \sin x - \cos 2x = \sqrt{3}(\sin 2x - \cos x)$.

12.9.0.14. Метод вспомогательного угла, 2

815. Решите уравнение $3\sin x + 5\cos x = 4$.

816. Решите уравнение $\cos x + \sin x = -\sqrt{2}$

817. Решите уравнение $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

818. Решите уравнение $3\sin 2x + 4\cos 2x = 5$.

819. Решите уравнение $5\sin x + 12\cos x = 6{,}5$.

820. Все корни уравнения $\cos x + \sin x = -\sqrt{2}$ образуют множество

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

821. Все корни уравнения $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ определяются формулой

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

822. Укажите промежуток, которому принадлежит хотя бы один корень уравнения $5\sin x + 12\cos x = -13$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4}$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$

823. Пусть x — наибольший отрицательный корень уравнения $\sin(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. Укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к числу $\frac{\pi}{-x}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

824. Решите уравнение $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

825. Решите уравнение $12\sin x + 5\cos x = 13$.

826. Решите уравнение $2\cos 41x = \sqrt{2}(\cos 11x - \sin 11x)$.

827. Решите уравнение $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 2\cos x$.

828. Решите уравнение $5\sin 2x + 12\cos 2x + 13\sin 6x = 0$.

12.9.0.15. Уравнения с параметром, 1

829. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = a$ имеет корни.

830. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет корни.

831. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = a$ имеет корни.

Решение. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5+3\cos 4x}{8} = 1 - 0{,}75 \cdot \sin^2 2x$. ■

832. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x = a^2 - 5a + 5$ имеет по крайней мере один корень?

833. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x = a^2 - 6a + 4$ имеет по крайней мере один корень?

834. Укажите множество всех значений параметра p, при которых уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = p^2 - 4p + 4$ имеет корни

835. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos^2 x - (a+7)\cos x + (4-a)(2a+3) = 0$ имеет корни.

836. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x = \sin a - \cos a$ имеет по крайней мере один корень?

837. При каких значениях параметра a уравнение $\cos x \cdot \operatorname{tg} a = 1$ имеет по крайней мере один корень?

838. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)\cos x = a - 1$ имеет по крайней мере один корень?

839. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2-4)\cos x = a + 2$ имеет по крайней мере один корень?

840. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sin x + \frac{\cos x}{\sin 45^\circ}\right) \cdot \operatorname{tg} a = 1$ имеет по крайней мере один корень?

841. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + \sqrt{2}\cos x = a$ имеет по крайней мере один корень?

842. При каких значениях параметра p уравнение $\sin x + p\cos x = 1$ имеет по крайней мере один корень?

843. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{15}{4+\sin x} = a$ имеет по крайней мере один корень?

844. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{3}{1+2\sin x} = a$ имеет по крайней мере один корень?

845. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x + (2a+6)\sin x + (2a-7)(1-4a) = 0$ имеет по крайней мере один корень? Обратите внимание на то, что заданное уравнение имеет очевидные корни: $\sin x \in \{2a-7;\ 1-4a\}$.

12.9.0.16. Уравнения с параметром, 2

846. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = a$ имеет корни

847. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = a$ имеет корни

848. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = a$ имеет корни

849. Укажите множество всех значений параметра a, при которых уравнение $\cos^2 3x + \sin^2 3x = a$ имеет решения

850. Укажите все значения параметра p, при которых уравнение $\log_2(\cos^8 x + \sin^8 x) = p$ имеет по крайней мере один корень, образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

851. При каких значениях параметра a уравнение $\cos x = a^2 - 6a + 6$ имеет по крайней мере один корень?

852. При каких значениях параметра a уравнение
$\sin^2 x - (4a-9)\sin x + (a-5)(3a-4) = 0$
имеет по крайней мере один корень?

853. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x \cdot (\sin a + \cos a) = 1$ имеет по крайней мере один корень?

854. При каких значениях параметра a уравнение $2\sin x \cdot \cos a = 1$ имеет по крайней мере один корень?

855. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\sin x = a$ имеет по крайней мере один корень?

856. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2-1)\cos^2 x = a+1$ имеет по крайней мере один корень?

857. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sin x + \frac{\cos x}{\sin 45^\circ}\right) \cdot \operatorname{tg} a = 3$ имеет по крайней мере один корень?

858. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + 2\cos x = a$ имеет по крайней мере один корень?

859. При каких значениях параметра a уравнение $a\sin x + \cos x = 2a$ имеет по крайней мере один корень?

860. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{6}{2+\sin x} = a$ имеет по крайней мере один корень?

861. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{5}{2+3\cos 2x} = a$ имеет по крайней мере один корень?

862. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x + 4\cos x + 4 - a^2 = 0$ имеет по крайней мере один корень? Обратите внимание на то, что заданное уравнение имеет очевидные корни: $\cos x \in \{-2-a;\ -2+a\}$.

12.9.0.17. Ирациональные тригонометрические уравнения, 1

863. Все корни уравнения $\sqrt{-\sin x} = \sqrt{-\cos x}$ образуют множество
$\boxed{1}$ $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\boxed{2}$ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{3}$ $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ $\boxed{4}$ $\frac{\pi}{4} + \pi n$
$\boxed{5}$ $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n n \in \mathbf{Z}$

864. Все решения неравенства $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{3\cos x} < 0$ на промежутке $x \in (-\pi;\ \pi)$ образуют множество
$\boxed{1}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{2}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{3}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$
$\boxed{4}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right)$ $\boxed{5}$ решений нет

865. Решите уравнение $\sqrt{6} \cdot \sin x = \sqrt{5\sin x - 1}$.

866. Решите уравнение $\sqrt{6} \cdot \sin x = \sqrt{1 - \sin x}$. $\sin x \in \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right\}$.

867. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt{6\cos^2 x - 5}$.

868. Решите уравнение $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$.

869. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

870. Все корни уравнения $\log_2(\sin x) = \log_2(-\cos x)$ образуют множество
1 решений нет **2** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ **3** $\frac{\pi n}{4}$ **4** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$
5 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

871. Решите уравнение $\sqrt{3\sin x - 4\cos x} = \sqrt{5\sin x + 8\cos x}$.

872. Решите уравнение $\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$.

873. Решите уравнение $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{-3x^2 + 7x - 4} = 0$.

12.9.0.18. Ирациональные тригонометрические уравнения, 2

874. Все корни уравнения $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ образуют множество ($n \in \mathbf{Z}$):
1 $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ **2** $\frac{\pi}{4} + \pi n$ **3** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ **4** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ **5** $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$

875. Все решения неравенства $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$ образуют множество ($n \in \mathbf{Z}$) :
1 $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$ **2** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$
3 $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$ **4** $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$
5 $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ 2\pi n\right]$

876. Решите уравнение $\sqrt{6} \cdot \cos x = \sqrt{5\cos x - 1}$.

877. Решите уравнение $\sqrt{6} \cdot \sin x = \sqrt{1 + \sin x}$. $\sin x \in \left\{\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right\}$.

878. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt{5 - 6\cos^2 x}$.

879. Решите уравнение $\sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x = 0$.

880. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

881. Все корни уравнения $\log_2(-\sin x) = \log_2(-\cos x)$ образуют множество
1 $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ **2** $\frac{\pi n}{4}$ **3** $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ **4** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$
5 решений нет

882. Решите уравнение $\sqrt{6\sin x-3\cos x}=\sqrt{5\sin x+4\cos x}$.

883. Решите уравнение $\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0$.

884. Решите уравнение $\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{-4x^2+7x-3}=0$.

12.9.0.19. Метод мажорант, 1

885. Решите уравнение $\sin x-\sin 3x=2$

886. Решите уравнение $\sin 5x-2\cos 3x=3$

887. Решите уравнение $\sin x\cdot\sin 3x=-1$.

