Государственный университет — Высшая школа экономики

А.А.Быков

Решение задач ЕГЭ по математике

Текстовые задачи,
тригонометрия,
показательная и логарифмическая функции

Для учащихся 10-х и 11-х классов

Москва 2009

Содержание

1208. Все решения неравенства $\arccos(\cos x) \geqslant x^2$. образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}-1$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ $1+\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 2

1209. Все решения неравенства $\arcsin(\arcsin x) \geqslant \frac{\pi}{4}$. образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sin 1 - \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $1 - \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $1 - \sin 1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $1 + \sin 1$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\sin 1 + \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответы

1180. $\boxed{\mathbf{1}}$ **1181.** $\boxed{\mathbf{5}}$ **1182.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1183.** $\boxed{\mathbf{5}}$ **1184.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1185.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1186.** $\boxed{\mathbf{2}}$
1187. $\boxed{\mathbf{5}}$ **1188.** $\boxed{\mathbf{2}}$ **1189.** $\boxed{\mathbf{3}}$ **1190.** $\boxed{\mathbf{5}}$ **1191.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1192.** $\boxed{\mathbf{1}}$ **1193.** $\boxed{\mathbf{5}}$
1194. $\boxed{\mathbf{1}}$ **1195.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1196.** $\boxed{\mathbf{1}}$ **1197.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1198.** $\boxed{\mathbf{3}}$ **1199.** $\boxed{\mathbf{2}}$ **1200.** $\boxed{\mathbf{2}}$
1201. $\boxed{\mathbf{3}}$ **1202.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1203.** $\boxed{\mathbf{1}}$ **1204.** $\boxed{\mathbf{4}}$ **1205.** $\boxed{\mathbf{5}}$ **1206.** $\boxed{\mathbf{3}}$ **1207.** $\boxed{\mathbf{2}}$
1208. $\boxed{\mathbf{5}}$ **1209.** $\boxed{\mathbf{1}}$

Тема 15. Показательная и логарифмическая функция

15.1. Степенная и показательная функции

15.1.1. Степень с рациональным показателем

Теоретические сведения Степень с рациональным показателем определяется равенством $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}$, m и n — взаимно простые числа. При $m > 0$ допустимо $a = 0$. Если $a > 0$, $b > 0$ — действительные числа, p, q — рациональные числа любого знака, то $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$, $(ab)^p = a^p \cdot b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.
Например, $108^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{108^2} = \sqrt[3]{(27 \cdot 4)^2} = \sqrt[3]{3^6 \cdot 2^4} = 9 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$,
$3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7}$, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{12}$, $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^2$, $\left(3^7\right)^5 = 3^{35}$, $\left(3^7\right)^{-5} = 3^{-35}$, $\left(3^{-7}\right)^{-5} = 3^{35}$, $(21)^5 = 3^5 \cdot 7^5$, $\left(\dfrac{3}{7}\right)^5 = \dfrac{3^5}{7^5}$.

15.1.2. Степень с действительным показателем

Теоретические сведения Если $a > 1$ — действительное число, $b > 0$ — действительное число, которое можно представить в виде бесконечной периодической или непериодической десятичной дроби, $b = b_0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$, то a^b определяется как действительное число, которое при любом $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$ лежит на числовой оси между числами $a^{b_0,b_1\, b_2 \ldots b_n}$ и $a^{b_0,b_1\, b_2 \ldots b_n + 10^{-n}}$, так что $a^{b_0,\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n} \leqslant a^b \leqslant a^{b_0,\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n + 10^{-n}}$. В последнем утверждении можно заменить оба символа $\leqslant$ на $<$, если только число b нельзя представить в виде $b = \dfrac{m}{10^k}$, $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$.

Например, попробуем определить a^π, где $a > 1$, $a^{3,1} \leqslant a^{3,1415926\ldots} \leqslant a^{3,2}$, $a^{3,14} \leqslant a^{3,1415926\ldots} \leqslant a^{3,15}$, $a^{3,141} \leqslant a^{3,1415926\ldots} \leqslant a^{3,142}$, и т.д.
Примерно так же определяется a^b при $0 < a < 1$ с тем только отличием, что теперь $a^{b_0,\,b_1\,b_2\,\ldots\,b_n} \geqslant a^b \geqslant a^{b_0,\,b_1\,b_2\,\ldots\,b_n + 10^{-n}}$.
Свойства степени с действительным показателем те же, что и для степени с рациональным показателем.

15.1.3. Показательная функция

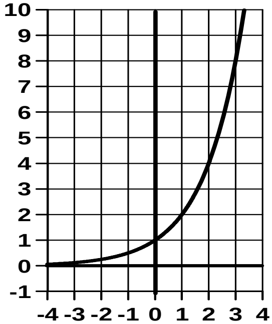
Теоретические сведения Функция $y = a^x$ при $a \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$ называется показательной. Отметим, что и при других значениях параметра a выражение a^x определено на соответствующем множестве значений x, но мы уже не называем такую функцию показательной и не исследуем ее свойства.
Если $a \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$, то область определения функции $y = a^x$ совпадает со множеством всех действительных чисел, а множество значений совпадает с промежутком $y \in (0;\ +\infty)$. Если $a \in (0;\ 1)$, то функция $y = a^x$ убывает на всей числовой оси, а если $a \in (1;\ +\infty)$, то функция $y = a^x$ возрастает на всей числовой оси.

Графики основных показательных функций: рис.30

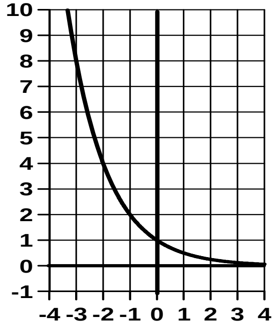
1210. Сколько нечетных функций имеется среди перечисленных?
(a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, **(b)** $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, **(c)** $f(x) = 2^x + (0,5)^x$, **(d)** $f(x) = 2^x$, **(e)** $f(x) = (0,5)^x - (0,5)^{-x}$, **(f)** $f(x) = 2^{x^2} - 2^{-x^2}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ одна $\boxed{\mathbf{2}}$ две $\boxed{\mathbf{3}}$ три $\boxed{\mathbf{4}}$ четыре $\boxed{\mathbf{5}}$ ни одной

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$ ⧫ 2; $(b), (e)$.

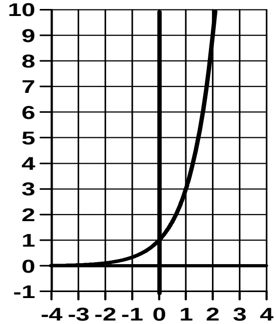
Решение. Перечислим свойства четности каждой из упомянутых функций,
(a) четная, $2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^x + 2^{-x}$.
(b) нечетная, $2^{-x} - 2^{-(-x)} = -(2^x - 2^{-x})$.
(c) четная, $2^{-x} + 0{,}5^x = 2^x + 2^{-x}$, см. (a).



$y = 2^x$.

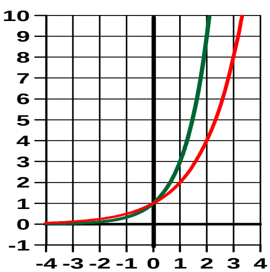


$y = 2^{-x}$.

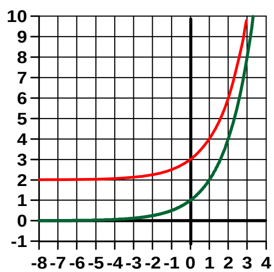


$y = 3^x$.

Рис. 30. Показательная функция

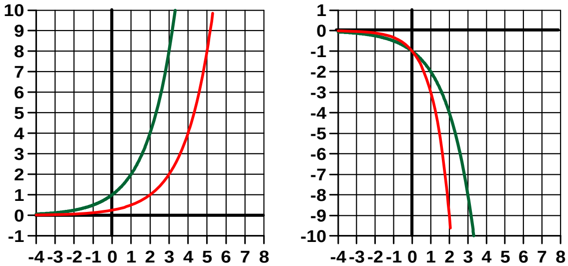


$f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$.



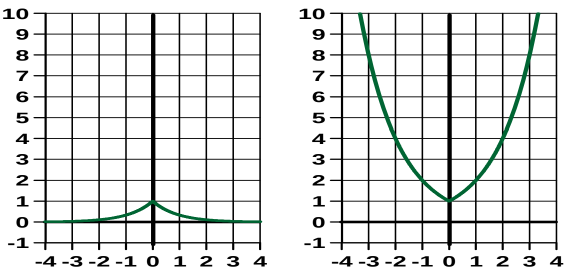
$f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 2$.

Рис. 31. Показательная функция



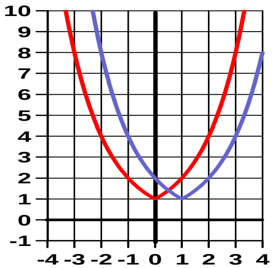
$y = 2^x$; $y = 2^{x-2}$. $y = -2^x$; $y = -3^x$.

Рис. 32. Показательная функция

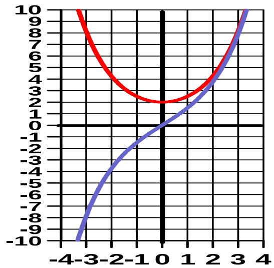


$y = 3^{-|x|}$. $y = 2^{|x|}$.

Рис. 33. Показательная функция с модулем



$y = 2^{|x|}$,
$y = 2^{|x-1|}$.



$y = 2^{x} + 2^{-x}$,
$y = 2^{x} - 2^{-x}$.

Рис. 34. Показательная функция с модулем

(d) не является четной и не является нечетной, $2^{-1} \neq \pm 2^{1}$.
(e) нечетная, $0{,}5^{-x} - 0{,}5^{-(-x)} = -(0{,}5^{x} - 0{,}5^{-x})$.
(f) четная, $f(x) = g(x^2)$, $f(-x) = g((-x)^2) = g(x^2) = f(x)$. ■

1211. Функция $y = 3^{x+3} \cdot 4^{x} - 12^{x}$ тождественно равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 26 $\boxed{\mathbf{2}}$ $26 \cdot 5^{x}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $26 \cdot 12^{x}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $8 \cdot 12^{x}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 27

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $26 \cdot 12^{x}$.

Решение. $y = 27 \cdot 3^{x} \cdot 4^{x} - 12^{x}$, $y = 27 \cdot 12^{x} - 12^{x}$, $y = 26 \cdot 12^{x}$. ■

1212. Значение выражения $625^{\left(1024^{-0,2}\right)}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ -5 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0,2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ 5 $\boxed{\mathbf{5}}$ $0,2$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 5.

Решение. $625^{\left(1024^{-0,2}\right)} = (5^4)^{\left((2^{10})^{-\frac{1}{5}}\right)} = (5^4)^{\left(2^{-2}\right)} = (5^4)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = 5^{\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)} = 5^1 = 5$. ■

Теоретические сведения Напомним, что множество всех значений параметра b, при которых уравнение $f(x) = b$ имеет хотя бы одно решение, совпадает со множеством значений функции $y = f(x)$.

1213. Укажите множество значений функции $y = 7^x$.

$\boxed{1}$ $y \in [0;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $y \in [1;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $y \in (0;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $y \in (1;\ +\infty)$
$\boxed{5}$ $y \in (0;\ 1]$

Ответ $\boxed{3}$♦ $y \in (0;\ +\infty)$.

Решение. Уравнение $f(x) = b$ имеет по крайней мере один корень тогда и только тогда, когда $b \in E$, где E — множество значений функции $f(x)$. Уравнение $7^x = b$ имеет корень $x = \log_7 b$ при любом $b > 0$. Если $b \leqslant 0$, то уравнение $7^x = b$ корней не имеет. ■

1214. Множество значений функции $f(x) = 7^{-x}$ на промежутке $x \in [-3;\ -2]$ совпадает с промежутком, длина которого равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ $f(x) \Subset [49;\ 343]$.

Решение. Функция $y = 7^{-x}$ на промежутке $x \in [-3;\ -2]$ убывает, поэтому $f(x) \in \left[7^{-(-2)};\ 7^{-(-3)}\right]$, $f(x) \in \left[7^2;\ 7^3\right]$. ■

1215. Все значения параметра b, при которых уравнение $3^{-x} = b$ имеет единственное решение, образуют множество

$\boxed{1}$ $[0;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $(-\infty;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$
$\boxed{5}$ $(1;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{2}$♦ $b \in (0;\ +\infty)$.

15.1.4. Функция a^{b^x}

Теоретические сведения Выражение a^{b^c} всегда интерпретируется как $a^{(b^c)}$. Выражение $\left(a^b\right)^c$ равно $a^{(b\cdot c)}$. Множество значений функции $y = a^{b^x}$ определяется по общему правилу исследования множества значений сложной функции.

Пусть $b \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Тогда $b^x \in (0;\ +\infty)$; Если $a \in (0;\ 1)$, то $a^{b^x} \in (0;\ 1)$, $a^{-b^x} \in (1;\ +\infty)$, а если

$a \in (1;\ +\infty)$, то $a^{b^x} \in (1;\ +\infty)$, $a^{-b^x} \in (0;\ 1)$. Такмим образом, уравнение $a^{b^x} = c$ имеет корень не при всех сочетаниях значений a, b, c.

1216. Значение выражения $2^{3^4} - \left(2^3\right)^4$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x = \ldots 6$.

Решение. $x = 2^{81} - 2^{12}$, $x = \ldots 2 - \ldots 6$. ■

1217. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{3^x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(0;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(1;\ 8)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $f(x) \Subset (1;\ +\infty)$.

Решение. Функция $f(x)$ относится к числу сложных функций, $f(x) = 2^{t(x)}$, где $t(x) = 3^x$, $t(x) \Subset (0;\ +\infty)$, $2^{t(x)} \Subset (2^0;\ +\infty)$, $2^{3^x} \Subset (1;\ +\infty)$. ■

1218. Укажите множество значений функции $y = 2^{-3^x}$

♦ $y \in (0;\ 1)$.

Решение. $t = 3^x$, $y = 2^{-t}$, $t \in (0;\ +\infty)$, $2^t \in (0;\ 1)$, $2^{3^x} \in (0;\ 1)$. ■

1219. Исследуйте монотонность и укажите множество значений каждой из функций на множестве $(-\infty;\ +\infty)$:

(1) $2^{2^x} \Subset (1;\ +\infty)$,

(2) $2^{2^{-x}} \Subset (1;\ +\infty)$,

(3) $2^{-2^x} \Subset (0;\ 1)$,

(4) $-2^{2^x} \Subset (-\infty;\ -1)$,

(5) $-2^{2^{-x}} \Subset (-\infty;\ -1)$,

(6) $-2^{-2^{-x}} \Subset (-1;\ 0)$.

15.1.5. Композиция показательной функции и квадратичной функции

Теоретические сведения Напомним, что сложной функцией

(или композицией двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$) называется функция $y = f(g(x))$. Функцию $y = g(x)$ называем внутренней, функцию $y = f(x)$) называем внешней.
Напомним также простое правило, которое дает возможность исследовать монотонность сложной функции:
Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $x \in (a;\ b)$, функция $y = g(x)$ возрастает на промежутке $x \in (p;\ q)$, множество значений функции $y = g(x)$ на промежутке $x \in (p;\ q)$ включено в промежуток $(a;\ b)$, то функция $y = f(g(x))$ возрастает на промежутке $x \in (p;\ q)$.
Если Вы привыкли систематически использовать замену переменной и у Вас не вызывает затруднений использование различных букв для различных переменных, то Вы можете использовать это правило и в следующей фопрмулировке:
Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $x \in (a;\ b)$, функция $x = g(t)$ возрастает на промежутке $t \in (p;\ q)$, множество значений функции $x = g(t)$ на промежутке $t \in (p;\ q)$ включено в промежуток $(a;\ b)$, то функция $y = f(g(t))$ возрастает на промежутке $t \in (p;\ q)$.
Аналогичные правила можно сформулировать и для убывающих функций.
Если мы договоримся, что всегда выполнены условия, обеспечивающие правильные включения множества значений внутренней монотонной функции в область определения внешней монотонной функции, то правила можно сформулировать так:

- Возрастающая функция от возрастающей функции возрастает.
- Возрастающая функция от убывающей функции убывает.
- Убывающая функция от возрастающей функции убывает.
- Убывающая функция от убывающей функции возрастает.

Теоретические сведения Пусть наименьшее значение функции $x = f(t)$ на промежутке $t \in [p;\ q]$ равно b, наибольшее значение функции $x = f(t)$ на том же промежутке равно B.

Если $a > 1$, то наименьшее значение функции $y = a^{f(t)}$ на промежутке $t \in [p;\ q]$ равно a^b, наибольшее значение функции $y = a^{f(t)}$ на том же промежутке равно a^B.

Если $0 < a < 1$, то наименьшее значение функции $y = a^{f(t)}$ на промежутке $t \in [p;\ q]$ равно a^B, наибольшее значение функции $y = a^{f(t)}$ на том же промежутке равно a^b.
Те же правила можно использовать и в случае, когда функция $x = f(t)$ определена на промежутке $t \in (-\infty;\ +\infty)$ или даже на некотором числовом множестве $\mathcal{X}$

Теоретические сведения Если абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ не принадлежит промежутку $x \in [u;\ v]$, то множество значений функции $y = ax^2 + bx + c$ на промежутке $x \in [u;\ v]$ совпадает с промежутком, концы которого имеют координаты $au^2 + bu + c$ и $av^2 + bv + c$.
Если абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ принадлежит промежутку $x \in [u;\ v]$, то множество значений функции $y = ax^2 + bx + c$ на промежутке $x \in [u;\ v]$ совпадает с промежутком, один из концов которого имеет координату $ax_0^2 + bx_0 + c$ (x_0 — абсцисса вершины параболы), а другой конец имеет координату $au^2 + bu + c$ или $av^2 + bv + c$ (нужно брать то из значений u или v, которое дальше от x_0.)
Заметим, что после выполнения замены переменной $d^x = t$ выражение $y = a \cdot d^{2x} + b \cdot d^x + c$ превратится в квадратный трехчлен.

1220. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{x^2-4x+5}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0{,}5;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[4;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $f(x) \Subset [2;\ +\infty)$.

Решение. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, $x^2 - 4x + 5 \Subset [1;\ +\infty)$, $2^{x^2-4x+5} \Subset [2^1;\ +\infty)$, рис. 35. ■

1221. Укажите множество значений функции $y = 0{,}5^{x^2-4x+1}$.
♦ $y \in (0;\ 8]$.

Решение. $0{,}5^{x^2-4x+1} = 2^{-(x^2-4x+1)}$, $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$, $x^2 - 4x + 1 \Subset [-3;\ +\infty)$, $-(x^2 - 4x + 1) \Subset (-\infty;\ 3]$, $2^{x^2-4x+1} \Subset (0;\ 2^3]$, $0{,}5^{x^2-4x+1} \Subset (0;\ 8]$. ■

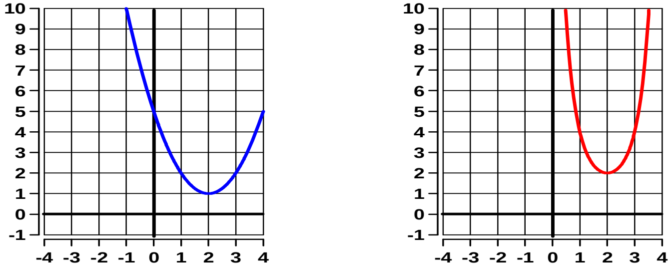


График $f(x) = x^2 - 4x + 5$. График $f(x) = 2^{x^2-4x+5}$.