888. Решите уравнение $\sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x=-1$.

889. Решите уравнение $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x$.

890. Решите уравнение $\sin^{12} x+\cos^4 x=1$.

891. Решите уравнение $\sin^8 x-\cos^5 x=1$

892. Решите уравнение $\sin^2 x+\cos^2 x=x^2-5x+7$.

893. Решите уравнение $2^{-\cos x}=\log_\pi x+\log_x \pi$

894. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

895. Решите уравнение $\sin(\pi x)+1+(x-1,5)^2=0$.

896. Решите уравнение $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$.

12.9.0.20. Метод мажорант, 2

897. Решите уравнение $\sin x+\sin 9x=2$

898. Решите уравнение $\sin x\cdot\sin 5x=1$.

899. Решите уравнение $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$.

900. Решите уравнение $\sin^{12} x+\cos^5 x=1$

901. Решите уравнение $\sin^3 x+\cos^9 x=1$.

902. Решите уравнение $\cos^4 x-\sin^7 x=1$.

903. Решите уравнение $3\sin x+4\cos x=x^2-6x+14$.

904. Решите уравнение $\left(\cos^2 x+\cos^{-2} x\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 2y\right)(3+\sin 3z)=4$.

905. Решите уравнение $x^2+8x\sin(xy)+16=0$.

12.9.0.21. Тригонометрические неравенства, 1

906. Все решения неравенства $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ образуют множество $(n \in \mathbf{Z})$:
1 $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ **2** $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$ **3** $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$
4 $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ +\infty\right)$ **5** $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$

907. Решите неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ (в ответах $n \in \mathbf{Z}$).
1 $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$ **2** $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$
3 $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$ **4** $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$
5 $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$

908. Наибольшая длина отрезка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства
$\cos^4 x - \sin^4 x \leqslant \sqrt{3} \cdot \sin 2x$, равна
1 $\frac{\pi}{6}$ **2** $\frac{\pi}{2}$ **3** $\frac{\pi}{4}$ **4** $\frac{2\pi}{3}$ **5** $\frac{\pi}{3}$

909. Все значения x, для которых выполняется неравенство $2\sin^2 x + 3\cos x < 0$, образуют множество
1 $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)$ **2** $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi m\right)$
3 $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$ **4** $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi m;\ \frac{\pi}{3} + \pi m\right)$
5 $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi m;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $m \in \mathbf{Z}$

910. Наибольшая длина промежутка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства $\sqrt{16\cos^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) + 5} \geqslant 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)$, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

911. Все решения неравенства $\cos^4 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \sin^4 x$, принадлежащие промежутку $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, образуют промежуток, длина которого равна
1 $\frac{\pi}{6}$ **2** $\frac{\pi}{3}$ **3** $\frac{\pi}{2}$ **4** $\frac{2\pi}{3}$ **5** $\frac{5\pi}{6}$

912. Все решения неравенства $16\sin^4(x) \geqslant 16\cos^2(x)+5$, принадлежащие промежутку $x \in [0;\ \pi]$, образуют промежуток, длина которого равна

1 $\frac{\pi}{6}$ **2** $\frac{\pi}{3}$ **3** $\frac{\pi}{2}$ **4** $\frac{2\pi}{3}$ **5** $\frac{5\pi}{6}$

12.9.0.22. Тригонометрические неравенства, 2

913. Все решения неравенства $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ -\frac{\pi}{2})$, образуют множество $(n \in \mathbf{Z})$:

1 $\left(-\pi;\ -\frac{2\pi}{3}\right)$ **2** $\left(-\pi;\ \frac{5\pi}{6}\right)$ **3** $\left(-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2}\right)$ **4** $\left(-\frac{5\pi}{6};\ 0\right)$
5 $\left(-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right)$

914. Решите неравенство $\sin x > -\frac{1}{2}$ (в ответах $n \in \mathbf{Z}$).