Рис. 35.

1222. Укажите множество значений функции $f(x) = (0{,}5)^{-x^2+4x-6}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-2;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[4;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $[4;\ +\infty)$.

Решение. $0{,}5^{-x^2+4x-6} = 2^{x^2-4x+6}$, $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$, $x^2 - 4x + 6 \in [2;\ +\infty)$, $2^{x^2-4x+6} \in [2^2;\ +\infty)$, $0,5^{-x^2+4x-6} \in [4;\ +\infty)$. ■

1223. Найдите множество значений функции $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[-1;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $f(x) \in [-1;\ +\infty)$.

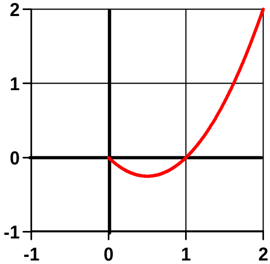
Решение. $3^{2x} = (3^x)^2$, $f(x) = g(t(x))$, $g(t) = t^2 - 2t$, $t(x) = 3^x \in (0;\ +\infty)$, $g(t) = (t-1)^2 - 1$, вершина параболы $t = 1$ достижима, $f(x) \in [-1;\ +\infty)$. ■

1224. Найдите множество значений функции $f(x) = 9^x - 3^x$.

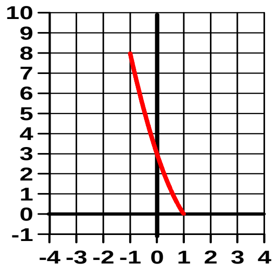
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[6;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-0{,}25;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(0;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-0{,}5;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $f(x) \in [-0{,}25;\ +\infty)$.

Решение. $9^x = (3^x)^2$, $t = 3^x \in (0;\ +\infty)$,



$f(t) = t^2 - t$



$f(t) = t^2 - 4t + 3,\ t \in [-1;\ 1]$

Рис. 36.

$f(x) = g(t(x))$, $g(t) = t^2 - t$, $g(t) = (t - 0,5)^2 - 0{,}25$, вершина параболы $t = 0{,}5$ достижима, $f(x) \in [-0,25;\ +\infty)$. ■

1225. Укажите множество значений $f(x) = 9^x + 3^x$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[6;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-0{,}25;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(0;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $[-0{,}5;\ +\infty)$

♦ $f(x) \in (0;\ +\infty)$.

Решение. $9^x = (3^x)^2$; $t = 3^x \in (0;\ +\infty)$; $y = t^2 + t$; $y = (t + 0,5)^2 - 0,25$; вершина параболы $t = 0,5$ недостижима; на промежутке $t \in (0;\ +\infty)$ функция $y = t^2 + t$ монотонно возрастает, $y \in (0;\ +\infty)$. ■

1226. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{\cos^2 x - 4\cos x + 3}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0{,}5;\ 256]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ 8]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[1;\ 256]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(0;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$ ♦ $f(x) \in [1;\ 256]$.

Решение. $t = \cos x \in [-1;\ 1]$, $y = 2^{t^2 - 4t + 3}$, $t^2 - 4t + 3 = (t - 2)^2 - 1$, вершина параболы $t = 2$ недостижима; на промежутке $t \in [-1;\ 1]$ функция $t^2 - 4t + 3$ монотонно убывает, $t = -1$, $t^2 - 4t + 3 = 8$; $t = 1$, $t^2 - 4t + 3 = 0$; $t \in [-1;\ 1]$, $t^2 - 4t + 3 \in [0;\ 8]$, $2^{t^2 - 4t + 3} \in [2^0;\ 2^8]$, $2^{t^2 - 4t + 3} \in [1;\ 256]$. ■

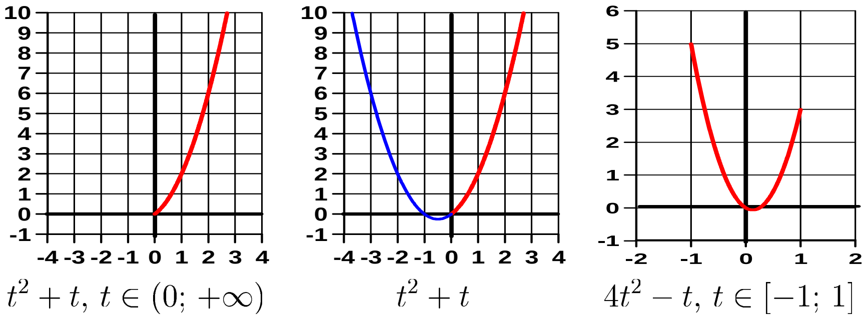


Рис. 37.

1227. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{4\cos^2 x - \cos x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0{,}0625;\ 32]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2^{-\frac{1}{16}};\ 32]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[8;\ 32]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(0;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $f(x) \in [2^{-1/16};\ 32]$.

Решение. $f(x) = g(t(x)),\ g(t) = 2^{4t^2-t},\ t(x) = \cos x \in [-1;\ 1]$, $h(t) = 4t^2 - t, \quad g(x) = 2^{h(t(x))}, \quad h(t) = 4t^2 - t = \left(2t - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16}$, вершина параболы $t = 0,125$ достижима, на промежутке $t \in [-1;\ 1]$ функция $h(t) = 4t^2 - t$ достигает наименьшего значения в точке $t = \dfrac{1}{8}$, а наибольшего значения в точке, максимально удаленной от вершины, $t_1 = \dfrac{1}{8}$, $h(t_1) = -\dfrac{1}{16}$, $t_2 = -1$, $h(t_2) = 5$, $t \in [-1;\ 1]$, $h(t) \in [-\dfrac{1}{16};\ 5]$, $2^{4t^2-t} \in [2^{-1/16};\ 2^5]$. ■

15.1.6. Дробно-квадратичная функция и показательная функция

Теоретические сведения Наименьшее положительное число из множества значений функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ равно 2 и функция достигает его при $x = 1$. Наибольшее отрицательное число

из множества значений функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ равно -2 и функция достигает его при $x = -1$. Чтобы найти экстремальные значения функции $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ при $a > 0,\ b > 0$, выполним преобразование $f(x) = \sqrt{a \cdot b}\left(\frac{\sqrt{a}\cdot x}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot x}\right)$. В этом случае можно также использовать производную для отыскания точек возможного экстремума.
Для решения некоторых задач этого раздела нужно использовать замену переменных и тождество $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

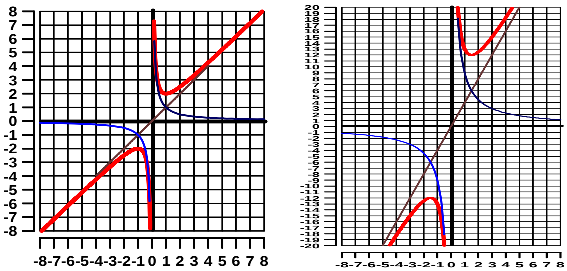
1228. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[0;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $f(x) \Subset [2;\ +\infty)$.

Решение 1. $f(x) = g(t(x))$, $t(x) = 2^x$, $t(x) \Subset (0;\ +\infty)$, $g(t) = t + \frac{1}{t}$, $t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2\sqrt{t \cdot \dfrac{1}{t}}$, $t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2$, $t + \dfrac{1}{t} = 2$, если $t = \dfrac{1}{t}$, $t = \pm 1$. Значение $t = 1$ достижимо. ■

Решение 2. Решим уравнение $2^x + 2^{-x} = p$. Используем тождество $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$, приведем все три слагаемых к общему знаменателю, $(\star)$ $\frac{2^{2x} - p\cdot 2^x + 1}{2^x} = 0$. Так как знаменатель стррого больше нуля, $(\star)$ равносильно уравнению $2^{2x} - p \cdot 2^x + 1 = 0$. Выполним замену $(\star\star)$ $t = 2^x$, получим квадратное уравнение $t^2 - pt + 1 = 0$, которое разрешимо для тех и только тех значений p, для которых $p^2 - 4 \geqslant 0$, все эти значения параметра образуют множество $p \in (-\infty;\ -2]\ [2;\ +\infty)$. Теперь исследуем разрешимость уравнения $(\star\star)$. Заметим, что $t_1 + t_2 = p$, $t_1 t_2 = 1$, поэтому оба корня t_1, t_2 одного знака, который совпадает со знаком величины p. Следовательно, необходимое и домтаточное условия разрешимости $t > 0$, равносильно условию $p > 0$, поэтому окончательный ответ таков, уравнение $(\star)$ разрешимо при $p \in [2;\ +\infty)$. ■

1229. Укажите наименьшее значение функции $f(x) = 5^x + 5^{2-x}$.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 10 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ 25 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5



$y = t + \frac{1}{t}$. $y = 4t + \frac{9}{t}$.

Рис. 38.

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $f(x) \Subset [10;\ +\infty)$.

Решение. Выполнив замену переменных $t = 5^x$, $t \Subset (0;\ +\infty)$, получим $f(x) = g(t(x))$, $g(t) = t + \dfrac{25}{t}$. Исследуем разрешимость уравнения $5^x + 5^{2-x} = p$. Используем тождество $5^{-x} = \frac{1}{5^x}$, приведем все три слагаемых к общему знаменателю, $(\star)$ $\frac{5^{2x} - p\cdot 5^x + 25}{5^x} = 0$. Так как знаменатель стррого больше нуля, $(\star)$ равносильно уравнению $5^{2x} - p\cdot 5^x + 25 = 0$. Выполним замену $(\star\star)$ $t = 2^x$, получим квадратное уравнение $t^2 - pt + 25 = 0$, которое разрешимо для тех и только тех значений p, для которых $p^2 - 100 \geqslant 0$, все эти значения параметра образуют множество $p \in (-\infty;\ -10]\ [10;\ +\infty)$. Теперь исследуем разрешимость уравнения $(\star\star)$. Заметим, что $t_1 + t_2 = p$, $t_1 t_2 = 1$, поэтому оба корня t_1, t_2 одного знака, который совпадает со знаком величины p. Следовательно, необходимое и достаточное условия разрешимости $t > 0$, равносильно условию $p > 0$, поэтому окончательный ответ таков, уравнение $(\star)$ разрешимо при $p \in [10;\ +\infty)$. ■

1230. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{x+2} + 9 \cdot 2^{-x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[13;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[12;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ -12] \bigcup [12;\ +\infty)$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $f(x) \Subset [12;\ +\infty)$.

Решение 1. $t = 2^x$, $t \in (0;\, +\infty)$, $y = 4t + \dfrac{9}{t}$, $4t + \dfrac{9}{t} \geqslant 2\sqrt{4t \cdot \dfrac{9}{t}}$, $4t + \dfrac{9}{t} \geqslant 2 \cdot 6$, $4t + \dfrac{9}{t} = 12$, если $4t = \dfrac{9}{t}$, $t = \pm 3/2$, обязательно проверить достижимость точки минимума. ■

Решение 2. $y = 4t + \dfrac{9}{t}$, $y' = 4 - \dfrac{9}{t^2}$, $y' = \dfrac{4t^2 - 9}{t^2}$, $t^\star = \dfrac{3}{2}$, $y(t^\star) = 12$. $t \in (0;\, 1{,}5)$, $y' < 0$, $t \in (1{,}5;\, +\infty)$, $y' > 0$, поэтому точка $y(t^\star) = 12$ — это точка минимума, $y \in [12;\, +\infty)$. ■

1231. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{7x} + 7 \cdot 2^{-x}$.

♦ $f(x) \Subset [8;\, +\infty)$.

Решение. Пусть $t = 2^x$. Тогда $f(x) = g(t(x)$, $g(t) = t^7 + \dfrac{7}{t}$, $t(x) = 2^x$, $g'(t) = 7t^6 - \dfrac{7}{t^2}$, $g'(t) = \dfrac{7(t^8 - 1)}{t^2}$, $t^\star = 1$, $g(t^\star) = 8$. $t \in (0;\, 1)$, $g' < 0$, $t \in (1;\, +\infty)$, $g' > 0$, поэтому точка $y(t^\star) = 1$ — это точка минимума, $y \in [8;\, +\infty)$. ■

1232. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{7x} + 7 \cdot 2^{8-x}$.

♦ $y \in [1024;\, +\infty)$.

Решение. $y = t^7 + \dfrac{7 \cdot 2^8}{t}$, $y' = 7t^6 - \dfrac{7 \cdot 2^8}{t^2}$, $y' = \dfrac{7(t^8 - 2^8)}{t^2}$, $t^\star = 2$, $y(t^\star) = 2^7 + \dfrac{7 \cdot 2^8}{2} = 1024$. $t \in (0;\, 2)$, $y' < 0$, $t \in (2;\, +\infty)$, $y' > 0$, поэтому точка $y(t^\star) = 1$ — это точка минимума, $y \in [1024;\, +\infty)$. ■

1233. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{x^2-4x+4} + 2^{-x^2+4x-4}$.

♦ $f(x) \Subset [2;\, +\infty)$.

Решение. $t = 2^{x^2-4x+4}$, $y = t + t^{-1}$, $x^2 - 4x + 4 \in [0;\, +\infty]$, $t \in [1;\, +\infty)$, обязательно проверить достижимость точки минимума, в данном случае точка $t = 1$ достижима. ■

1234. Укажите множество значений функции
$f(x) = 2^{2x^2-8x+6} - 2^{x^2-4x+5}$.
♦ $f(x) \Subset [-4;\ +\infty)$.

Решение. $y = 2^{2(x^2-4x+3)} - 2^{(x^2-4x+3)+2}$, $t = 2^{x^2-4x+3}$, $y = t^2 - 4t$, $y = (t-2)^2 - 4$, $x^2 - 4x + 3 \in [-1;\ +\infty]$, $t \in [0,5;\ +\infty)$, обязательно проверить достижимость точки минимума, в данном случае точка $t = 2$ достижима. ■

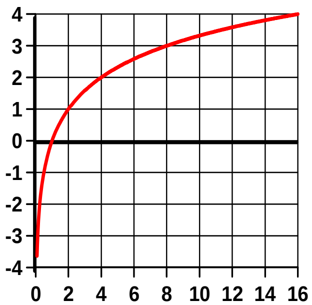
1235. Укажите множество значений функции
$f(x) = 2^{x^2-4x+8} + 2^{-x^2+4x-2}$.
♦ $f(x) \Subset [2;\ +\infty)$.

Решение 1. Это сложная задача. Сначала решим ее без применения производной. Пусть $t = 2^{x^2-4x+4}$, $x^2 - 4x + 4 \in [0;\ +\infty]$, $t \in [1;\ +\infty)$, $y = 16t + 4t^{-1}$, $16t + \dfrac{4}{t} \geqslant 2\sqrt{16t \cdot \dfrac{4}{t}}$, $16t + \dfrac{4}{t} \geqslant 2 \cdot 8$, $16t + \dfrac{4}{t} = 16$, если $16t = \dfrac{4}{t}$, $t = \pm 0,5$, в данном случае $t = 0,5$ недостижима. Функция $y = 16t + \dfrac{4}{t}$ на промежутке $t \in [1;\ +\infty)$ монотонно возрастает, наименьшее знасение достигает в точке $t = 1$, $y(t = 1) = 20$, $y \in [20;\ +\infty)$. ■

Решение 2. Решение с помощью производной более эффективно,
$y = 16t + 4t^{-1}$, $y' = 16 - 4t^{-2}$, $y' = \dfrac{16t^2 - 4}{t^2}$, на промежутке $t \in [1;\ +\infty)$ функция $y(t)$ монотонно возрастает. ■

15.2. Определение и свойства логарифма

Теоретические сведения Логарифмом числа b, где $b > 0$, по основанию a, где $a \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$, называется такое число c, что $a^c = b$. Это число обозначается $c = \log_a b$. Свойства логарифмов: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a b^r = r\log_a b$, $\log_a a^r = r$, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$, $\log_c a \cdot \log_a b \cdot \log_b p = \log_c p$, $\log_c a \cdot \log_a b \cdot \log_b c = 1$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,



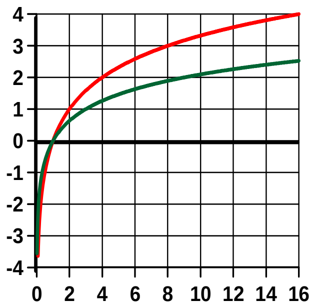


Рис. 39. (a) График $y = \log_2 x$. (b) График $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$

$\log_{a^r} b^t = \frac{t}{r} \log_a b$, каждое равенство — тождество, т.е. верно при любых допустимых значениях входящих в него величин.

Теоретические сведения Важное тождество: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Доказательство: $a^{\log_b c} = a^{\log_b a \cdot \log_a c} = a^{\log_a c \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$.

15.2.1. Преобразования логарифмов

1236. Значение выражения $\log_2 2$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ 1.

Решение. Так как $2^1 = 2$, то $\log_2 2 = 1$. ■

1237. Значение выражения $\log_5 625$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ 4.

Решение. $\log_5 625 = \log_5(5^4) = 4 \log_5 5 = 4$. ■

1238. Значение выражения $\log_4 2\sqrt{2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{4}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

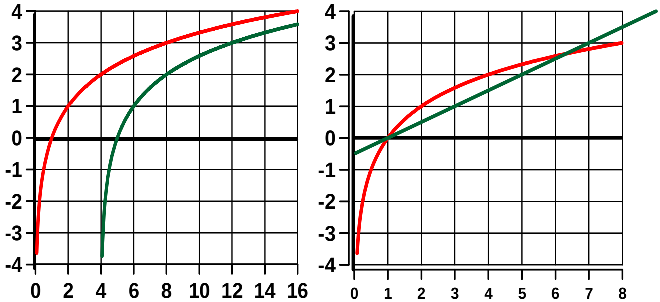


Рис. 40. (a) График $y = \log_2 x$; $y = \log_2(x-4)$ (b) График $y = \log_2 x$; $y = (x-1)/2$.

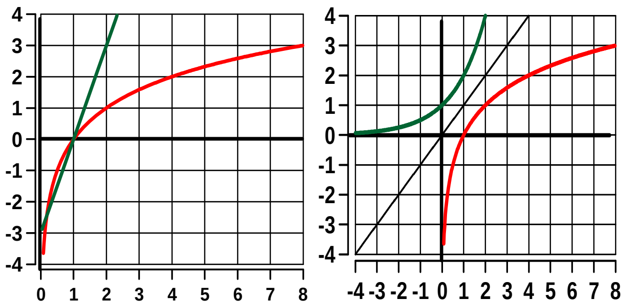


Рис. 41. (a) График $y = \log_2 x$; $y = 3(x-1)$. (b) График $y = \log_2 x$; $y = 2^x$

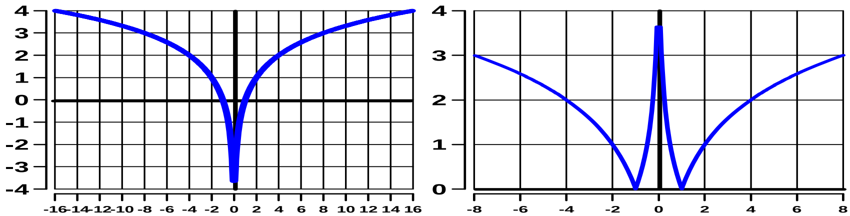


Рис. 42. (a) График $y = \log_2 |x|$. (b) График $y = |\log_2 |x||$.

Ответ $\boxed{4}$♦ $\frac{3}{4}$.

Решение. $\log_4 2\sqrt{2} = \log_{2^2} 2^{1{,}5} = \frac{1{,}5}{2}\log_2 2 = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$. ■

1239. Значение выражения $\log_{\frac{1}{7}}(\log_2 128)$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ $0,5$ $\boxed{4}$ $-0,5$ $\boxed{5}$ не существует

Ответ $\boxed{2}$♦ -1.

Решение. $\log_{\frac{1}{7}}(\log_2 128) = \log_{(7^{-1})}(\log_2 2^7) = -\log_{7)} 7 = -1$. ■

1240. Значение выражения $\lg 123{,}45 - \lg 0,012345$ равно

♦ 4.

Решение.

$$\lg 123{,}45 - \lg 0,012345 = \lg 123{,}45 - \lg \frac{123{,}45}{10000} = \lg(10000) = 4.$$ ■

1241. Значение выражения $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{63} 64$ равно

♦ 6.

Решение. $= \log_2 64 = 6$. ■

1242. Значение выражения $\log_{\sqrt{2}}[\sin(0,875 \cdot \pi)] + \log_{\sqrt{2}}[\cos(1,875 \cdot \pi)]$ равно

$\boxed{1}$ -3 $\boxed{2}$ 1 $\boxed{3}$ -1 $\boxed{4}$ 2 $\boxed{5}$ -2

Ответ $\boxed{1}$♦ -3.

Решение.
$\sin(0,875\cdot\pi)\cdot\cos(1,875\cdot\pi) = -\sin(0,875\cdot\pi)\cdot\cos(0,875\cdot\pi) = -0,5\sin(1,75\cdot\pi) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3}$. ■

1243. Если $\lg x = \dfrac{1}{3}\lg a + 2\lg(c^2) - \lg b$, то x равняется

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt[3]{a}\cdot(c^4-b)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt[3]{a}\cdot c^4\cdot b^{-1}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $c^4\cdot\sqrt[3]{a+b}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $c^4\cdot\sqrt[3]{a-b}$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt[3]{a}+c^4-b$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $\sqrt[3]{a}\cdot c^4\cdot b^{-1}$.

Решение. $\lg x = \lg\left(a^{1/3}c^4b^{-1}\right)$, $x = a^{1/3}c^4b^{-1}$. ■

1244. Вычислите $\lg 75$, если $\lg 2 = a$ и $\lg 3 = b$:

$\boxed{\mathbf{1}}$ $b+2-2a$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $a-2b+1$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $2b-a+1$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $2a-b+1$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $a+b+1$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $b+2-2a$.

Решение. $\lg(75) = \lg(3\cdot5^2) = \lg(3\cdot10^2\cdot2^{-2}) = \lg(3)+2\lg(10)-2\lg(2)$. ■

1245. Значение выражения $\dfrac{\log_4 243}{\log_{0,25} 9}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ -3 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-2,5$ $\boxed{\mathbf{3}}$ -2 $\boxed{\mathbf{4}}$ $-1,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-1,(3)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $-2,5$.

Решение. $\dfrac{\log_4 243}{\log_{0,25} 9} = \dfrac{\log_{(2^2)} 3^5}{\log_{(2^{-2})} 3^2} = \dfrac{(5/2)\cdot\log_2 3}{[2/(-2)]\cdot\log_2 3} = -\dfrac{5}{2}$. ■

1246. Значение выражения $\dfrac{\log_3 2 + \log_{\sqrt[3]{3}}(2\sqrt{2})}{4\log_9 8 - \log_{27} 2}$ равно

Решение. $A = \dfrac{\log_3 2 + \frac{3/2}{1/3}\log_3 2}{4\cdot\frac{3}{2}\log_3 2 - \frac{1}{3}\log_3 2}$, $A = \dfrac{1+\frac{3/2}{1/3}}{4\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}$, ■

1247. Значение выражения $6^{3-\log_6 4}$ равно
♦ 54.

Решение. $6^{3-\log_6 4} = 6^{\log_6 6^3 - \log_6 4} = 6^{\log_6 \frac{6^3}{4}}$ ■

1248. Значение выражения $6^{\log_3 7} - 7^{\log_3 6}$ равно
♦ 0.

Решение. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. ■

1249. Значение выражения $5^{\frac{\log_2 27}{\log_2 5}}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 9 $\boxed{3}$ 27 $\boxed{4}$ 24 $\boxed{5}$ 25

Ответ $\boxed{3}$♦ 27.

Решение. $5^{\frac{\log_2 27}{\log_2 5}} = 5^{\log_5 27} = 27.$ ■

1250. Значение выражения $\dfrac{\log_2 24}{\log_{24} 2} - \dfrac{\log_2 96}{\log_6 2}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

Ответ $\boxed{4}$♦ 4.

Решение. $A = \left(\log_2 24\right)^2 - \left(\log_2 96\right) \cdot \left(\log_2 6\right)$
$= \left(\log_2 24\right)^2 - \left[\log_2 (24 \cdot 4)\right] \cdot \left[\log_2 \frac{24}{4}\right]$
$= \left(\log_2 24\right)^2 - \left(\log_2 24 + 2\right) \cdot \left(\log_2 24 - 2\right)$
$= \left(\log_2 24\right)^2 - \left[\left(\log_2 24\right)^2 - 2^2\right] = 4$ ■

1251. Если $A = \dfrac{\log_3 2 + \log_2 27 - 4}{1 - \log_2 3} + \log_3 121{,}5$ то

$\boxed{1}$ $A \in (-999;\ 1,1)$ $\boxed{2}$ $A \in [1,1;\ 2,2)$ $\boxed{3}$ $A \in [2,2;\ 3,3)$
$\boxed{4}$ $A \in [3,3;\ 4,4)$ $\boxed{5}$ $A \in [4,4;\ 999)$
♦ $A = 2$.

Решение. $A = \dfrac{\log_3 2 + \log_2 27 - 4}{1 - \log_2 3} + \log_3 121{,}5,$

$$A = \frac{\log_3 2 + 3\log_2 3 - 4}{1 - \log_2 3} + \log_3 \frac{243}{2},$$

$$A = \frac{\log_3^2 2 - 4\log_3 2 + 3}{\log_3 2 - 1} + 5 - \log_3 2,$$

$$A = \frac{t^2 - 4t + 3}{t - 1} + 5 - t, \qquad A = \frac{(t-1)(t-3)}{t-1} + 5 - t,$$

$A=t-3+5-t, \quad A=2,$
$A=\frac{\left(\log_3 2-1\right)\left(\log_3 2-3\right)}{\log_3 2-1}+5-\log_3 2,$
$A=\log_3 2-3+5-\log_3 2,\ A=2.$ ■

1252. Значение выражения $4^{\log_2(1-2/3+4/9-8/27+16/81-32/243+\dots)}$ равно
1 $0,36$ **2** $0,25$ **3** $0,64$ **4** $0,6$ **5** $0,8$

Ответ **1** ♦ $0,36$.

1253. Укажите наибольшее из выражений:
1 $2^{\log_{0,5}2}$ **2** $3^{\log_{0,5}3}$ **3** $4^{\log_{0,5}4}$ **4** $5^{\log_{0,5}5}$ **5** $0,2345$

Ответ **1** ♦ $2^{\log_{0,5}2}$.

1254. Вычислите значение выражения $\dfrac{17^{\sqrt[5]{\log_{17}3}}}{3^{\sqrt[5]{\log_3^4 17}}}$

♦ 1.

Решение. $17^{\sqrt[5]{\log_{17}3}} = 17^{(\log_{17}3)^{1/5}} = 17^{\log_{17}3\cdot(\log_{17}3)^{-4/5}} = 3^{(\log_{17}3)^{-4/5}} = 3^{(\log_3 17)^{4/5}}$. ■

15.2.2. Сравнение логарифмов

Теоретические сведения Чтобы выполнить сравнение $\log_a b \bigvee c$, замените его эквивалентным сравнением $\log_a b \bigvee \log_a a^c$. Обратите внимание на то, что при $0<a<1$ из $\log_a b<\log_a d$ следует $b>d$.

1255. Сравните числа $a=\log_2 5$ и $b=\dfrac{7}{3}$.

♦ $a<b$.

Решение. $\log_2 5 \bigvee \frac{7}{3}, \quad 3\log_2 5 \bigvee 7, \quad \log_2 5^3 \bigvee \log_2 2^7,$
$\log_2 125 \bigvee \log_2 128,\ \log_2 125<\log_2 128.$ ■

1256. Сравните числа a и b: $a = \frac{1}{2}\log_4 65$, $b = \log_5 11$.

♦ $a > b$.

Решение. $\frac{1}{2}\log_4 65 \bigvee \log_5 11$, $\log_4 65 \bigvee \log_5 11^2$, $\log_4 65 > \log_4 64 = 3$, $\log_5 121 < \log_5 125 = 3$. ■

1257. Сравните числа a и b: $a = \log_{17} 68$, $b = \log_{68} 544$.

♦ $a < b$.

Решение. $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 544$, $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 17 \cdot \log_{17} 544$, $\left(\log_{17} 68\right)^2 \bigvee \log_{17} 544$, $\left(\log_{17}(17\cdot 2^2)\right)^2 \bigvee \log_{17}\left(17\cdot 2^5\right)$, $(1 + 2\log_{17} 2)^2 \bigvee 1 + 5\log_{17} 2$, $4\left(\log_{17} 2\right)^2 \bigvee \log_{17} 2$, $4\log_{17} 2 \bigvee 1$, $\log_{17} 16 < 1$. ■

1258. Сравните $a = \log_5 11$, $b = 1,5$, $c = \log_2 3$

♦ $a < b < c$.

Решение. $\log_5 11 \bigvee \frac{3}{2}$, $2\log_5 11 \bigvee 3$, $11^2 \bigvee 5^3$; $\log_2 3 \bigvee \frac{3}{2}$, $2\log_2 3 \bigvee 3$, $3^2 \bigvee 2^3$. ■

1259. Область определения функции $\log_2\left((x - \sin 42^\circ)\cdot(\operatorname{ctg} 48^\circ - x)\right)$ совпадает с множеством

1 $(\sin 42^\circ;\ \operatorname{ctg} 48^\circ)$ **2** $(\cos 48^\circ;\ \operatorname{ctg} 42^\circ)$

3 $(-\infty;\ \sin 42^\circ) \bigcup (\operatorname{ctg} 48^\circ;\ +\infty)$ **4** $(\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 42^\circ)$

5 $(\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 48^\circ)$

Ответ **1** ♦ $(\sin 42^\circ;\ \operatorname{ctg} 48^\circ)$.

15.2.3. Множество значений сложной функции

Теоретические сведения Мы называем "показательнологарифмической" функцию

$$F(x) = u(x)^{\log_{v(x)} f(x)}.$$

Имеет место тождество (верное при любых допустимых по ОДЗ значениях переменной)

$$u(x)^{\log_{v(x)} f(x)} = f(x)^{\log_{v(x)} u(x)}.$$

Если $u(x)$ и $v(x)$ - числа, то эта функция принимает вид $f(x)^{\log_v u}$. В частности,

$$u(x)^{\log_{u(x)} f(x)} = f(x),$$

$$u(x)^{\log_{(u(x))^{-1}} f(x)} = (f(x))^{-1}.$$

Подчеркнем еще раз, что эти равенства являются тождествами, т.е. они верны при любых допустимых значениях переменной (и параметров, если таковые имеются). Например,

$$u(x)^{\log_{u(x)} f(x)} = f(x)$$

при выполнении условий

$$f(x) > 0 \bigcap u(x) > 0 \bigcap u(x) \neq 1,$$

символ $\bigcap$ заменяет слово "и". Равенство

$$a^{\log_a f(x)} = f(x)$$

справедливо при выполнении условий

$$f(x) > 0 \bigcap a > 0 \bigcap a \neq 1.$$

1260. Укажите множество значений функции: $f(x) = \log_2(2x - x^2 + 1)$

♦ $(-\infty;\ 1]$.

Решение. $-x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$, $-x^2 + 2x + 1 \in (-\infty;\ 2]$. ■

1261. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 4,25)$

♦ $[-2;\ +\infty)$.

Решение. $x^2 - 4x + 4,25 \in [0,25;\ +\infty)$, $\log_2(x^2 - 4x + 4,25) \in [\log_2(0,25);\ +\infty)$. ■

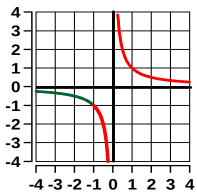
1262. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_{x^2-4x+4,25} 4$.

♦ $y \in (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ +\infty)$.

Решение. Начнем с внутренней части функции, $x^2 - 4x + 4,25 \in [0,25;\ +\infty)$,
$\log_4(x^2 - 4x + 4,25) \in [\log_2(0,5);\ +\infty)$,
$\log_4(x^2 - 4x + 4,25) \in [-1;\ +\infty)$,

$$f(x) = \log_{(x^2-4x+4,25)} 4 = \frac{1}{\log_4(x^2 - 4x + 4,25)},$$

$f(x) \in (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ +\infty)$.



■

Теоретические сведения При $x > 0$, $a \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$ имеет место равенство $x^{\log_a x} = a^{(\log_a x)^2}$. Функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает на всей своей области определения. Функция

$y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей своей области определения. Функция $y = |\log_a x|$ убывает при $0 < x \leqslant 1$ и возрастает при $x \geqslant 1$ независимо от значения $a \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$.

1263. Укажите множество значений функции $f(x) = x^{\log_3 x}$.

♦ $y \in [1;\ +\infty)$.

Решение. $x^{\log_3 x} = 3^{(\log_3 x)^2}$, $(\log_3 x)^2 \in [0;\ +\infty)$, $3^{(\log_3 x)^2} \in [3^0;\ +\infty)$. ■

Теоретические сведения Множество значений функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ — объединение двух промежутков, $f(x) \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$. Функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ -1]$, убывает на промежутке $[-1;\ 0)$, убывает на промежутке $(0;\ 1]$, возрастает на промежутке $[1;\ +\infty)$. Для решения некоторых задач этого раздела нужно использовать замену переменных и тождество $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

1264. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_2 x + \log_x 2$.

♦ $y \in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$.

Решение. $t = \log_2 x \in (-\infty;\ +\infty)$, $y = t + \dfrac{1}{t}$, $y =\in (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$. ■

1265. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_2 x + \log_x(512)$.

♦ $y \in (-\infty;\ -6] \bigcup [6;\ +\infty)$.

Решение. $t = \log_2 x \in (-\infty;\ +\infty)$, $f(x) = t + \dfrac{9}{t}$, $f(x) = 3\left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{3}{t}\right)$, $f(x) \in (-\infty;\ -6] \bigcup [6;\ +\infty)$. ■

15.2.4. Применение производной

1266. Укажите множество значений функции $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\log_x 2} + \log_x 4$.

♦ $y \in (-\infty; +\infty)$.

Решение. $t = \log_2 x \in (-\infty;\ +\infty)$, $t \neq 0$, $y = t^2 + \dfrac{2}{t}$, $y' = 2t - \dfrac{2}{t^2}$, $y \in (-\infty; +\infty)$. ■

1267. Найдите количество корней уравнения $\dfrac{\log_2 x}{\log_x 2} + \log_x(4) = b$ при различных значениях параметра b.

Решение. $t = \log_2 x \in (-\infty;\ +\infty)$, $y = t^2 + \dfrac{2}{t}$, $y' = 2t - \dfrac{2}{t^2}$, $y' = \dfrac{2(t^3-1)}{t^2}$, функция $y(x)$ убывает на промежутке $t \in (-\infty;\ 0)$, $y(x)$ убывает на промежутке $t \in (0;\ 1]$, $y(x)$ возрастает на промежутке $t \in [1;\ +\infty)$. $\min y(x) = 3$ на промежутке $t \in (0;\ +\infty)$. Уравнение $y(x) = b$ имеет один корень при $b \in (-\infty;\ 3)$, два корня при $b = 3$, три корня при $b \in (3;\ +\infty)$. ■

15.2.5. Задание для самостоятельной работы

15.2.5.1. Показательная и логарифмическая функция, 1

1268. Нарисуйте на одном чертеже графики функций:

(1) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 3^x$.
(2) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 2^{-x}$.
(3) $f(x) = 2^{-x}$ и $g(x) = 3^{-x}$.
(4) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
(5) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ и $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.
(6) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 2^{x+1}$.
(7) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 2^x + 1$.
(8) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 2^{2x}$.

(9) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 4^x$.
(10) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 2^{0,5x}$.

1269. Нарисуйте на одном чертеже графики функций:
(1) $f(x) = 2^{|x|}$ и $g(x) = 3^{|x|}$.
(2) $f(x) = 2^{-|x|}$ и $g(x) = 3^{-|x|}$.
(3) $f(x) = 2^{|x|}$ и $g(x) = 2^{|x-1|}$.
(4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ и $g(x) = 2^x - 2^{-x}$.

1270. Нарисуйте графики функций: **(1)** $f(x) = 2^x + 2^{|x|}$, **(2)** $f(x) = 2^x - 2^{|x|}$, **(3)** $f(x) = \frac{2^x}{2^{|x|}}$, **(4)** $f(x) = \frac{2^x}{2^{-|x|}}$. **(5)** $f(x) = \frac{2^x}{2^{x-1}}$. **(6)** $f(x) = \frac{2^x}{2^{-x}}$. **(7)** $f(x) = \frac{6^x}{3^x}$.

1271. Нарисуйте на одном чертеже графики функций:
(1) $f(x) = 2^x$ и $g(x) = x + 1$.
(2) $f(x) = 3^x$ и $g(x) = x + 1$.
(3) $f(x) = 2^{|x|}$ и $g(x) = 1 + |x|$.
(4) $f(x) = 3^{|x|}$ и $g(x) = 1 + |x|$.

1272. Сколько четных функций имеется среди перечисленных:
(a) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, **(b)** $f(x) = 3^x - 3^{-x}$, **(c)** $f(x) = 2^x + 3^x$, **(d)** $f(x) = 3^{2x} - 9^x$, **(e)** $f(x) = 3^{2x} + 9^x$, **(f)** $f(x) = 3^{x^2} - 3^{-x^2}$?

$\boxed{1}$ одна $\boxed{2}$ две $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ ни одной

1273. Сколько функций из числа указанных возрастают на всей своей области определения?
(a)$y = 2^x$, **(b)**$y = 2^{2x}$, **(c)**$y = 2^{-x}$, **(d)**$y = 2^{-2x}$, **(e)**$y = 2^{x-1}$, **(f)**$y = 2^{1-x}$.

$\boxed{1}$ одна $\boxed{2}$ две $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять

1274. Сколько функций из числа указанных возрастают на всей своей области определения:
(a)$y = 2^{2^x}$, **(b)**$y = 2^{2^{-x}}$, **(c)**$y = 2^{-2^x}$, **(d)**$y = -2^{2^x}$, **(e)**$y = -2^{2^{-x}}$, **(f)**$y = 0,5^{2^x}$.