1 $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$ **2** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$
3 $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$ **4** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$
5 $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$

915. Наибольшая длина отрезка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства
$\cos^4 x - \sin^4 x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin 2x$, равна

1 $\frac{\pi}{4}$ **2** $\frac{\pi}{3}$ **3** $\frac{\pi}{2}$ **4** $\frac{\pi}{6}$ **5** $\frac{2\pi}{3}$

916. Все значения x, для которых выполняется неравенство $2\cos^2 x - 3\sin x > 0$, образуют множество

1 $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi m\right)$ **2** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)$
3 $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{\pi}{6}+2\pi m\right)$ **4** $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi m\right)$
5 $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi m;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi m\right)$, $m \in \mathbf{Z}$

917. Наибольшая длина промежутка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства $\sqrt{16\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)+5} \geqslant 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)$, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

918. Все решения неравенства $\cos^4 x - \sin^4 x \geqslant \frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, образуют промежуток, длина которого равна

1 $\frac{\pi}{6}$ **2** $\frac{\pi}{3}$ **3** $\frac{\pi}{2}$ **4** $\frac{2\pi}{3}$ **5** $\frac{5\pi}{6}$

919. Все решения неравенства $16\sin^4(x) - 5 \geqslant 16\cos^2(x)$, принадлежащие промежутку $x \in [0;\ \pi]$, образуют промежуток, длина которого равна

1 $\frac{2\pi}{3}$ **2** $\frac{5\pi}{6}$ **3** $\frac{\pi}{2}$ **4** $\frac{\pi}{6}$ **5** $\frac{\pi}{3}$

12.9.0.23. Системы тригонометрических уравнений, 1

920. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\sin x = \sin y$.

921. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\cos^2 x + \sin^2 y = 0$.

922. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos y} = 2$.

923. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y$.

924. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5\pi}{9}, \\ \sin x = \sin y. \end{cases}$

925. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = a, \\ \sin x = \sin y \end{cases}$ имеет ровно 6 различных решений?

926. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$

927. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

12.9.0.24. Системы тригонометрических уравнений, 2

928. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\cos x = \cos y$.

929. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\cos^2 x + \sin^2 y = 2$.

930. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $3\sqrt[3]{\sin x} + 4\sqrt[4]{\sin y} = 7$.

931. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

932. Изобразите на плоскости с координатами (x, y) множество точек, для которых выполняется соотношение $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 y$.

933. При каких значениях параметра $a\,(a > 0)$ система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \cos x = \cos y, \end{cases}$ имеет ровно 12 различных решений?

934. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 7x = 0. \end{cases}$

935. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Ответы

12.9.0.25. Тригонометрическая арифметическая прогрессия, 1

735. 736. **737.** $\boxed{1}$

12.9.0.26. Тригонометрическая арифметическая прогрессия, 2 **738**. ♦ $x = \frac{\pi m}{9}, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 9k, k \in \mathbf{Z}$.

739. ♦ $x = \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 7k, k \in \mathbf{Z}$. **740.** ♦ $x = \frac{2\pi}{112}$.

12.9.0.27. Тригонометрическая геометрическая прогрессия, 1 **741.** ♦ $\frac{\pi n}{18}, n \neq 18k, k \in \mathbf{Z}$.

742. ♦ $x = \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 7k, k \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 9k + 4, k \in \mathbf{Z}$. **743**. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi n}{15}, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 15k$. **744.** $\boxed{3}$ **745.** $\boxed{5}$

12.9.0.28. Тригонометрическая геометрическая прогрессия, 2 746. ♦ $x = \frac{2\pi m}{15}, m \in \mathbf{Z}, m \neq 15k, k \in \mathbf{Z}$;
$x = \frac{\pi}{17} + \frac{2\pi n}{17}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 17k + 8, k \in \mathbf{Z}$.
747. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi n}{17}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 17k$. **748.** $\boxed{1}$
749. $\boxed{3}$

12.9.0.29. Понижение порядка, 1750. $\boxed{4}$

751. ♦ $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi n}{9}, n \in \mathbf{Z}$. **752.** ♦ $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$.
753. ♦ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
754. ♦ $\frac{\pi}{168} + \frac{\pi m}{84}$; $\frac{\pi}{56} + \frac{\pi n}{28}$; $\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{18}$. $x^{(+)}_{\min} = \frac{\pi}{168}$.