$\boxed{1}$ одна $\boxed{2}$ две $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять

1275. Выражение $\dfrac{5^a \cdot 2^{a-1} + 5^{a-1} \cdot 2^a}{0{,}7 \cdot 10^{a-1}}$ тождественно равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 10 $\boxed{\mathbf{2}}$ -10 $\boxed{\mathbf{3}}$ 9 $\boxed{\mathbf{4}}$ -9 $\boxed{\mathbf{5}}$ 7

1276. Функция $y = 2^{x+3} \cdot 3^x - 2 \cdot 6^x$ тождественно равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ $6 \cdot 6^x$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $4 \cdot 6^x$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $8 \cdot 12^x$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 27

1277. Значение выражения $625^{0{,}25 \cdot \log_5(0{,}5)}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ $-0,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $0,5$

1278. Значение выражения 2^{3^2} равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 64 $\boxed{\mathbf{2}}$ 128 $\boxed{\mathbf{3}}$ 256 $\boxed{\mathbf{4}}$ 512 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1024

1279. Числа $3^{\sqrt{2}}, 3^{2\sqrt{2}}, 3^{3\sqrt{2}}, 3^{4\sqrt{2}}, 3^{5\sqrt{2}}, \ldots$

$\boxed{\mathbf{1}}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $3^{\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3^{\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1280. Числа $a = (0{,}5)^{1{,}5}$, $b = (0{,}5)^2$, $c = (0{,}5)^{-0{,}25}$ удовлетворяют неравенствам

$\boxed{\mathbf{1}}$ $c > b > a$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $b > c > a$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $c > a > b$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $a > b > c$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $b > a > c$

1281. Числа $a = (0{,}5)^{\cos 65^\circ}$, $b = (0{,}5)^{\sin 5^\circ}$, $c = (0{,}5)^{\operatorname{tg} 46^\circ}$ удовлетворяют неравенствам

$\boxed{\mathbf{1}}$ $c > b > a$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $b > c > a$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $c > a > b$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $a > b > c$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $b > a > c$

1282. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^x$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(0;\ 1]$

1283. Множество значений функции $f(x) = 2^x$ на промежутке $x \in [1;\ 2]$ образует промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

1284. Все значения параметра a, при которых уравнение $2^x = a$ имеет единственный корень, образуют множество

$\boxed{1}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ 0)\bigcup(0;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $[0;\ +\infty)$
$\boxed{5}$ $(1;\ +\infty)$

1285. Корень уравнения $5^{(-2^x)} = 2$ равен

$\boxed{1}$ $\log_5\log_2 5$ $\boxed{2}$ $-\log_2\log_5 2$ $\boxed{3}$ $-\log_5\log_2 5$ $\boxed{4}$ $\log_5\log_2 0,2$
$\boxed{5}$ корней нет

1286. Множество значений функции $f(x) = (0{,}5)^{2^{-x}}$ на промежутке
$x \in [-1;\ 1]$ образует промежуток, длина которого равна

$\boxed{1}$ $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$ $\boxed{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ $\boxed{3}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$ $\boxed{4}$ $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ $\boxed{5}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$

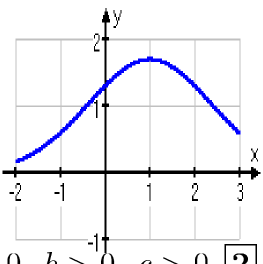
1287. На каком из указанных промежутков функция $y = 2^{x^2}$ является возрастающей?

$\boxed{1}$ $x \in [-3;\ 0]$ $\boxed{2}$ $x \in [-2;\ 1]$ $\boxed{3}$ $x \in [-1;\ 2]$ $\boxed{4}$ $x \in [0;\ 3]$
$\boxed{5}$ $x \in [-1;\ 1]$

1288. На каком из указанных промежутков функция $y = (0{,}5)^{x^2-4x+3}$ является возрастающей?

$\boxed{1}$ $x \in [-1;\ 1]$ $\boxed{2}$ $x \in [1;\ 3]$ $\boxed{3}$ $x \in [-1;\ 3]$ $\boxed{4}$ $x \in [2;\ 5]$
$\boxed{5}$ $x \in [2;\ 3]$

1289.



На рисунке изображен график функции $y = 2^{ax^2+bx+c}$, параметры a, b, c которого удовлетворяют условиям

$\boxed{1}$ $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$ $\boxed{2}$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$\boxed{3}$ $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$ $\boxed{4}$ $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$
$\boxed{5}$ $a < 0,\ b < 0,\ c > 0$

1290. Укажите множество значений функции $y = (0{,}5)^{2x-x^2}$

$\boxed{1}$ $(0;\ 0,5]$ $\boxed{2}$ $[0,5;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(0;\ 2]$ $\boxed{4}$ $(-\infty;\ 2]$ $\boxed{5}$ $(-\infty;\ 0,5]$

1291. Найдите наибольшее значение функции $y = 0,5^{5+8x-x^2}$ на промежутке $x \in [0;\ 10]$ и укажите остаток от деления на 5 ближайшего натурального числа

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1292. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{3^x+3^{4-x}}$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1293. Наименьшее значение функции $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 7$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1294. Найдите множество значений функции $f(x) = 4^x + 2^{x+2} + 7$.

$\boxed{1}$ $(3;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $[3;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(7;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $[7;\ +\infty)$ $\boxed{5}$ $(0;\ +\infty)$

1295. Множество значений функции $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 7$ на промежутке $x \in [0;\ 2]$ представляет промежуток, длина которого равна

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1296. Функция $y = 2^{|x|}$

$\boxed{1}$ имеет наименьшее значение, равное 0

$\boxed{2}$ имеет наименьшее значение, равное 1

$\boxed{3}$ имеет наименьшее значение, равное 2

$\boxed{4}$ имеет наибольшее значение, равное 1

$\boxed{5}$ имеет наибольшее значение, равное 2

1297. Найдите все точки локального максимума функции $y = 2^{\left|x^2-6|x|+5\right|}$ укажите в ответе остаток от деления на 5 наименьшего значения из всех, которые принимает указанная функция в точках локального максимума.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1298. Наибольшее значение функции $y = |2^x - 1| - \left|2 - 0,5^{-x}\right|$ на промежутке $x \in [0; 1]$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ -1 $\boxed{4}$ $3,(3)$ $\boxed{5}$ $0,5$

1299. Наименьшее значение функции $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos x - \cos^2 x - 3}$ равно

$\boxed{1}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 32 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 64

1300. Укажите наименьшее значение функции $y = 5^x + 5^{-x}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1301. Укажите наименьшее значение функции $y = 5^x + 5^{-x+2}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{5}$ 10

1302. Укажите наименьшее значение функции $y = 3^{2x} + 3^{-2x}$.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ $9\frac{1}{9}$ $\boxed{5}$ $3\frac{1}{3}$

1303. Нарисуйте графики функций:
(1) $y = \log_2 x$, **(2)** $y = \log_3 x$, **(3)** $y = \log_{1/2} x$, **(4)** $y = \log_{1/3} x$.

1304. Нарисуйте графики функций:
(1) $y = \log_{10}|x|$, **(2)** $y = |\log_{10}|x||$.

1305. Нарисуйте графики функций:
(1) $y = \log_2|x|$, **(2)** $y = |\log_2|x||$.

1306. Число корней уравнения $|\lg|x|| = x + 1$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1307. Число корней уравнения $\log_2(|x| + 1) = x$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1308. Сумма координат точки пересечения графиков функций $y = 1 - x$ и $y = 3^{\log_3 x} + 1$ равна

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{5}$ графики не пересекаются

1309. Значение выражения $\log_3 3$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1310. Значение выражения $\log_3 243$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1311. Значение выражения $\log_9 3\sqrt{3}$ равно

$\boxed{1}$ $\frac{4}{3}$ $\boxed{2}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{3}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{4}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{5}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1312. Значение выражения $\log_{\frac{2}{\sqrt{6}}} \frac{4}{9}$ равно

$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ 2,5 $\boxed{3}$ -3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ -6

1313. Значение выражения $\log_2 \log_4 256$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1314. Значение выражения $\log_{0,2} \log_3 243$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ 0,5 $\boxed{4}$ $-0,5$ $\boxed{5}$ не существует

1315. Числа $\log_3 2, \log_3 4, \log_3 8, \log_3 16, \log_3 32, \log_3 64, \log_3 128, \ldots$

$\boxed{1}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\log_3 2$
$\boxed{2}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 2
$\boxed{3}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_3 2$
$\boxed{4}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2
$\boxed{5}$ не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1316. Числа $\log_3 2$, $\log_{\sqrt{3}} 4$, $\log_{\sqrt[3]{3}} 8$, $\log_{\sqrt[4]{3}} 16$, $\log_{\sqrt[5]{3}} 32$, $\log_{\sqrt[6]{3}} 64$, $\log_{\sqrt[7]{3}} 128, \ldots$

$\boxed{1}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\log_3 2$
$\boxed{2}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $-\log_3 2$
$\boxed{3}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_3 2$
$\boxed{4}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_2 3$
$\boxed{5}$ не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1317. Значение выражения $\log_4 192 - \log_2 \sqrt{3}$ равно

1 1 **2** 3 **3** 0,5 **4** 2 **5** 2,5

1318. Значение выражения $\lg 198,13 - \lg 0,019813$ равно

1 10000 **2** 1000 **3** 3 **4** 4 **5** $\lg 198,110187$

1319. Значение выражения $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + \log_{\frac{1}{2}} 24 - 2\log_{\frac{1}{2}} 3$ равно

1 2 **2** -2 **3** -3 **4** 3 **5** $-1,5$

1320. Значение выражения $\log_{\sqrt{2}}[\sin(0,125\cdot\pi)] + \log_{\sqrt{2}}[2\cos(0,125\cdot\pi)]$ равно

1 0 **2** 1 **3** -1 **4** 2 **5** -2

1321. Если $\lg x = \frac{1}{3}\lg a + \lg(c^4 - b)$, то x равняется

1 $\sqrt[3]{a}\cdot(c^4 - b)$ **2** $\sqrt[3]{a}\cdot c^4\cdot b^{-1}$ **3** $c^4\cdot\sqrt[3]{a+b}$ **4** $c^4\cdot\sqrt[3]{a-b}$
5 $\sqrt[3]{a} + c^4 - b$

1322. Числа a, b, c являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите значение выражения
$144^{\frac{\log_b 3\left(\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a}\right)}{\log_a 9 - 2\log_c 3}}$
и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

1323. Если $\lg 6 = a$, $\lg 2 = b$, то $\lg 15$ равен

1 $a - b + 1$ **2** $a - 2b + 1$ **3** $2b - a + 1$ **4** $2a - b + 1$
5 $a + b + 1$

1324. Значение выражения $125^{\frac{1}{4\log_2 5}}$ равно

1 $\sqrt[4]{5}$ **2** $\sqrt[4]{125}$ **3** $\sqrt[3]{4}$ **4** $\sqrt[4]{8}$ **5** $\sqrt[3]{25}$

1325. Значение выражения $\frac{\log_{16} 125 + \log_4 2}{\log_{16} 50 + \log_{16} 10}$ равно

1 1 **2** 2 **3** $\log_3 8$ **4** $\log_5 4$ **5** $\log_{16} 5$

1326. Значение выражения $\frac{\log_5 16-\log_{25} 4}{0{,}5\log_5 0{,}08+\log_5 10}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $\log_3 8$ $\boxed{4}$ $\log_5 4$ $\boxed{5}$ $\log_2 5$

1327. Если $\log_2 \frac{\pi}{6} = a$, то значение выражения $\dfrac{\log_2(\arccos(-0,5))-3}{\log_2 \pi - \log_2 3 - 1}$ равно

$\boxed{1}$ $\frac{a}{a-1}$ $\boxed{2}$ $\frac{a+1}{a}$ $\boxed{3}$ $\frac{a-1}{a}$ $\boxed{4}$ $\frac{1-a}{a}$ $\boxed{5}$ $\frac{a}{a+1}$

1328. Значение выражения $\log_{2^{(2/3)}} 2^{(5/6)}$ равно

$\boxed{1}$ $\frac{5}{9}$ $\boxed{2}$ $\frac{5}{4}$ $\boxed{3}$ $-\frac{5}{4}$ $\boxed{4}$ $-\frac{5}{9}$ $\boxed{5}$ $\frac{3}{2}$

1329. Значение выражения $\frac{\log_5 243}{\log_{0,2} 9}$ равно

$\boxed{1}$ $2,5$ $\boxed{2}$ 27 $\boxed{3}$ -27 $\boxed{4}$ -2 $\boxed{5}$ $-2,5$

1330. Функция $y=\log_{10} x+\log_{\sqrt{10}} x+\log_{\sqrt[3]{10}} x+\log_{\sqrt[4]{10}} x+\cdots+\log_{\sqrt[10]{10}} x$ тождественно равна

$\boxed{1}$ $110\log_{10} x$ $\boxed{2}$ $111\log_{10} x$ $\boxed{3}$ $50\log_{10} x$ $\boxed{4}$ $55\log_{10} x$ $\boxed{5}$ $5\log_{10} x$

1331. Значение выражения $5^{3-\log_5 15}$ равно

$\boxed{1}$ $\frac{25}{3}$ $\boxed{2}$ 25 $\boxed{3}$ $0,12$ $\boxed{4}$ 3 $\boxed{5}$ 5

1332. Значение выражения $1{,}5\cdot 3^{\frac{\log_5 16}{\log_5 3}}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 9 $\boxed{3}$ 27 $\boxed{4}$ 24 $\boxed{5}$ 25

1333. Значение выражения $8^{\frac{\lg 4+\lg 3}{\lg 2+\lg 4}}$ равно

$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ 6 $\boxed{3}$ 9 $\boxed{4}$ 12 $\boxed{5}$ 15

1334. Значение выражения $9^{\log_3(1+0{,}5+0{,}25+0{,}125+0{,}0625+\dots)}$ равно

$\boxed{1}$ 10 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 6 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 8

1335. Значение выражения $625^{0{,}25\cdot\log_5 0{,}5}$ равно

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ $-0,5$ $\boxed{5}$ $0,5$

1336. Укажите наибольшее из выражений

$\boxed{1}$ $2^{\log_2 2}$ $\boxed{2}$ $3^{\log_2 3}$ $\boxed{3}$ $4^{\log_2 4}$ $\boxed{4}$ $5^{\log_2 5}$ $\boxed{5}$ 25

1337. Вычислите значение выражения $\dfrac{40^{\sqrt[3]{\log_{40} 8}}}{8^{\sqrt[3]{\log_8^2 40 - \frac{1}{3}}}}$

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $\sqrt[3]{40}$ $\boxed{4}$ $\sqrt[3]{5}$ $\boxed{5}$ 5

1338. Укажите то из указанных далее выражений, которое меньше одного из числа указанных, но больше другого из числа указанных выражений.

$\boxed{1}$ $5^{\log_3 2}$ $\boxed{2}$ $3^{\log_2 5}$ $\boxed{3}$ $2^{\log_3 5}$ $\boxed{4}$ $2^{\log_2 7}$ $\boxed{5}$ $5^{\log_2 3}$

1339. Пусть $f(x) = \left(4 \cdot 27^{\log_3 x} - 64^{\log_4 x}\right) \cdot \left(6 \cdot 5^{\frac{2}{\log_x 5}} + 5 \cdot 2^{\frac{2}{\log_x 2}}\right)$.

Найдите значение выражения $\dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$ при $x = 7$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1340. Пусть $a = 7\log_5 2$, $b = 3$. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $a = b$ $\boxed{2}$ $a < b < 0$ $\boxed{3}$ $a > b > 0$ $\boxed{4}$ $0 < a < b$ $\boxed{5}$ $0 > a > b$

1341. Пусть $a = \dfrac{1}{2}\log_4 65$, $b = \log_5 11$. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $a = b$ $\boxed{2}$ $a < b < 0$ $\boxed{3}$ $a > b > 0$ $\boxed{4}$ $0 < a < b$ $\boxed{5}$ $0 > a > b$

Решение. $\frac{1}{2}\log_4 65 = \frac{1}{4}\log_2 65 > \frac{1}{4}\log_2 64 = \frac{3}{2}$, $\log_5 11 = \frac{1}{2}\log_5 121 < \frac{1}{2}\log_5 125 = \frac{3}{2}$. ■

1342. Пусть $a = \log_{17} 68$, $b = \log_{68} 544$. Укажите верное утверждение.

Решение. Преобразуем сравнение $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 544$, $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 17 \cdot \log_{17} 544$, $\left(\log_{17} 68\right)^2 \bigvee \log_{17} 544$, $\left(\log_{17}(17 \cdot 2^2)\right)^2 \bigvee \log_{17}(17 \cdot 2^5)$, $\left(1 + 2\log_{17} 2\right)^2 \bigvee 1 + 5\log_{17} 2$, $4\left(\log_{17} 2\right)^2 \bigvee \log_{17} 2$, $4\log_{17} 2 \bigvee 1$, $\log_{17} 16 < 1$. ■

1343. Числа $a = \log_5 11$, $b = 1,5$, $c = \log_2 3$ удовлетворяют соотношению

$\boxed{1}$ $a < b < c$ $\boxed{2}$ $a < c < b$ $\boxed{3}$ $b < a < c$ $\boxed{4}$ $c < a < b$ $\boxed{5}$ $b < c < a$

Решение. Выполните сравнение $\log_5 11 \bigvee \frac{3}{2}$, заменив его эквивалентным сравнением $11 \bigvee 5^{\frac{3}{2}}$. Выполните сравнение $\log_2 3 \bigvee \frac{3}{2}$, заменив его эквивалентным сравнением $3 \bigvee 2^{\frac{3}{2}}$. ■

1344. Наименьшее натуральное число n, при котором $\log_6 n > \frac{3}{2}$, равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 12 $\boxed{\mathbf{2}}$ 13 $\boxed{\mathbf{3}}$ 14 $\boxed{\mathbf{4}}$ 15 $\boxed{\mathbf{5}}$ 16

1345. Все решения неравенства $x\left(x-\log_{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) > 0$ образуют множество

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(1;\ \log_{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{3}) \bigcup (\log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6};\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(\log_{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{3};\ 0) \bigcup (\log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6};\ +\infty)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ \log_{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{3}) \bigcup (0;\ \log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6})$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(\log_{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\pi}{3};\ \log_{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6})$

1346. Область определения функции $f(x) = \lg(x^2-1)$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ -1] \bigcup [1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-1;\ 1)$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ 0) \bigcup (0;\ +\infty)$

1347. Область определения функции
$f(x) = \lg\left[\left(\log_{\operatorname{tg} 42^\circ} 2^{\sin 105^\circ}\right) \cdot (x^2-1)\right]$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-10;\ 10)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ -1) \bigcup (1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ -1)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-1;\ 1)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(1;\ +\infty)$

1348. Область определения функции $\log_2((\operatorname{ctg} 42^\circ - x)\cdot(x-\sin 42^\circ))$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(\sin 42^\circ;\ \operatorname{ctg} 48^\circ)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(\cos 48^\circ;\ \operatorname{ctg} 42^\circ)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ \sin 42^\circ) \bigcup (\operatorname{ctg} 48^\circ;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 42^\circ)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(\operatorname{ctg} 42^\circ;\ \sin 48^\circ)$

1349. Наибольшее целое число из области определения функции $\log_2 \frac{x^2-7x+12}{(x^2+1)\sqrt{5-x}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ −1 $\boxed{\mathbf{4}}$ −2 $\boxed{\mathbf{5}}$ такое число не существует

1350. Укажите область определения функции $f(x)=\sqrt{1-|\log_2 x|}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(0;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[0,5;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[0,5;\ +\infty)$

1351. Укажите область определения функции $f(x)=\log_{4-x}(x^2-2x)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(2;\ 4)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(0;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-\infty;\ 0)\bigcup(2;\ 3)\bigcup(3;\ 4)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(4;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(2;\ +\infty)$

1352. Укажите множество значений функции $f(x)=2x+2^{\log_2(4x-x^2)}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(8;\ 9)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(0;\ 9]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-1;\ 8]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(7;\ 8)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(4;\ 6)$

1353. Укажите множество значений функции $f(x)=\log_2(4+x^2)$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-2;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[1;\ +\infty)$

1354. Укажите множество значений функции $f(x)=\log_{0,5}(x^2-2x+3)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ -1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[-1;\ \infty)$

1355. Множество значений функции $f(x)=\log_2(x^2-4x+12)$ не пересекается с областью определения функции $g(x)=\log_2(3a-x)$, если

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a>1$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $a<1$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $a<2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $a>-1$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-1<a<2$

1356. Неравенство $\lg(x^2+px+5)>0$ справедливо при любых x, если параметр p принадлежит множеству

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\infty;\ -4)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(4;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(-4;\ 4)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(0;\ 2\sqrt{5})$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-2\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$

1357. Укажите наименьшее значение функции $f(x)=\log_3\left(3^x+3^{-x+3}\right)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $1,5$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $1+\log_3 2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $1,5+\log_3 2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $1,5+1,5\log_3 2$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $1+1,5\log_3 2$

1358. Множество значений функции $\log_2(x^2-4x+12)$ на промежутке $x \in [2+2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{6}]$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[4;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[4;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[3;\ 5]$

1359. Множество значений функции $\log_2(x^2-4x+12)$ на промежутке $x \in [2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{6}]$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[4;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[4;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[3;\ 5]$

1360. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_2 \frac{x^2-4}{|x|+2}$ на промежутке $x \in [-10;\ -4]$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[0,(3);\ 1]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[\log_3 2;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[1;\ \log_2 3]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[1;\ 2]$

1361. Функция $y = x^{\log_2 x}$ имеет

$\boxed{\mathbf{1}}$ наибольшее значение, равное 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ наибольшее значение, равное 2
$\boxed{\mathbf{3}}$ наименьшее значение, равное 1 $\boxed{\mathbf{4}}$ наименьшее значение, равное 2
$\boxed{\mathbf{5}}$ не имеет наименьшего значения и не имеет наибольшего значения

1362. Найдите значение выражения $\frac{3^{\log_5(55)}-11^{\log_5(75)}}{3^{\log_5(1375)}+11^{\log_5(0,12)}}$.