12.9.0.30. Понижение порядка, 2755. $\boxed{1}$

756. ♦ $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. **757.** ♦ $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$. **758**. ♦ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
759. ♦ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

12.9.0.31. Симметрические тригонометрические уравнения, 1 760. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.
761. ♦ $x = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
762. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. **763**. ♦ $x = \pm\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.
764. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. **765**. ♦ $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.
766. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
767. ♦ $x = \pm\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. **768**. ♦ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
769. Использовать неравенство $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$, $z > 0$.♦ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

12.9.0.32. Симметрические тригонометрические уравнения, 2 770. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.
771. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
772. ♦ $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. **773**. ♦ нет решений.
774. ♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$. **775**. ♦ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.
776. Использовать неравенство $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$, $z > 0$.♦ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.
777. $\boxed{3}$

12.9.0.33. Формулы тройного угла, 1
778. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$. **779.** ♦ $2\pi k$,

$-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbf{Z}.$
780. ♦ $x=\pi n, n\in\mathbf{Z}, x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{3}, m\in\mathbf{Z}.$

12.9.0.34. Формулы тройного угла, 2

781. ♦ $x=\pi n, n\in\mathbf{Z}, x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}.$
782. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi m, m\in\mathbf{Z}.$ **783**. ♦ $x=\frac{\pi m}{3}, m\in\mathbf{Z}.$
784. ♦ $x=\pi n, n\in\mathbf{Z}, x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}.$

12.9.0.35. Замена переменной, 1

785. ♦ $x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **786**. ♦ $x=\pi n, n\in\mathbf{Z}.$
787. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$
788. ♦ $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ Замена $\sin x+\cos x=t.$
789. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$ **790**. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$;
$x=-2\,\mathrm{arctg}\,5+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ Примените тождества
$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},\ 1=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2},$
$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t.$ **791**. ♦ $x=\pm2\,\mathrm{arctg}\,3+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$;
$x=\pm2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{11}}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **792**. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbf{Z}.$
793. ♦ $x=2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}.$

12.9.0.36. Замена переменной, 2

794. ♦ $x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **795**. ♦ $\emptyset.$
796. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **797**. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$;
$x=2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **798**. ♦ $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ Замена
$\sin x+\cos x=t.$ **799**. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$
800. ♦ $x=\pi+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$; $x=2\,\mathrm{arctg}\,1,5+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$
Примените тождества $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},$
$1=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2},\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t.$ **801**. ♦ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$
802. ♦ $x=-\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$

12.9.0.37. Метод вспомогательного угла, 1

803. ♦ $x=(-1)^m\arcsin\frac{2}{5}-\arcsin\frac{4}{5}+\pi m, m\in\mathbf{Z}.$
804. ♦ $x=\frac{7\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}.$
805. ♦ $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}.$ **806.** $\boxed{4}$ **807.** $\boxed{1}$ **808.** $\boxed{5}$
809. $\boxed{3}$ **810**. ♦ $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$
811. ♦ $x=\arcsin\frac{12}{13}+\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in\mathbf{Z}.$

812. ♦ $x=(-1)^m \arcsin\frac{\sqrt5}{\sqrt6}+\arcsin\frac{\sqrt5}{\sqrt6}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
813. ♦ $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
814. ♦ $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{5\pi}{6}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$.

12.9.0.38. Метод вспомогательного угла, 2

815. ♦ $x=(-1)^m\arcsin\frac{4}{\sqrt{34}}-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
816. ♦ $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **817**. ♦ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
818. ♦ $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.
819. ♦ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{12}{13}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. **820.** $\boxed{3}$ **821.** $\boxed{3}$
822. $\boxed{4}$ **823.** $\boxed{4}$
824. ♦ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$.
825. ♦ $x=\arcsin\frac{12}{13}+\pi+2\pi m, m\in\mathbf{Z}$.
826. ♦ $x=-\frac{\pi}{208}+\frac{\pi m}{26}, m\in\mathbf{Z}$.
827. ♦ $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}, x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.
828. ♦ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{12}{13}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}$;
$x=-\frac{1}{8}\arcsin\frac{12}{13}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbf{Z}$.