Решение. $$\frac{3^{\log_5(5\cdot 11)}-11^{\log_5(5^2\cdot 3)}}{3^{\log_5(11\cdot 5^3)}+11^{\log_5\frac{3}{5^2}}} = \frac{3^{1+\log_5(11)}-11^{2+\log_5(3)}}{3^{3+\log_5(11)}+11^{-2+\log_5(3)}}$$
$$= \frac{3\cdot 3^{\log_5(11)}-121\cdot 11^{\log_5(3)}}{27\cdot 3^{\log_5(11)}+\frac{1}{121}\cdot 11^{\log_5(3)}} = \frac{3\cdot 3^{\log_5(11)}-121\cdot 3^{\log_5(11)}}{27\cdot 3^{\log_5(11)}+\frac{1}{121}\cdot 3^{\log_5(11)}}$$
$$= \frac{3-121}{27+\frac{1}{121}}.\quad \blacksquare$$

1363. Сколько функций из перечисленных возрастают на промежутке
$x \in (1;\ 2)$?
(a) $f(x) = \log_2|x|$, **(b)** $f(x) = \log_{0,5}|x|$, **(c)** $f(x) = \log_2(2x)$, **(d)** $f(x) = \log_{0,5}(x-1)$, **(e)** $f(x) = \log_{0,5}(x^2)$, **(f)** $f(x) = \log_2\sqrt{x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ одна $\boxed{\mathbf{2}}$ две $\boxed{\mathbf{3}}$ три $\boxed{\mathbf{4}}$ четыре $\boxed{\mathbf{5}}$ пять

1364. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{\log_4 176} - 11^{\log_4 28}}{7^{\log_4 44} + 11^{\log_4 1{,}75}}$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

1365. Функция $f(x) = |x-1| + |2+x|$ имеет производную, равную нулю, на промежутке

1 $(-2;\ 1)$ **2** $(-\infty;\ -2)$ **3** $(-1;\ 2)$ **4** $(-\infty;\ -2)\bigcup(1;\ +\infty)$

5 $(-\infty;\ -1)\bigcup(2;\ +\infty)$

1366. Функция $f(x) = |\log_2 x - 1| + \left|2 - \log_{0,5} x\right|$ является линейной на промежутке

1 $(0;\ 1]$ **2** $[1;\ 4]$ **3** $[2;\ 4]$ **4** $[0,25;\ 2]$ **5** $[1;\ +\infty)$

1367. Укажите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5} 2^{\sin(x+\frac{\pi}{6})}$ на промежутке $x \in [0;\ \dfrac{\pi}{2}]$.

1 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right]$ **2** $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ **3** $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ **4** $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$ **5** $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$

1368. Укажите наименьшее положительное число из множества значений функции $f(x) = \log_5 x + \log_x 5$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1369. Укажите наименьшее положительное число из множества значений функции $f(x) = \log_2 x^2 + \log_x 4$.

1 $\sqrt{8}$ **2** 2 **3** 8 **4** 4 **5** 16

1370. Укажите наименьшее положительное число из множества значений функции $f(x) = \log_2 x + \log_x 16$.

1 1024 **2** 2 **3** 8 **4** 4 **5** 16

15.2.6. Для самостоятельной работы, 2

1371. Нарисуйте на одном чертеже графики функций

(1) $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$.

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$.
(4) $y = 3^x$ и $y = 3^{x-1}$.
(5) $y = 3^x$ и $y = 3^x - 1$.
(6) $y = 3^x$ и $y = 3^{2x}$.
(7) $y = 3^x$ и $y = 3^{0,5x}$.

1372. Нарисуйте на одном чертеже графики функций
(1) $y = 2^{-|x|}$ и $y = 3^{-|x|}$.
(2) $y = 2^{|x|}$ и $y = 2^{|x+1|}$.
(3) $y = 2^{|x|}$ и $y = 2^{|x|} + 1$.

1373. Нарисуйте графики функций
(1) $y = 3^{-x} + 3^{|x|}$, **(2)** $y = 3^{-x} - 3^{|x|}$, **(3)** $y = \frac{3^{|x|}}{3^{|x-1|}}$,
(4) $y = 3^{|x|} - 3^{-|x|}$.

1374. Нарисуйте на одном чертеже графики функций
(1) $y = 2^{-x}$ и $y = 1 - x$.
(2) $y = 3^{-x}$ и $y = 1 - x$.
(3) $y = 2^{-|x|}$ и $y = 1 - |x|$.
(4) $y = 3^{-|x|}$ и $y = 1 - |x|$.

1375. Функция $y = 5^{x+2} \cdot 2^{x+1} - 10^{x+1}$ тождественно равна
$\boxed{1}$ 40 $\boxed{2}$ $14 \cdot 10^x$ $\boxed{3}$ $17 \cdot 10^x$ $\boxed{4}$ $4 \cdot 10^{x+1}$ $\boxed{5}$ 17

1376. Значение выражения $81^{0,25 \cdot \log_3 2}$ равно
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ $-0,5$ $\boxed{5}$ $0,5$

1377. Числа $3^{\sqrt{2}}$, 3^2, $3^{2\sqrt{2}}$, 3^4, $3^{4\sqrt{2}}$, ...
$\boxed{1}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $3^{\sqrt{2}}$
$\boxed{2}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\sqrt{2}$
$\boxed{3}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3^{\sqrt{2}}$
$\boxed{4}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$
$\boxed{5}$ не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1378. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{-x}$.

$\boxed{1}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $(1;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $[0;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{5}$ $(0;\ 1]$

1379. Множество значений функции $f(x) = 2^x$ на промежутке $x \in [2;\ 3]$ совпадает с промежутком, длина которого равна

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

1380. Все значения параметра a, при которых уравнение $2^x = 3^{a-1}$ имеет единственный корень, образуют множество

$\boxed{1}$ $(0;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ 0)\bigcup(0;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $[0;\ +\infty)$
$\boxed{5}$ $(1;\ +\infty)$

1381. Один из корней уравнения $2^{-(5^{-x})} = 5$ равен

$\boxed{1}$ $\log_5 \log_2 5$ $\boxed{2}$ $-\log_2 \log_5 2$ $\boxed{3}$ $-\log_5 \log_2 5$ $\boxed{4}$ $\log_5 \log_2 0,2$
$\boxed{5}$ корней нет

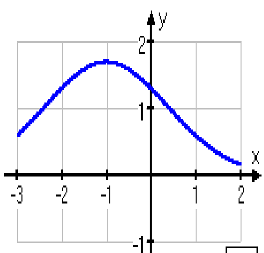
1382. Множество значений функции $f(x) = 2^{(0,5)^{-x}}$ на промежутке $x \in [-1;\ 1]$ совпадает с промежутком, длина которого равна

$\boxed{1}$ $4 - 2\sqrt{2}$ $\boxed{2}$ $2\sqrt{2} - 1$ $\boxed{3}$ $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{4}$ $4\sqrt{2} - 2$ $\boxed{5}$ $4 - \sqrt{2}$

1383. Укажите промежуток, на котором функция $y = (0,5)^{x^2-4x+3}$ является убывающей.

$\boxed{1}$ $x \in [-1;\ 2]$ $\boxed{2}$ $x \in [0;\ 3]$ $\boxed{3}$ $x \in [1;\ 4]$ $\boxed{4}$ $x \in [2;\ 5]$
$\boxed{5}$ $x \in [0;\ 5]$

1384.



На рисунке изображен график функции $f(x) = (0,7)^{ax^2+bx+c}$, параметры a, b, c которого удовлетворяют условиям

$\boxed{1}$ $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$ $\boxed{2}$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$\boxed{3}$ $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$ $\boxed{4}$ $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$
$\boxed{5}$ $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$

1385. Укажите множество значений функции $f(x) = 0{,}2^{-x^2+4x-6}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(0;\ 25]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[25;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(0;\ 125]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[125;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[25;\ 125]$

1386. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = (0{,}5)^{2x-x^2}$ на промежутке $x \in [0;\ 3]$ и укажите остаток от деления на 5 ближайшего натурального числа.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

1387. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3^{2^{x-2}+2^{6-x}}$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

1388. Наименьшее значение функции $f(x) = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 11$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 11

1389. Множество значений функции $f(x) = 9^x + 2\cdot 3^{x+1} + 11$ совпадает с промежутком

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[9;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[4;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $(11;\ +\infty)$

1390. Множество значений функции $y = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 11$ на промежутке $x \in [0;\ 2]$ представляет промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 48 $\boxed{\mathbf{3}}$ 6 $\boxed{\mathbf{4}}$ 32 $\boxed{\mathbf{5}}$ 36

1391. Значение выражения 3^{2^3} равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3^5 $\boxed{\mathbf{2}}$ 3^6 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3^7 $\boxed{\mathbf{4}}$ 3^8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3^9

1392. Сколько функций из числа указанных убывают на всей своей области определения?

(a) $f(x) = 2^{-2^x}$ **(b)** $f(x) = 2^{2^{-x}}$ **(c)** $f(x) = 2^{(0,5)^x}$ **(d)** $f(x) = -2^{-2^x}$
(e) $f(x) = 0,5^{2^{-x}}$ **(f)** $f(x) = 0,5^{2^x}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ одна $\boxed{\mathbf{2}}$ две $\boxed{\mathbf{3}}$ три $\boxed{\mathbf{4}}$ четыре $\boxed{\mathbf{5}}$ пять

1393. Функция $f(x) = 0,5^{|x|}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ имеет наименьшее значение, равное 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ имеет наименьшее значение, равное 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ имеет наименьшее значение, равное 2

$\boxed{\mathbf{4}}$ имеет наибольшее значение, равное 1

$\boxed{\mathbf{5}}$ имеет наибольшее значение, равное 2

1394. Найдите остаток от деления на 5 числа, равного наименьшему значению функции $f(x) = 3^{4\left|x^2-6|x|+8\right|+4x+1}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

1395. Наименьшее значение функции $y = |2^x - 1| - \left|2 - 0,5^{-x}\right|$ на промежутке $x \in [0;1]$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ $3,(3)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $0,5$

1396. Наименьшее значение функции $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4\cos x - \cos^2 x - 3}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{256}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 256 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1

1397. Наибольшее значение функции $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sin^2 x - 4\sin x + 2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 0 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1

1398. Укажите наименьшее значение функции $f(x) = 7^x + 7^{-x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 14 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 7

1399. Укажите наименьшее значение функции $f(x) = 2^{3x-1} + 2^{1-3x}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 8

1400. Укажите наименьшее значение функции $f(x) = 3^x + 3^{-x+2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 9 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 12 $\boxed{\mathbf{5}}$ 6

1401. Укажите наименьшее значение функции $f(x) = \lg\left(5^x + 5^{-x+4}\right)$.

1 $2,5$ **2** $1,5+\lg 2$ **3** $1+\lg 2$ **4** $2+1,5\lg 2$ **5** $2-\lg 2$

1402. Число корней уравнения $|\log_4|x|| = x-1$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1403. Число корней уравнения $\lg(|x|+1) = x$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1404. Значение выражения $\log_4 4$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

1405. Значение выражения $\log_2 512 - 7$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1406. Значение выражения $\log_{125}(25\sqrt{5})$ равно

1 $\frac{4}{3}$ **2** $\frac{3}{5}$ **3** $\frac{5}{3}$ **4** $\frac{3}{4}$ **5** $\frac{5}{6}$

1407. Значение выражения $\log_{0,25}(-\log_{0,5} 256)$ равно

1 1 **2** -1 **3** 1,5 **4** $-1,5$ **5** не существует

1408. Числа $\log_3 2$, $\log_{\sqrt{3}} 2$, $\log_{\sqrt[3]{3}} 2$, $\log_{\sqrt[4]{3}} 2$, $\log_{\sqrt[5]{3}} 2$, $\log_{\sqrt[6]{3}} 2$, $\log_{\sqrt[7]{3}} 2, \ldots$

1 образуют арифметическую прогрессию с разностью $\log_3 2$

2 образуют арифметическую прогрессию с разностью $-\log_3 2$

3 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_3 2$

4 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_2 3$

5 не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1409. Числа $\log_2(2^{\log_3 2^1})$, $\log_2(2^{\log_3 2^2})$, $\log_2(2^{\log_3 2^3})$, $\log_2(2^{\log_3 2^4})$, …

1 образуют арифметическую прогрессию с разностью $\log_3 2$

2 образуют арифметическую прогрессию с разностью $\log_2 3$

3 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_3 2$

$\boxed{4}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\log_2 3$
$\boxed{5}$ не образуют арифметическую или геометрическую прогрессию

1410. Значение выражения $\log_9 162 - \log_3 \sqrt{2}$ равно
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$ 0,5 $\boxed{4}$ 2 $\boxed{5}$ 2,5

1411. Значение выражения $\lg 4321{,}1234 - \lg 0{,}086422468$ равно
$\boxed{1}$ 3,5 $\boxed{2}$ $4 - \lg 2$ $\boxed{3}$ $4 - \lg 5$ $\boxed{4}$ $4 + \lg 5$ $\boxed{5}$ $4 + \lg 2$

1412. Значение выражения $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_3 12 - \log_3 54$ равно
$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ -2 $\boxed{3}$ $-1,5$ $\boxed{4}$ -3 $\boxed{5}$ 3

1413. Значение выражения $\log_3\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}\right) - \log_3\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$ равно
$\boxed{1}$ 0 $\boxed{2}$ 1 $\boxed{3}$ -1 $\boxed{4}$ 2 $\boxed{5}$ -2

1414. Если $\lg x = \frac{1}{3}\lg(a+b) + 2\lg(c^2)$, то
$\boxed{1}$ $x = \sqrt[3]{a}\cdot(c^4 - b)$ $\boxed{2}$ $x = \sqrt[3]{a}\cdot c^4 \cdot b^{-1}$ $\boxed{3}$ $x = c^4 \cdot \sqrt[3]{a+b}$
$\boxed{4}$ $x = c^4 \cdot \sqrt[3]{a-b}$ $\boxed{5}$ $x = \sqrt[3]{a} + c^4 - b$

1415. Числа a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Найдите значение выражения $144 \cdot \dfrac{\log_{c+b} a + \log_{c-b} a}{\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a}$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1416. Если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$ и $\lg 45 = c$, то
$\boxed{1}$ $c = a - b + 1$ $\boxed{2}$ $c = a - 2b + 1$ $\boxed{3}$ $c = 2b - a + 1$
$\boxed{4}$ $c = 2a - b + 1$ $\boxed{5}$ $c = a + b + 1$

1417. Значение выражения $\dfrac{\log_4 81 - \log_2 3}{\log_4 90 + \log_4 0{,}1}$ равно
$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $\log_3 8$ $\boxed{4}$ $\log_5 4$ $\boxed{5}$ $\log_{16} 5$

1418. Значение выражения $\log_{2^{-\frac{5}{6}}} 2^{-\frac{4}{3}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-\dfrac{8}{5}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{10}{9}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\dfrac{10}{9}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{8}{5}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\dfrac{3}{2}$

1419. Вычислите значение выражения $\frac{\log_4 625}{\log_{0,25} 0{,}2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ -4 $\boxed{\mathbf{3}}$ $2,5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $-2,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 4

1420. Значение выражения $5^{2-\log_5 9}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{25}{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 16 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{25}{9}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{5}{9}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\frac{5}{3}$

1421. Значение выражения $2^{\frac{\log_{17} 4}{\log_{17} 0{,}5}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 4 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $0,25$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0,5$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $0,125$

1422. Значение выражения $5^{\frac{\log_3 48-1}{\log_3 10-\log_3 2}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 16 $\boxed{\mathbf{2}}$ 18 $\boxed{\mathbf{3}}$ 24 $\boxed{\mathbf{4}}$ 27 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

1423. Значение выражения $4^{\log_2(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\dots)}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ 9 $\boxed{\mathbf{3}}$ 6 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 8

1424. Значение выражения $81^{-0,25\cdot\log_3 2}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0,5$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0,5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ -1 $\boxed{\mathbf{5}}$ 2

1425. Укажите наибольшее из выражений

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2^{\log_3 2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $3^{\log_3 3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $4^{\log_3 4}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $5^{\log_3 5}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 25

1426. Вычислите значение выражения $\frac{8^{\sqrt[3]{\log_8 40}}}{40^{\sqrt[3]{\log_{40}^2 8-\frac{1}{3}}}}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ $\sqrt[3]{40}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\sqrt[3]{5}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

1427. Укажите то из указанных далее выражений, которое меньше одного из числа указанных, но больше другого из числа указанных выражений.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $4^{\log_{11} 9}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $3^{\log_9 121}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $7^{\log_5 13}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $9^{\log_{11} 4}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $13^{\log_5 7}$

1428. Пусть $f(x) = \left(7 \cdot 32^{\log_2 x} - 2 \cdot 243^{\log_3 x}\right) \cdot \left(2 \cdot 4^{\frac{1}{\log_x 4}} + 6 \cdot 5^{\frac{1}{\log_x 5}}\right)$. Найдите значение выражения $\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$ при $x = 8$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

1429. Сравните числа $a = 3\log_3 7$ и $b = 5$.