12.9.0.39. Уравнения с параметром, 1 **829**. ♦ $a\in[-1;\ 1]$.
830. ♦ $a\in[0{,}5;\ 1]$. **831**. ♦ $a\in[0{,}25;\ 1]$.
Решение. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5+3\cos 4x}{8}=1-0{,}75\cdot\sin^2 2x$. ■
832. ♦ $a\in[1;\ 2]\cup[3;\ 4]$ **833**. ♦ $a\in[p;\ 1]\cup[5;\ q]$, p и q определите самостоятельно. **834**. ♦ $p\in[1;\ p_1]\cup[p_2;\ 3]$, где p_1 и p_2 — корни уравнения $p^2-4p+3,5=0$.
835. ♦ $a\in[-2;\ -1]\cup[3;\ 5]$. **836**. ♦ $\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right], n\in\mathbf{Z}$.
837. ♦ $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbf{Z}$.
838. ♦ $a\in[0;\ +\infty)$. **839**. ♦ $a\in(-\infty;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$.
840. ♦ $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right], n\in\mathbf{Z}$.
841. ♦ $a\in(-\sqrt3;\ \sqrt3)$. **842**. ♦ $p\in(-\infty;\ +\infty)$.
843. ♦ $a\in[3;\ 5]$. **844**. ♦ $a\in(-\infty;-3]\cup[1;\ +\infty)$.
845. ♦ $a\in[0;\ 0{,}5]\cup[3;\ 4]$. Обратите внимание на то, что заданное уравнение имеет очевидные корни:
$\sin x\in\{2a-7;\ 1-4a\}$.

12.9.0.40. Уравнения с параметром, 2 **846**. ♦ $a\in[-1;\ 1]$.
847. ♦ $a\in[0{,}125;\ 1]$. **848**. ♦ $a\in[-1;\ 1]$. **849**. ♦ $a\in\{1\}$.

850. $\boxed{3}$ **851**. ♦ $a \in [1;\, 3-\sqrt{2}] \cup [3+\sqrt{2};\, 5]$.
852. ♦ $a \in [1;\, 5/3] \cup [4;\, 6]$. **853**. ♦ $\left[\pi n;\, \frac{\pi}{2}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.
854. ♦ $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\, \frac{\pi}{3}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$. **855**. ♦ $a \in (+\infty;\, 0{,}5]$.
856. ♦ $a \in \{-1\} \cup [2;\, +\infty)$.
857. ♦ $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\, \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\, \frac{2\pi}{3}+\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.
858. ♦ $a \in (-\sqrt{5};\, \sqrt{5})$. **859**. ♦ $a \in (-1/\sqrt{3};\, 1/\sqrt{3})$.
860. ♦ $a \in [2;\, 6]$. **861**. ♦ $a \in (-\infty;\, -5] \cup [1;\, +\infty)$.
862. ♦ $a \in [-3;\, -1] \cup [1;\, 3]$. Обратите внимание на то, что заданное уравнение имеет очевидные корни:
$\cos x \in \{-2-a;\, -2+a\}$.

12.9.0.41. Ирациональные тригонометрические уравнения, 1863. $\boxed{5}$ **864.** $\boxed{1}$

865. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
866. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. $\sin x \in \left\{-\frac{1}{2};\, \frac{1}{3}\right\}$.
867. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
868. ♦ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.
869. ♦ $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\; x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **870.** $\boxed{2}$
871. ♦ $x = -\operatorname{arctg} 6 + \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
872. ♦ $1;\, \frac{3}{4};\, -\frac{\pi}{4}+2\pi n,\, n \in \mathbf{Z};\quad \frac{\pi}{4}+2\pi m,\, m \in \mathbf{Z},\, m \neq 0$.
873. ♦ $1;\, \frac{4}{3};\quad \frac{\pi}{3}$.