1430. Сравните числа $a = \log_7 18$ и $b = \log_2 3$.

Решение. Выполните два сравнения: $\log_7 18 \bigvee \frac{3}{2}$; $\log_2 3 \bigvee \frac{3}{2}$. ■

1431. Сравните числа $a = \log_9 36$ и $b = \log_{36} 288$.

Решение. Выполним сравнение $\log_9 36 \bigvee \log_{36} 288$. Разложим логарифмируемые выражения на множители, $\log_9(9 \cdot 4) \bigvee \log_{36}(36 \cdot 8)$, используем формулу логарифма произведения, $1 + \log_9 4 \bigvee 1 + \log_{36} 8$, преобразуем сравнение тождественно путем вычитания равных чисел из левой и правой частей, $\log_9 4 \bigvee \log_{36} 8$, используем формулы логарифма степени по степенному основанию, $\log_3 2 \bigvee \log_{\sqrt[3]{36}} 2$, инвертируем логарифмы (учитываем, что левая и правая части неотрицательны), $\frac{1}{\log_2 3} \bigvee \frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{36}}$. теперь ясно, что левая часть больше, $\frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{27}} > \frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{36}}$, так как $\log_2 \sqrt[3]{27} < \log_2 \sqrt[3]{36}$. ■

1432. Сравните числа a и b, $a = \log_{500} 4000$, $b = \log_{4000} 64000$.

1433. Числа $a = \log_4 9$, $b = \log_6 14$ $c = 1,5$, удовлетворяют соотношению

1 $a < b < c$ **2** $b < c < a$ **3** $b < a < c$ **4** $c < a < b$ **5** $a < c < b$

1434. Наименьшее натуральное число n, при котором $\log_7 n > \dfrac{3}{2}$, равно

1 17 **2** 18 **3** 19 **4** 20 **5** 21

1435. Область определения функции $y = \lg(4 - x^2)$ совпадает с множеством

1 $(-\infty;\ -2) \bigcup (2;\ +\infty)$ **2** $(-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty)$ **3** $(-2;\ 2)$

4 $[-2;\ 2]$ **5** $(-\infty;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$

1436. Наибольшее целое число из области определения функции $\log_2 \dfrac{x^2-8x+15}{\sqrt{6-x}}$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ -1 $\boxed{\mathbf{4}}$ -2 $\boxed{\mathbf{5}}$ такое число не существует

1437. Укажите область определения функции $f(x)=\log_{\frac{x-1}{x+5}} \dfrac{1}{6}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\infty;\ -5)\bigcup(1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;\ -5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $(1;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-5;\ 1)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $(-\infty;\ -1)\bigcup(5;\ +\infty)$

1438. Укажите множество значений функции $f(x)=\log_2(4-x^2)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-2;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $(-\infty;2]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ 1]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[0;\ 2]$

1439. Укажите множество значений функции $f(x)=\log_{0,5}(x^2-4x+12)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $(-\infty;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-3;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[-3;\ 0]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(-\infty;\ -3]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[0;\ +\infty)$

1440. Множество значений функции $f(x)=\log_2(x^2+9x+13)$ на промежутке $x\in[-3-2\sqrt{3};\ -5]$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[2;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[2;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[2;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[3;\ 5]$

1441. Множество значений функции $f(x)=\log_2(x^2+4x+12)$ на промежутке $x\in[-2-\sqrt{6};\ -2+2\sqrt{2}]$ совпадает с множеством

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[3;\ 4]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[4;\ 5]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[3;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[4;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[3;\ 5]$

1442. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{\log_5 15}-3^{\log_5 35}}{7^{\log_5 3}+3^{\log_5 7}}$ и укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

1443. Сколько функций из перечисленных строго возрастают на промежутке $x\in(0;\ 1)$:

(a) $y = \log_2 x$, **(b)** $y = \log_{0,5} x$, **(c)** $y = \log_2(x^2)$, **(d)** $y = \log_{0,5}(x+1)$, **(e)** $y = \log_{0,5}(x^2)$, **(f)** $y = \log_x(x^2)$.

1 одна **2** две **3** три **4** четыре **5** пять

1444. Укажите наибольшее отрицательное число из множества значений функции $f(x) = \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_x 3}$.

1 -1 **2** -2 **3** -3 **4** -4 **5** -5

1445. Укажите наименьшее положительное число из множества значений функции $f(x) = \log_2 x + \log_x 512$.

1 2 **2** 4 **3** 6 **4** 8 **5** 3

1446. Укажите множество значений функции $f(x) = 3^x$.

1 $(0;\ +\infty)$ **2** $(1;\ +\infty)$ **3** $[0;\ +\infty)$ **4** $[1;\ +\infty)$ **5** $(0;\ 1]$

1447. Если график функции $f(x) = 2^{-x}$ растянуть в 4 раза вдоль оси Oy, а затем сдвинуть на 2 единицы влево вдоль оси Ox, то получится график функции

1 $y = 2^{-x}$ **2** $y = 4 \cdot 2^{-x}$ **3** $y = 16 \cdot 2^{-x}$ **4** $y = 4 \cdot 2^{-2x}$
5 $y = 2^{-x-1}$

1448. Укажите множество значений функции $f(x) = 2^{x^2-4x+6}$.

1 $[-2;\ 4]$ **2** $(-\infty;\ 2]$ **3** $(-\infty;\ 4]$ **4** $[2;\ +\infty)$ **5** $[4;\ +\infty)$

1449. Значение выражения $\sqrt{3}^{\log_3 4 + \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt{2}}$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 9

1450. Значение выражения $\log_a \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a}}}$ равно

1 $\frac{11}{12}$ **2** $\frac{31}{36}$ **3** $\frac{8}{9}$ **4** $\frac{7}{9}$ **5** $\frac{7}{8}$

1451. Если $\lg 2 = a$, то значение выражения $\lg 50$ равно

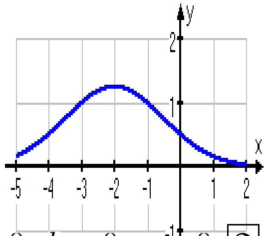
1 $1-a$ **2** $1+2a$ **3** $2+a$ **4** $2-a$ **5** $2a-1$

1452. Значение выражения $\log_2 \sqrt{48} - \log_2 \sqrt{3}$ равно

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

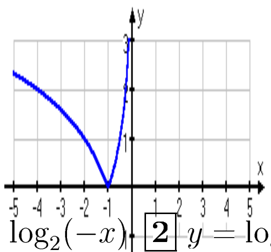
1453. Значение выражения $\frac{\log_3 2+\log_3 8}{4\log_3 2-\log_{\sqrt[3]{3}} 2}$ равно

1 $3\log_2 3$ **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** $4\log_3 2$

1454. 

На рисунке изображен график функции $y=(0,8)^{ax^2+bx+c}$, параметры a, b, c которого удовлетворяют условиям

1 $a<0,\ b>0,\ c>0$ **2** $a>0,\ b>0,\ c>0$
3 $a<0,\ b>0,\ c<0$ **4** $a>0,\ b<0,\ c>0$
5 $a<0,\ b<0,\ c>0$

1455. 

На рисунке изображен график функции

1 $y=\log_2(-x)$ **2** $y=\log_2(-|x|)$ **3** $y=|\log_2(-x)|$
4 $y=-\log_2|x|$ **5** $y=|\log_2|-x||$

1456. Укажите наименьшее положительное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x)=\log_3 x+\log_x 3$.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1457. Множество значений функции $f(x)=\log_2(x^2-6x+11)$ на промежутке $x\in[3-\sqrt{14};\ 3+\sqrt{30}]$ совпадает с множеством

1 $[1;\ 4]$ **2** $[3;\ 5]$ **3** $[2;\ 3]$ **4** $[4;\ 5]$ **5** $[1;\ 5]$

1458. Функция $\dfrac{2^{x+1}\cdot 6^x+4^x\cdot 3^{x+1}}{2^x\cdot 6^{x+1}+4^{x+1}\cdot 3^x}$

1 тождественно равна $0,5$

2 строго возрастает на всей своей области определения

3 тождественно равна 1

4 строго убывает на всей своей области определения
5 тождественно равна 2

1459. Наименьшее значение функции $y = 2^{4x} - 2^{2x+1} + 6$ равно
1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

1460. Функция $y = \log_2\left[(0,5)^{\sin(x-\pi\cdot 0,5)}\right]$ тождественно равна
1 $\sin x$ **2** $\cos x$ **3** $-\sin x$ **4** $-\cos x$ **5** $\dfrac{1}{\cos x}$

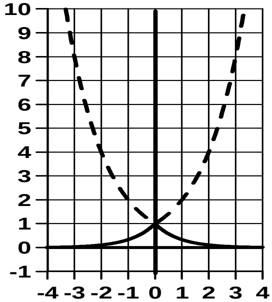
1461. Наименьшее значение функции $y = |2^x - 1| - |2 - 0,5^x|$ на промежутке $x \in [0;1]$ равно
1 1 **2** 2 **3** -1 **4** $3,(3)$ **5** $0,5$

Ответы

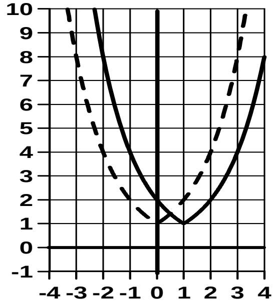
15.2.6.1. Показательная и логарифмическая функция, 1

1268. 1269. ♦ 1270. 1271. **1272.** 3 **1273.** 3 **1274.** 2
1275. 1 **1276.** 2 **1277.** 5 **1278.** 4 **1279.** 3 **1280.** 3 **1281.** 5
1282. 1 **1283.** 2 **1284.** 1 **1285.** 5 **1286.** 3 **1287.** 4 **1288.** 1
1289. 1 **1290.** 2 **1291.** 3 **1292.** 4 **1293.** 3 **1294.** 3 **1295.** 4
1296. 2 **1297.** 1 **1298.** 1 **1299.** 4 **1300.** 2 **1301.** 5 **1302.** 2
1303. 1304. 1305. **1306.** 3 **1307.** 2 **1308.** 5 **1309.** 1
1310. 5 **1311.** 4 **1312.** 4 **1313.** 2 **1314.** 2 **1315.** 1 **1316.** 5
1317. 2 **1318.** 4 **1319.** 2 **1320.** 3 **1321.** 1 **1322.** 2 **1323.** 2
1324. 4 **1325.** 1 **1326.** 2 **1327.** 3 **1328.** 2 **1329.** 5 **1330.** 4
1331. 1 **1332.** 4 **1333.** 4 **1334.** 4 **1335.** 5 **1336.** 4 **1337.** 2
1338. 4 **1339.** 5 **1340.** 3 **1341.** 3

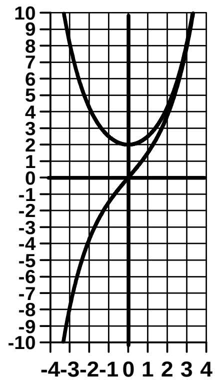
Решение. $\frac{1}{2}\log_4 65 = \frac{1}{4}\log_2 65 > \frac{1}{4}\log_2 64 = \frac{3}{2}$, $\log_5 11 = \frac{1}{2}\log_5 121 < \frac{1}{2}\log_5 125 = \frac{3}{2}$. ■ **1342**. ♦ $a < b$.
Решение. Преобразуем сравнение $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 544$, $\log_{17} 68 \bigvee \log_{68} 17 \cdot \log_{17} 544$, $\left(\log_{17} 68\right)^2 \bigvee \log_{17} 544$,



Графики функций $y = 2^{|x|}$ и $y = 3^{-|x|}$



Графики функций $y = 2^{|x|}$ и $y = 2^{|x-1|}$



Графики функций $y = 2^{x} + 2^{-x}$ и $y = 2^{x} - 2^{-x}$

$\big(\log_{17}(17 \cdot 2^2)\big)^2 \bigvee \log_{17}(17 \cdot 2^5)$, $\big(1 + 2\log_{17} 2\big)^2 \bigvee 1 + 5\log_{17} 2$, $4\big(\log_{17} 2\big)^2 \bigvee \log_{17} 2$, $4\log_{17} 2 \bigvee 1$, $\log_{17} 16 < 1$. ■**1343.** $\boxed{1}$

Решение. Выполните сравнение $\log_5 11 \bigvee \frac{3}{2}$, заменив его эквивалентным сравнением $11 \bigvee 5^{\frac{3}{2}}$. Выполните сравнение $\log_2 3 \bigvee \frac{3}{2}$, заменив его эквивалентным сравнением $3 \bigvee 2^{\frac{3}{2}}$. ■

1344. $\boxed{4}$ **1345.** $\boxed{2}$ **1346.** $\boxed{1}$ **1347.** $\boxed{4}$ **1348.** $\boxed{2}$ **1349.** $\boxed{2}$ **1350.** $\boxed{2}$
1351. $\boxed{3}$ **1352.** $\boxed{2}$ **1353.** $\boxed{3}$ **1354.** $\boxed{4}$ **1355.** $\boxed{2}$ **1356.** $\boxed{3}$ **1357.** $\boxed{3}$
1358. $\boxed{2}$ **1359.** $\boxed{5}$ **1360.** $\boxed{3}$ **1361.** $\boxed{3}$ **1362.** ♦ $\dfrac{3-121}{27+\frac{1}{121}}$.

Решение. $$\frac{3^{\log_5(5\cdot 11)} - 11^{\log_5(5^2\cdot 3)}}{3^{\log_5(11\cdot 5^3)} + 11^{\log_5 \frac{3}{5^2}}} = \frac{3^{1+\log_5(11)} - 11^{2+\log_5(3)}}{3^{3+\log_5(11)} + 11^{-2+\log_5(3)}}$$
$$= \frac{3\cdot 3^{\log_5(11)} - 121\cdot 11^{\log_5(3)}}{27\cdot 3^{\log_5(11)} + \frac{1}{121}\cdot 11^{\log_5(3)}} = \frac{3\cdot 3^{\log_5(11)} - 121\cdot 3^{\log_5(11)}}{27\cdot 3^{\log_5(11)} + \frac{1}{121}\cdot 3^{\log_5(11)}}$$

$= \dfrac{3-121}{27+\frac{1}{121}}$. ■ **1363.** $\boxed{3}$ **1364.** $\boxed{1}$ **1365.** $\boxed{1}$ **1366.** $\boxed{4}$ **1367.** $\boxed{4}$
1368. $\boxed{2}$ **1369.** $\boxed{4}$ **1370.** $\boxed{4}$ **1371.** **1372.** **1373.** **1374** **1375.** $\boxed{4}$
1376. $\boxed{2}$ **1377.** $\boxed{5}$ **1378.** $\boxed{1}$ **1379.** $\boxed{4}$ **1380.** $\boxed{2}$ **1381.** $\boxed{5}$ **1382.** $\boxed{5}$
1383. $\boxed{4}$ **1384.** $\boxed{5}$ **1385.** $\boxed{2}$ **1386.** $\boxed{3}$ **1387.** $\boxed{1}$ **1388.** $\boxed{2}$ **1389.** $\boxed{5}$
1390. $\boxed{5}$ **1391.** $\boxed{4}$ **1392.** $\boxed{4}$ **1393.** $\boxed{4}$ **1394.** $\boxed{3}$ **1395.** $\boxed{3}$ **1396.** $\boxed{5}$
1397. $\boxed{3}$ **1398.** $\boxed{2}$ **1399.** $\boxed{2}$ **1400.** $\boxed{5}$ **1401.** $\boxed{5}$ **1402.** $\boxed{3}$ **1403.** $\boxed{1}$
1404. $\boxed{1}$ **1405.** $\boxed{2}$ **1406.** $\boxed{5}$ **1407.** $\boxed{4}$ **1408.** $\boxed{1}$ **1409.** $\boxed{1}$ **1410.** $\boxed{4}$
1411. $\boxed{4}$ **1412.** $\boxed{2}$ **1413.** $\boxed{1}$ **1414.** $\boxed{3}$ **1415.** $\boxed{3}$ **1416.** $\boxed{3}$ **1417.** $\boxed{1}$
1418. $\boxed{4}$ **1419.** $\boxed{5}$ **1420.** $\boxed{3}$ **1421.** $\boxed{3}$ **1422.** $\boxed{1}$ **1423.** $\boxed{2}$ **1424.** $\boxed{3}$
1425. $\boxed{5}$ **1426.** $\boxed{3}$ **1427.** $\boxed{2}$ **1428.** $\boxed{1}$ **1429.** ♦ $a > b$.

1430. ♦ $a < b$.

Решение. Выполните два сравнения: $\log_7 18 \bigvee \frac{3}{2}$; $\log_2 3 \bigvee \frac{3}{2}$. ■

1431. ♦ $a > b$.

Решение. Выполним сравнение $\log_9 36 \bigvee \log_{36} 288$. Разложим логарифмируемые выражения на множители, $\log_9(9\cdot 4) \bigvee \log_{36}(36\cdot 8)$, используем формулу логарифма произведения, $1+\log_9 4 \bigvee 1+\log_{36} 8$, преобразуем сравнение тождественно путем вычитания равных чисел из левой и правой частей, $\log_9 4 \bigvee \log_{36} 8$, используем формулы логарифма степени по степенному основанию, $\log_3 2 \bigvee \log_{\sqrt[3]{36}} 2$, инвертируем логарифмы (учитываем, что левая и правая части неотрицательны), $\frac{1}{\log_2 3} \bigvee \frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{36}}$. теперь ясно, что левая часть больше, $\frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{27}} > \frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{36}}$, так как $\log_2 \sqrt[3]{27} < \log_2 \sqrt[3]{36}$. ■

1432. ♦ $a > b$ **1433.** $\boxed{2}$ **1434.** $\boxed{3}$ **1435.** $\boxed{3}$ **1436.** $\boxed{2}$ **1437.** $\boxed{1}$
1438. $\boxed{2}$ **1439.** $\boxed{4}$ **1440.** $\boxed{1}$ **1441.** $\boxed{1}$ **1442.** $\boxed{2}$ **1443.** $\boxed{2}$ **1444.** $\boxed{2}$
1445. $\boxed{3}$ **1446.** $\boxed{1}$ **1447.** $\boxed{1}$ **1448.** $\boxed{5}$ **1449.** $\boxed{4}$ **1450.** $\boxed{2}$ **1451.** $\boxed{4}$
1452. $\boxed{2}$ **1453.** $\boxed{4}$ **1454.** $\boxed{2}$ **1455.** $\boxed{3}$ **1456.** $\boxed{2}$ **1457.** $\boxed{5}$
1458. $\boxed{1}$ **1459.** $\boxed{5}$ **1460.** $\boxed{2}$ **1461.** $\boxed{1}$

Тема 16. Показательные уравнения и неравенства

16.1. Элементарные уравнения и неравенства

1462. Решите уравнение $2^x = 5$.

♦ $x = \log_2 5$.

Решение 1. Логарифмируем по основанию 2: $\log_2(2^x) = \log_2 5$. Так как $\log_a a^x = x$, то $x = \log_2 5$. ■

Решение 2. Преобразуем правую часть: $2^x = 2^{\log_2 5}$, $x = \log_2 5$. ■

1463. Если $2^x = 5$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-999;\ 0)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [0;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [1;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [2;\ 3)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [3;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $x = \log_2 5 \in (2;\, 3)$.

Решение. $x = \log_2 5$, $\log_2 5 \in (\log_2 4;\, \log_2 8) = (2;\, 3)$. ■

1464. Если $2^x = 5$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-999;\ 0)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [0;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [2;\ 2,5)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [2,5;\ 3)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [3;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x = \log_2 5 \in (2;\, 2,5)$.

Решение. Сравним: $\log_2 5 \bigvee \frac{5}{2}$, $2\log_2 5 \bigvee 5$, $\log_2 5^2 \bigvee \log_2 2^5$, $5^2 \bigvee 2^5$, $25 < 32$. ■

1465. Если $2^x = 5$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-999;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [2;\ 2,(3))$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [2,(3);\ 2,(6))$
$\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [2,(6);\ 3)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [3;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x = \log_2 5 \in (2;\, 2,5)$.

Решение. Сравним: $\log_2 5 \bigvee \frac{7}{3}$, $3\log_2 5 \bigvee 7$, $\log_2 5^3 \bigvee \log_2 2^7$, $5^3 \bigvee 2^7$, $125 < 128$. ■

1466. Решите неравенство $3^x < 7$.

♦ $x < \log_3 7$.

Решение 1. $\log_3 3^x < \log_3 7$, $x < \log_3 7$. ■

Решение 2. $3^x < 3^{\log_3 7}$, $x < \log_3 7$. ■

1467. Решите неравенство $(0,25)^x < 0,125$.

♦ $x > 1,5$.

Решение. $\log_{0,25}(0,25)^x > \log_{0,25} 0,125$, $x > \log_{(2^{-2})}\left(2^{-3}\right)$, $x > 1,5$. ■

1468. Решите неравенство $3^{x^2+15} > 81^{2x}$.

♦ $x \in (-\infty;\, 3) \bigcup (5;\, +\infty)$.

Решение. $3^{x^2+15} > 3^{8x}$, $x^2 + 15 > 8x$, $x \in (-\infty;\, 3) \bigcup (5;\, +\infty)$. ■

1469. Решите неравенство $(0,5)^{x^2+15} > (0,0625)^{2x}$.

♦ $x \in (1;\, 5)$.

Решение. $(0,5)^{x^2+15} > (0,5)^{8x}$, $x^2 + 15 < 8x$, $x \in (3;\, 5)$. ■

1470. Решите уравнение $8^{x+1,(3)} - 7 \cdot 4^{1,5x+2,5} + 3 \cdot 2^{3x+2} + 24,5 = 0$.

♦ $x = -1$.

Решение. $2^{3x+4} - 7 \cdot 2^{3x+5} + 3 \cdot 2^{3x+2} + 24,5 = 0$, $2^{3x}[16 - 7 \cdot 32 + 3 \cdot 4] + 24,5 = 0$, $(-196) \cdot 2^{3x} = -24,5$, $2^{3x} = 2^{-3}$, $x = -1$. ■

1471. Решите уравнение $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{x^2+11} = \left(\dfrac{8}{27}\right)^{16x}$.

Решение. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4(x^2+11)} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-48x}$, $4x^2 - 48x + 44 = 0$, $x^2 - 12x + 11 = 0$, $x \in \{1;\, 11\}$. ■

1472. Решите уравнение $5^{-2^x} = 2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\log_5 \log_2 5$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\log_2 \log_5 2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $-\log_5 \log_2 5$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\log_5 \log_2 0,2$
$\boxed{\mathbf{5}}$ Нет решений

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ Нет решений.

Решение 1. $-2^{-x} = \log_5 2$, $-2^{-x} < 0$, $\log_5 2 > 0$. ■

Решение 2. $-2^x \in (-\infty,\, 0)$, $5^{-2^x} \in (0,\, 1)$. ■

16.1.1. Взаимно обратные основания

1473. Если число П равно произведению всех различных корней уравнения $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{17}\right)^{x^2+15} = \left(3\sqrt{2}-\sqrt{17}\right)^{8x}$, то

1 П $\in (-999;\ -7)$ **2** П $\in [-7;\ 6)$ **3** П $\in [6;\ 11)$ **4** П $\in [11;\ 17)$
5 П $\in [17;\ 999)$

Ответ **4**♦ $x \in \{-3;\ -5\}$.

Решение. $\sqrt{18}-\sqrt{17} = \left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{-1}$, $b^{x^2+15} = b^{-8x}$ где $b = \sqrt{18}+\sqrt{17}$, $x^2+8x+15=0$, $x=-3;\ -5$. ■

1474. Если число b равно наибольшему корню управнения $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^x + \left(\sqrt{18}-\sqrt{17}\right)^x = 6\sqrt{2}$, то

1 $b \in (-999;\ -1,5)$ **2** $b \in [-1,5;\ -0,5)$ **3** $b \in [-0,5;\ 0,5)$
4 $b \in [0,5;\ 1,5)$ **5** $b \in [1,5;\ 999)$

Ответ **4**♦ $x \in \{-1;\ 1\}$.

Решение. $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^x + \left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{-x} = 6\sqrt{2}$, $t+t^{-1} = 6\sqrt{2}$, $t^2-(6\sqrt{2})t+1=0$, $t = 3\sqrt{2}\pm\sqrt{17}$, $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^x = \sqrt{18}\pm\sqrt{17}$, $x \in \{-1;\ 1\}$. ■

1475. Все решения неравенства $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^x + \left(\sqrt{18}-\sqrt{17}\right)^x \leqslant 6\sqrt{2}$, образуют промежуток, длина которого L принадлежит на промежутку

1 $L \in (-999;\ -1,5)$ **2** $L \in [-1,5;\ -0,5)$ **3** $L \in [-0,5;\ 0,5)$
4 $L \in [0,5;\ 1,5)$ **5** $L \in [1,5;\ 999)$

Ответ **5**♦ $x \in [-1;\ 1]$.

Решение. $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^x + \left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{-x} \leqslant 6\sqrt{2}$, $t+t^{-1} \leqslant 6\sqrt{2}$. Решим это неравенство методом интервалов: $\frac{t^2-(6\sqrt{2})t+1}{t} \leqslant 0$, $t \in (-\infty;\ 0) \bigcup [b^{-1};\ b]$, $b = \sqrt{18}+\sqrt{17}$. Заметм, что в данном случае $t > 0$, поэтому $t = b^x \in [b^{-1};\ b]$, $x \in [-1;\ 1]$. ■

16.1.2. Разложение на множители

1476. Решите неравенство $6^{x+2} \geqslant (x^2+16x)\cdot 6^x$.

Решение. $6^x(x^2+16x-36) \leqslant 0$, $x \in [-18;\,2]$. ■

1477. Решите неравенство $7^{\sqrt{(x^2-5x+6)^3}} \cdot 11^{(x-2)^2(x-3)} \geqslant 1$.

♦ $x \in [(2\log_7^2 11-3)(\log_7^2 11-1)^{-1};\,2] \bigcup [3;\,+\infty)$.

Решение. Логарифмируем по основанию 7: $\sqrt{(x^2-5x+6)^3} + (x-2)^2(x-3)\log_7 11 \geqslant 0$, $\sqrt{(x-2)^3\cdot(x-3)^3} + \log_7 11 \cdot (x-2)^2(x-3) \geqslant 0$, **(1)** $x \geqslant 3: (x-2)^{3/2}(x-3)^{3/2} + \log_7 11\cdot(x-2)^2(x-3) \geqslant 0$, $(x-2)^{3/2}(x-3)\cdot\left[(x-3)^{1/2}+\log_7 11\cdot(x-2)^{1/2}\right] \geqslant 0$, все три сомножителя левой части неотрицательны, поэтому в ответ запишем $x \in [7;\,+\infty)$. **(2)** $x \leqslant 2: (2-x)^{3/2}(3-x)^{3/2} - \log_7 11\cdot(2-x)^2(3-x) \geqslant 0$, $(2-x)^{3/2}(3-x)\cdot\left[(3-x)^{1/2}-\log_7 11\cdot(2-x)^{1/2}\right] \geqslant 0$, $x=2$ — решение. Рассмотрим промежуток $x<2:$ $(3-x)^{1/2}-\log_7 11\cdot(2-x)^{1/2} \geqslant 0$, $(3-x)^{1/2} \geqslant \log_7 11\cdot(2-x)^{1/2}$, $3-x \geqslant \left(\log_7 11\right)^2\cdot(2-x)$, $\left[\left(\log_7 11\right)^2-1\right]x \geqslant 2\left(\log_7 11\right)^2-3$, $x \in [(2\log_7^2 11-3)(\log_7^2 11-1)^{-1};\,2] \bigcup [3;\,+\infty)$. ■

16.1.3. Использование монотонности

1478. Решите уравнение $4^x+25^x=29$.

♦ $x=1$.

Решение. $4^x+25^x=4^1+25^1$,
$x>1 \Rightarrow 4^x>4^1,\ 25^x>25^1,\ 4^x+25^x>4^1+25^1$,
$x<1 \Rightarrow 4^x<4^1,\ 25^x<25^1,\ 4^x+25^x<4^1+25^1$. ■

1479. Решите неравенство $4^x+25^x>29$.

Решение. $4^x+25^x>4^1+25^1$, $x>1$. ■

1480. Решите уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{3}^x=34$.

Решение. $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{3}^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \frac{1}{3}^{-2}$, $x = -2$. ■

1481. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{3}^x > 34$.

Решение. $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{3}^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \frac{1}{3}^{-2}$, $x < -2$. ■

16.1.4. Показательно – степенные неравенства

Теоретические сведения Пусть $a > 0$. Тогда
$\operatorname{sign}\left(a^b - a^c\right) = \operatorname{sign}\left((a-1)(b-c)\right)$.
Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Тогда
$\operatorname{sign}\left(\log_a b\right) = \operatorname{sign}\left((a-1)(b-c)\right)$,

1482. Решите неравенство $\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

Решение. $\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{-3x^2+x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$, $\left(\frac{x^4+1}{4x^2} - 1\right) \cdot \left(-3x^2 + x - x + 2\right) > 0$, $x \in \left(0;\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$.
■

16.2. Квадратные уравнения и неравенства

1483. Решите уравнение $4^x - 33 \cdot 2^{x+1} + 128 = 0$.
♦ $x \in \{1;\ 6\}$.

Решение. $t = 2^x$, $t^2 - 66t + 128 = 0$, $t \in \{2;\ 64\}$, $x \in \{1;\ 6\}$. ■

1484. Решите неравенство $4^x - 31 \cdot 2^{x+1} - 128 \leqslant 0$.
♦ $x \in (-\infty;\ 6]$.

Решение. $t^2 - 62t - 128 \leqslant 0$, $t \in [-2;\ 64]$, $x \in (-\infty;\ 6]$. ■

1485. Решите неравенство $4^x - 33 \cdot 2^{x+1} + 128 \leqslant 0$.

♦ $x \in [1;\, 6]$.

Решение. $t = 2^x$, $t^2 - 66t + 128 \leqslant 0$, $t \in [2;\, 64]$, $x \in [1;\, 6]$. ■

1486. Решите уравнение $4^x - 31 \cdot 2^{x+1} - 128 = 0$.

♦ $x = 6$.

Решение. $t^2 - 62t - 128 = 0$, $t = -2;\, 64$, $x = 6$. ■

1487. Решите уравнение $3^x - 18 \cdot 3^{-x} = 7$.

Решение. $t - 7 - 18t^{-1} = 0$, $\dfrac{t^2 - 7t - 18}{t} = 0$, $t = -2$, $t = 9$, $t > 0$, $t = 9$, $x = 2$. ■

1488. Решите неравенство $3^x - 18 \cdot 3^{-x} < 7$.

Решение. $t^2 - 7t - 18 < 0$, $t \in (-2;\, 9)$, $x \in (-\infty;\, 2)$. ■

1489. Решите уравнение $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$.

Решение. $\left(2^x\right)^2 - 4 \cdot \left(2^{\sqrt{x}}\right)^2 = 3 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{x}}$, $\left(2^{x-\sqrt{x}}\right)^2 - 3\left(2^{x-\sqrt{x}}\right) - 4 = 0$, $t^2 - 3t - 4 = 0$, $t \in \{-1;\, 4\}$, $a)$ $2^{x-\sqrt{x}} = -1$, $x \in \emptyset$, $b)$ $2^{x-\sqrt{x}} = 4$, $x - \sqrt{x} = 2$, $\sqrt{x} \in \{-1;\, 2\}$, $x = 4$. ■

1490. Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

Решение. $4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3$, $4^{-1}z^2 + z - 3 = 0$, $z^2 + 4z - 12 = 0$, $z = -6;\, 2$, $a)$ $4^{\cos^2 x} = -6$, $x \in \emptyset$, $b)$ $4^{\cos^2 x} = 2$, $4^{\cos^2 x} = 4^{1/2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$, $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

1491. Решите уравнение $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.

Решение. $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1} - 1} = 1$, $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$, $\left(5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1$, $a)$ $5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} = 1$, $2^{\frac{1}{x+1}} = 0,2$, $\dfrac{1}{x+1} = \log_2(0,2)$, $x + 1 = \log_{0,2}(2)$, $x + 1 = -\log_5(2)$, $x = -\log_5(10)$, $b)$ $x - 2 = 0$, $x = 2$. ■

16.2.1. Приводящиеся к квадратным

1492. Решите уравнение $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$.

Решение. $2\cdot 9^x-5\cdot 6^x+3\cdot 4^x=0$,

$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+3=0$, $\quad 2t^2-5t+3=0$, $\quad t=1;\ 1,5$,

$x=0;\ 1$. ■

1493. Решите неравенство $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x<0$.

Решение. $2\cdot 9^x-5\cdot 6^x+3\cdot 4^x<0$,

$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+3<0$, $\quad 2t^2-5t+3<0$, $\quad t\in(1;\ 1,5)$,

$x\in(0;\ 1)$. ■

Тема 17. Логарифмические уравнения и неравенства

17.1. Элементарные уравнения и неравенства

1494. Решите уравнение $(\star)$ $\log_3 x = 2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x = \log_2 3$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = \log_3 2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 9$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x = \log_2 9$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x = \log_3 4$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x = 9$.

Решение 1. Преобразуем выражение в правой части уравнения $(\star)$ к логарифму по основанию 3 от некоторого другого выражения,
$2 = \log_3 3^2$. Таким образом, уравнение $(\star)$ равносильно уравнению
$(\star\star)$ $\log_3 x = \log_3 3^2$. Так как функция $f(x) = \log_3 x$ монотонно возрастает на промежутке $x \in (0; +\infty)$ и $3^2 \in (0; +\infty)$, то уравнение $(\star\star)$ равносильно равенству $x = 3^2 = 9$. ■

Решение 2. Так как функция $f(t) = 3^t$ монотонно возрастает на всей числовой оси, мы имеем право применить эту функцию к левой и правой частям уравнения $(\star)$ и при этом получится равносильное уравнение $3^{\log_3 x} = 3^2$. Равенство $(\ddagger)$ $3^{\log_3 x} = x$ является тождеством, т.е. справедливо при всех допустимых для $(\ddagger)$ значений переменной x, поэтому $(\ddagger)$ равносильно равенству $x = 3^2$. ■

1495. Решите неравенство $(\star)$ $\log_2 x \leqslant 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in [8; +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (0; +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ решений нет $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (0; 8]$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty; 8]$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $x \in (0; 8]$.

Решение 1. Преобразуем выражение в правой части $(\star)$ к логарифму по основанию 2 от некоторого другого выражения,
$(\star\star)$ $\log_2 x \leqslant \log_2 3^2$. Так как функция $f(x) = \log_2 x$ монотонно возрастает на промежутке $x \in (0; +\infty)$ и $2^3 \in (0; +\infty)$, то

неравенство $(\star\star)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant 2^3 = 8, \\ x > 0, \end{cases}$ причем второе из неравенств системы представляет собой ОДЗ для $(\star)$. ■

Решение 2. Так как функция $f(t) = 2^t$ монотонно возрастает на всей числовой оси, мы имеем право применить эту функцию к левой и правой частях неравенства $(\star)$ и при этом получится равносильное неравенство $2^{\log_2 x} \leqslant 2^3$. Равенство $(\ddagger)$ $2^{\log_2 x} = x$ является тождеством, т.е. справедливо при всех допустимых для $(\ddagger)$ значений переменной x, поэтому $(\ddagger)$ равносильно системе $\begin{cases} x \leqslant 2^3, \\ x > 0. \end{cases}$ ■

1496. Решите неравенство $\log_2 x \geqslant 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in [8;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (0;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ решений нет $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (0;\ 8]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty;\ 8]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x \in [8;\ +\infty)$.

1497. Решите неравенство $\log_{0,5} x \geqslant -3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in [8;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (0;\ 0{,}125]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ решений нет $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in (0;\ 8]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty;\ 8]$

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $x \in (0;\ 8]$.

1498. Решите неравенство $\log_{0,5} x \leqslant -3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in [8;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in (0;\ 0{,}125]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in (0;\ 8]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [0{,}125;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in (-\infty;\ 8]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x \in [8;\ +\infty)$.

Целесообразно различать "криминальные" и "некриминальные" неравенства. Для криминальных неравенств $\log_a x < b$, $a > 1$, $\log_a x \leqslant b$, $a > 1$, $\log_a x > b$, $a \in (0;\ 1)$, $\log_a x \geqslant b$, $a \in (0;\ 1)$, принципиально важным является учет ОДЗ $x > 0$. Для некриминальных неравенств $\log_a x > b$, $a > 1$, $\log_a x \geqslant b$, $a > 1$, $\log_a x < b$, $a \in (0;\ 1)$, $\log_a x \leqslant b$, $a \in (0;\ 1)$, форма ответа такова, что принадлежность ОДЗ автоматически вытекает из условия задачи.

17.2. Приведение подобных в логарифмических уравнениях

Решите уравнение ($\star$) $\frac{1}{2}\lg(x^2+3x-3)+2=2\lg(x+1)+2\lg\frac{1}{x+1}+\log_2 4$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lg(x^2+3x-3)=2\lg(x+1)+2\lg\frac{1}{x+1}, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(x^2+3x-3)=4\lg(x+1)+4\lg\frac{1}{x+1}, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(x^2+3x-3)=0, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-3=1, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in\{1;\,-4\}, \\ x^2+3x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$$

Ответ: 1.

17.3. Квадратные логарифмические уравнения и неравенства

1499. Решите уравнение $\log_2\big[x(x-1)\big]=1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x\in\{-1;\,2\}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x=-1$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x=2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ решений нет
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x\in[-1;\,2]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x\in\{-1;\,2\}$.

Решение. Для решения логарифмических уравнений и неравенств можно применить один из двух методов, которые были пояснены в двух предыдущих параграфах. В дальнейшем мы не будем подробно пояснять эти методы еще раз. Преобразуем правую часть к логарифму некоторого выражения,
$\log_2\big[x(x-1)\big] = \log_2(2^1)$, $(\star)$ $\begin{cases} x(x-1)=2, \\ x(x-1)>0. \end{cases}$ Условие $x(x-1)>0$ опускаем, так как оно вытекает из первого уравнения $(\star)$. Решим квадратное уравнение $x^2-x-2=0$, $x\in\{-1;\ 2\}$. ■

1500. Решите уравнение $(\star)$ $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$.

1 $x\in\{-1;\ 2\}$ **2** $x=-1$ **3** $x=2$ **4** решений нет
5 $x\in[-1;\ 2]$

Ответ **3** ♦ $x=2$.