12.9.0.42. Ирациональные тригонометрические уравнения, 2874. $\boxed{4}$ **875.** $\boxed{2}$

876. ♦ $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
877. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. $\sin x \in \left\{\frac{1}{2};\, -\frac{1}{3}\right\}$.
878. ♦ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
879. ♦ $x \in \left[-\pi+2\pi n;\, 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.
880. ♦ $x \in [2\pi n;\, \pi+2\pi n), n \in \mathbf{Z}$. **881.** $\boxed{3}$
882. ♦ $x = \frac{\pi}{4}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
883. ♦ $1;\, \frac{4}{3};\, \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\, n \in \mathbf{Z};\quad \frac{\pi}{3}+2\pi m,\, m \in \mathbf{Z},\, m \neq 0$.
884. ♦ $1;\, \frac{3}{4};\quad \frac{\pi}{4}$.

12.9.0.43. Метод мажорант, 1885. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

886. ♦ $\emptyset$. **887.** ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **888.** ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.
889. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **890.** ♦ $x = \frac{\pi m}{2}$.
891. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$; $x = \pi + 2\pi m$. **892**. ♦ $x \in \{2; 3\}$.
893. ♦ $x = \pi$. **894**. ♦ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **895.** ♦ $x = \frac{3}{2}$.
$\sin(\pi x) = -1 \cap x = 1,5$. **896**. ♦ $x = \pm 1$.

12.9.0.44. Метод мажорант, 2897. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

898. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **899.** ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
900. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$; $x = 2\pi m$.
901. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $x = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
902. ♦ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $x = \pi m, m \in \mathbf{Z}$. **903**. ♦ $\emptyset$.
904. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}, y = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}, z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
905. ♦ $x = -4$, $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z} x = 4$, $y = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$.

12.9.0.45. Тригонометрические неравенства, 1906. $\boxed{2}$

907. $\boxed{4}$**908.** $\boxed{2}$**909.** $\boxed{5}$**910.** $\boxed{3}$**911.** $\boxed{5}$**912.** $\boxed{2}$

12.9.0.46. Тригонометрические неравенства, 2913. $\boxed{5}$

914. $\boxed{5}$**915.** $\boxed{3}$**916.** $\boxed{3}$**917.** $\boxed{3}$**918.** $\boxed{2}$**919.** $\boxed{5}$

12.9.0.47. Системы тригонометрических уравнений, 1

920. ♦ $y = x + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \cup \quad x + y = \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
921. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \cap y = \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
922. ♦ $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad \cap \quad y = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
923. **924**. ♦ $\left(\pi\sqrt{\frac{5}{18}}; \pi\sqrt{\frac{5}{18}}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ и симметричные решения.
925. ♦ $a \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}; \pi\sqrt{2}\right) \cup \left\{\frac{\pi\sqrt{10}}{2}\right\}$. **926**. ♦ $x = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
927. ♦ $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} - \pi k\right)$;
$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} - \pi k\right), n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}$.

12.9.0.48. Системы тригонометрических уравнений, 2

928. ♦ $y = x + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \cup x + y = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. **929**. ♦ $x = \pi n, n \in \mathbf{Z} \cap y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$. **930**. ♦ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad \cap \quad y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$. **931**. ♦ $y = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z} \cap$ ОДЗ

932. **933**. ♦ $a \in \left(\sqrt{2}\cdot\pi;\ 2\pi\right) \cup \left(2\pi;\ 2\sqrt{2}\cdot\pi\right] \cup \{\sqrt{10}\cdot\pi\}$.
934. ♦ $x = 2\pi m - \frac{\pi}{2}, m \in \mathbf{Z}$. **935**. ♦ $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi k-\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi k-\pi n\right), n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}$.