Решение. Уравнение $(\star)$ равносильно системе
$\begin{cases} \log_2[x(x-1)]=\log_2 2^1, \\ x>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x>1, \end{cases}$ $x=2$. ■

1501. Решите уравнение $(\star)$ $\log_2(-x)+\log_2(1-x)=1$.

1 $x\in\{-1;\ 2\}$ **2** $x=-1$ **3** $x=2$ **4** решений нет
5 $x\in[-1;\ 2]$

Ответ **2** ♦ $x=-1$.

Решение. Уравнение $(\star)$ равносильно системе
$\begin{cases} \log_2[(-x)(1-x)]=\log_2 2^1, \\ -x>0, \\ 1-x>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x<0, \end{cases}$ $x=-1$. ■

Обратите внимание на то, что во всех трех задачах получилось одно и то же квадратное уравнение, но с различными ограничениями. В целом, замена выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ на выражение
$\log_a(f(x)\cdot g(x))$ может привести к расширению ОДЗ и появлению лишних корней, поэтому или нужно сделать проверку, или добавлять в вистему неравенства, восстанавливающие ОДЗ.

1502. Решите уравнение $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in \{-2;\ 3\}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x = -2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 3$ $\boxed{\mathbf{4}}$ решений нет
$\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [-2;\ 3]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x \in \{-2;\ 3\}$.

Решение. Уравнение равносильно $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(2^2)$, $x^2 - x - 2 = 2^2$. Дополнительное условие в данном случае не требуется, поэтому $x \in \{-2;\ 3\}$. ■

1503. Решите неравенство $\log_2(x^2 - x - 2) \geqslant 2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [3;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x(-\infty;\ -1] \bigcup [2;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [-2;\ -1) \bigcup (2;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ решений нет $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [-2;\ 3]$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [3;\ +\infty)$.

Решение. Неравенство равносильно $\log_2(x^2 - x - 2) \geqslant \log_2 2^2$, $x^2 - x - 2 \geqslant 4$, $x^2 - x - 6 \geqslant 0$, $x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [3;\ +\infty)$. ■

1504. Решите неравенство $\log_2(x^2 - x - 2) \leqslant 2$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (-\infty;\ -2] \bigcup [3;\ +\infty)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x(-\infty;\ -1] \bigcup [2;\ +\infty)$
$\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [-2;\ -1) \bigcup (2;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ решений нет $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [-2;\ 3]$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in [-2;\ -1) \bigcup (2;\ 3]$.

Решение. Неравенство равносильно $\log_2(x^2 - x - 2) \leqslant \log_2 2^2$, $0 < x^2 - x - 2 \leqslant 4$, $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \bigcup (2;\ +\infty), \\ x \in [-2; 3], \end{cases}$

$x \in [-2; -1) \bigcup (2;\ 3]$. ■

1505. Решите неравенство $\log_2(-x^2 + 3x + 10) \leqslant 3$.

♦ $x \in \left(-2;\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ 5\right)$.

1506. Решите уравнение $\log_2[(x - 1)(x^2 - 6)] = \log_2 6$.

Решение. $(x - 1)(x^2 - 6) = 6$, $x^3 - x^2 - 6x = 0$, $x \in \{0;\ -2;\ 3\}$. ■

1507. Решите уравнение $\log_2(x-1)+\log_2(x^2-6)=\log_2 6$.

Решение. $\begin{cases}(x-1)(x^2-6)=6,\\ x-1>0,\\ x^2-6>0,\end{cases}$ $x=3$. ■

1508. Решите уравнение $\log_2(1-x)+\log_2(6-x^2)=\log_2 6$.

Решение. $\begin{cases}(x-1)(x^2-6)=6,\\ x-1<0,\\ x^2-6<0,\end{cases}$ $x\in\{-2;\,0\}$. ■

1509. Решите неравенство $\log_2[(x-1)(x^2-6)]\geqslant\log_2 6$.

Решение. $(x-1)(x^2-6)\geqslant 6$, $x^3-x^2-6x\geqslant 0$, $x\in[-2;0]\bigcup[3;\,+\infty)$. ■

1510. Решите неравенство $\log_2[(x-1)(x^2-6)]\leqslant\log_2 6$.

Решение. $0<(x-1)(x^2-6)\leqslant 6$, $\begin{cases}x\in(-\sqrt{6};\,1)\bigcup(\sqrt{6};\,+\infty),\\ x\in(-\infty;\,-2]\bigcup[0;\,3],\end{cases}$ $x\in(-\sqrt{6};-2]\bigcup[0;\,1)\bigcup(\sqrt{6};\,3]$. ■

1511. Решите уравнение $\lg(x^2-6x+7)=\lg(x-3)$.

♦ $x=5$.

Решение. Равенство $\log_a u=\log_a v$ имеет место при одновременном выполнении следующих условий: $a>0$, $a\neq 1$, $u>0$, $v>0$. Заметим, что из двух условий $u>0$, $v>0$ достаточно оставить только одно (любое), так как совместно с уравнением $\log_a u=\log_a v$ выполнение другого условия обеспечено автоматически. Следует оставить то из двух условий, которое проще проверить. Для заданного нам уравнения равносильная система имеет вид $\begin{cases}x^2-6x+7=x-3,\\ x^2-6x+7>0,\\ x-3>0,\end{cases}$ из двух последних условий оставим более простое, $\begin{cases}x^2-6x+7=x-3,\\ x-3>0,\end{cases}$ $\begin{cases}x\in\{2;\,5\},\\ x-3>0,\end{cases}$ поэтому $x=5$. ■

1512. Решите уравнение $\lg(2x)=0{,}25\lg(x-15)^4$.

♦ $x = 5$.

Решение. Внесем коэффициент $0{,}25 = \frac{1}{4}$ внутрь логарифма в виде показателя, $0{,}25\lg(x-15)^4 = \lg\sqrt[4]{(x-15)^4}$. Следует обратить внимание на корректное извлечение корня четной степени, $\sqrt[4]{(x-15)^4} = |x-15|$. Равносильная система имеет вид $\begin{cases} 2x = |x-15|, \\ x > 0, \end{cases}$ единственный корень $x = 5$. ■

1513. Решите уравнение $\log_3(2-x) - \log_3(2+x) - \log_3 x + 1 = 0$.
♦ $x = 1$.

Решение. $\begin{cases} 3(2-x) = x(2+x), \\ 2-x > 0, \\ 2+x > 0, \\ x > 0, \end{cases}$ $x = 1$. ■

1514. Сумма всех различных корней уравнения $\log_2 x \cdot \log_2 \dfrac{x}{32} + 6 = 0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x \in \{4;\ 8\}$.

Решение. Выполним замену $t = \log_2 x$. Получим уравнение $t(t-5)+6 = 0$, корни которого $t \in \{2;\ 3\}$, Выполним обратную замену $\log_2 x \in \{2;\ 3\}$, $x \in \{2^2;\ 2^3\}$, $x \in \{4;\ 8\}$. ■

1515. Сумма всех различных целочисленных решений неравенства $\log_2 x \cdot \log_2 \dfrac{x}{32} + 6 < 0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in (4;\ 8)$.

Решение. Выполним замену $t = \log_2 x$. Получим неравенство $t(t-5)+6 < 0$, решения которого $t \in (2;\ 3)$. Выполним обратную замену, $\log_2 x \in (2;\ 3)$, $x \in (4;\ 8)$. Целочисленные решения образуют множество $\{5;\ 6;\ 7\}$. ■

1516. Сумма всех различных корней уравнения $\log_x 3 + \log_3 x = 2{,}5$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 12 $\boxed{\mathbf{2}}$ $3+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $9+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ 27 $\boxed{\mathbf{5}}$ $3-\sqrt{3}$

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in \{9;\ \sqrt{3}\}$.

Решение. Выполним замену $t = \log_3 x$, получим уравнение $(\star)$ $t^{-1} + t = 2{,}5$, равносильное уравнению $\frac{t^2-2{,}5t+1}{t} = 0$. Квадратное уравнение $(\star\star)$ $t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$ имеет два корня, $t \in \{0{,}5;\ 2\}$, ни один из которых не равен нулю. Поэтому оба корня $(\star\star)$ являются также корнями $(\star)$. Выполним обратную замену, **(1)** $\log_3 x = 0{,}5$, $x = \sqrt{3}$, **(2)** $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Таким образом, имеется два различных корня, $x \in \{9;\ \sqrt{3}\}$. ■

1517. Один из корней уравнения $4\log_x 81 + \log_3 x = 8$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x = 81$.

Решение. Замена $t = \log_3 x$ приводит к уравнению $16t^{-1} + t = 8$, равносильному квадратному уравнению $t^2 - 8t + 16 = 0$, имеющему единственный корень $t = 4$. Обратная замена дает $\log_3 x = 4$, так что $x = 81$. Особенность в том, квадратное уравнение имеет единственный корень. ■

1518. Произведение всех различных корней уравнения $\log_2 x - \log_x 2^{2006} = 1643$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x_1 \cdot x_2 = 2^{1643}$.

Решение. Выполним замену $t = \log_2 x$, получим уравнение $(\star)$ $t - 2006t^{-1} = 1643$, равносильное уравнению $\frac{t^2-1643t-2006}{t} = 0$. Квадратное уравнение $(\star\star)$ $t^2 - 1643t - 2006 = 0$ имеет два корня $t_{1,2}$, ни один из которых не равен нулю. Поэтому оба корня $(\star\star)$ являются также корнями $(\star)$. Выполним обратную замену, $\log_2 x_1 = t_1$, $\log_2 x_2 = t_2$, $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = t_1 + t_2$, $\log_2(x_1 x_2) = t_1 + t_2$,

$x_1x_2 = 2^{t_1+t_2} = 2^{1643}$. Это натуральное число заканчивается той же цифрой, что и число 2^3. Особенность этой задачи состоит в том, что решать квадратное уравнение ($\star\star$) не следует, достаточно найти сумму его корней потеореме Виета. ■

1519. Множество всех решений неравенства $\log_x 3 + \log_3 x \leqslant 2{,}5$. можно представить в виде обьединения конечного числа промежутков, сумма длин которых равна

$\boxed{\mathbf{1}}\ 9+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{2}}\ 10-\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}\ 9-\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{4}}\ 10+\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{5}}\ 9+3\sqrt{3}$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x \in (0;\,1) \bigcup [\sqrt{3};\,9]$.

Решение. $t = \log_3 x$, $t^{-1} + t \leqslant 2,5$, $\dfrac{t^2 - 2,5t + 1}{t} \leqslant 0$,
$t \in (-\infty;\,0) \bigcup [0,5;\,2]$, $x \in (0;\,1) \bigcup [\sqrt{3};\,9]$. ■

1520. Решите неравенство $\log_2 x - \log_x 4 \leqslant 1$.

Решение. $t - \dfrac{2}{t} \leqslant 1$, $t \in (-\infty;\,-1] \bigcup (0;\,2]$,
$x \in (0;\,0,5] \bigcup (1;\,4]$. ■

1521. Решите уравнение $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$.

Решение. $t = \log_2 x$, $\dfrac{t}{\frac{1}{2}(t+1)} = \dfrac{\frac{1}{3}(t+2)}{\frac{1}{4}(t+3)}$, $t \in \{1;\,-4\}$,
$x \in \{2;\,2^{-4}\}$. ■

1522. Решите неравенство $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} \geqslant \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$.

♦ $x \in (0;\,\dfrac{1}{16}] \bigcup (\dfrac{1}{8};\,\dfrac{1}{2}) \bigcup [2;\,+\infty)$.

Решение. Выполним замену $t = \log_2 x$, $\dfrac{t}{\frac{1}{2}(t+1)} \geqslant \dfrac{\frac{1}{3}(t+2)}{\frac{1}{4}(t+3)}$,
$\dfrac{t}{t+1} \geqslant \dfrac{2(t+2)}{3(t+3)}$, $\dfrac{3t(t+3) - 2(t+1)(t+2)}{3(t+1)(t+3)} \geqslant 0$,

$\dfrac{t^2+3t-4}{3(t+1)(t+3)} \geqslant 0, \qquad t \in (-\infty;\ -4] \bigcup (-3;\ -1) \bigcup [1;\ +\infty),$
$x \in\in (0;\ \dfrac{1}{16}] \bigcup (\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{2}) \bigcup [2;\ +\infty)$. ■

1523. Сумма всех различных корней уравнения $\lg\dfrac{x}{5}\cdot\lg\dfrac{x}{10} = \lg 5$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x \in \{1;\ 50\}$.

Решение. Выполним замену $t = \lg\dfrac{x}{10}$ и введем обозначение $a = \lg 2$. Получим уравнение $(t+a)t = 1-a$, $t^2+at-1+a=0$, корни которого $t \in \{-1;\ 1-a\}$, Выполним обратную замену $\lg\dfrac{x}{10} \in \{-1;\ 1-a\}$, $\dfrac{x}{10} \in \{10^{-1};\ 10^{1-\lg 2}\}$, $x \in \{1;\ 10^{1+\lg 5}\}$, таким образом, ответ $x \in \{1;\ 50\}$. ■

1524. Больший корень уравнения $(\star)$ $x^{\frac{1}{3}\log_5(8\sqrt[3]{x})} = 16\sqrt[9]{x^4}$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x \in \{2^{-3};\ 5^4\}$.

Решение. Так как в ОДЗ $x > 0$, левая и правая части $(\star)$ положительные числа, то при логарифмировании по основанию 5 получится равносильное уравнение $\log_5 x\cdot\dfrac{1}{3}\log_5(8\sqrt[3]{x}) = \log_5 16 + \dfrac{4}{9}\log_5 x$. Выполним замену $t = \log_5 x$, $b = \log_5 2$, получим $\dfrac{1}{3}t(3b+\dfrac{1}{3}t) = 4b+\dfrac{4}{9}t$, $\dfrac{1}{9}t^2+\dfrac{1}{3}\left(3b-\dfrac{4}{3}\right)t-4b=0$, приведенное квадратное уравнение имеет вид $t^2+(9b-4)t-36b=0$. Его корни равны $t \in \{-9b;\ 4\}$, поэтому $\log_5 x \in \{-9b;\ 4\}$, $x \in \{5^{-9\log_5 2};\ 5^4\}$. $x \in \{2^{-9};\ 5^4\}$. ■

1525. Решите уравнение $x^{\log_5(8x)} = 16\sqrt[3]{x^4}$.

Решение. $\log_5 x \cdot \log_5(8x) = \log_5 16 + \dfrac{4}{3}\log_5 x.$

$t = \log_5 x,\ b = \log_5 2: \quad t(3b+t) = 4b + \dfrac{4}{3}t, \quad t^2 + \left(3b - \dfrac{4}{3}\right)t - 4b,$

$t \in \{-3b;\ 4/3\},\ \ x \in \{2^{-3};\ 5^{4/3}\}.$ ■

1526. Сумма всех различных корней уравнения
$(\star)\ 15^{\log_5 3} = x^{\log_5\left(\frac{45}{x}\right)}$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$ ♦ $x \in \{3;\ 15\}$.

Решение. Если неизвестная величина x находится в ОДЗ, $x > 0$, то левая и правая части $(\star)$ положительны, поэтому при логарифмировании уравнения по основанию 5 получится равносильное уравнение
$\log_5(3) \cdot \log_5(15) = \log_5 \frac{45}{x} \cdot \log_5 x$. Выполним замену
$t = \log_5 x,\ b = \log_5 3,$ получим уравнение $b(b+1) = (2b+1-t)t$, после приведения подобных получим квадратное уравнение
$t^2 - (2b+1)t + b(b+1) = 0,$ корни которого $t \in \{b;\ b+1\}$. Выполняем обратную замену, $\log_5 x \in \{\log_5 3;\ \log_3 15\},\ \ x \in \{3;\ 15\}$.
■

1527. Решите неравенство $x^2 - 4x - 5 \leqslant 4$.
♦ $x \in [2 - \sqrt{13};\ 2 + \sqrt{13}]$.

Решение. $x^2 - 4x - 5 \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 13 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leqslant 13 \Leftrightarrow -\sqrt{13} \leqslant x - 2 \leqslant \sqrt{13} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{13} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{13}.$
■

1528. Решите неравенство $0 < x^2 - 4x - 5 \leqslant 4$.
♦ $x \in [2 - \sqrt{13};\ -1) \bigcup (5;\ 2 + \sqrt{13}]$.

Решение. $0 < x^2 - 4x - 5 \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-5) > 0, \\ x^2 - 4x - 9 \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\star)\ \begin{cases} x < -1 \bigcup 5 < x, \\ 2 - \sqrt{13} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{13}. \end{cases}$ Так как $2 - \sqrt{13} < -1$ и $2 + \sqrt{13} > 5$,

$(\star) \Leftrightarrow x \in [2-\sqrt{13};\ -1) \bigcup (5;\ 2+\sqrt{13}]$. ■

1529. Решите неравенство $\log_2(x^2-4x-5) \leqslant 2$.

♦ $x \in [2-\sqrt{13};\ -1) \bigcup (5;\ 2+\sqrt{13}]$.

Решение. $\log_2(x^2-4x-5) \leqslant 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-4x-5) \leqslant \log_2 4 \Leftrightarrow 0 < x^2-4x-5 \leqslant 4$. Далее решение предыдущей задачи. ■

17.3.1. Иррациональные уравнения и неравенства

1530. Решите уравнение $(\star)\ \ \log_5 x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} = -2$.

♦ $x = \frac{1}{25}$.

Решение. В ОДЗ $x \geqslant 0$, поэтому $(\star)$ равносильно $\log_5 x \cdot \sqrt{2\log_x(5)+2} = -2$. Выполним замену $t = \log_5 x$, $t\sqrt{\dfrac{2}{t}+2} = -2$, $\begin{cases} t^2 \cdot \frac{2+2t}{t} = 4, \\ t < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t\cdot(t+1) = 2, \\ t < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t \in \{-2;\ 1\}, \\ t < 0, \end{cases}$ $t = -2$, $x = 5^{-2}$. ■

1531. Решите неравенство $\log_5 x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \geqslant -2$.

Решение. $\log_5 x \cdot \sqrt{2\log_x(5)+2} \geqslant -2$, $t = \log_5 x$, $t \cdot \sqrt{\dfrac{2}{t}+2} \geqslant -2$, $t \in [-2;\ -1] \bigcup (0;\ +\infty)$, $x \in [0,04;\ 0,2] \bigcup (1;\ +\infty)$. ■

17.4. Однородные и приводящиеся к однородным

1532. Сумма всех различных корней уравнения $\left[\log_3(\frac{18x}{17}-9)\right]^2 - 3\log_3(\frac{18x}{17}-9)\cdot\log_3(\frac{x}{17}+4) + 2\left[\log_3(\frac{x}{17}+4)\right]^2 = 0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{3}}$♦ $x \in \{13;\ 85\}$.

Решение. Выполним замену $u = \log_3(\frac{18x}{17} - 9)$, $v = \log_3(\frac{x}{17} + 4)$, получим однородное уравнение второй степени $u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$. Рассматривая его как квадратное уравнение относительно u с параметром v, найдем два корня, $u \in \{v;\ 2v\}$.

(1) $u = v$, $\log_3(\frac{18x}{17} - 9) = \log_3(\frac{x}{17} + 4)$, $\begin{cases} \frac{18x}{17} - 9 = \frac{x}{17} + 4, \\ \frac{x}{17} + 4 > 0, \end{cases}$ $x = 17$,

(2) $u = 2v$, $\log_3(\frac{18x}{17} - 9) = 2\log_3(\frac{x}{17} + 4)$, $\begin{cases} \frac{18x}{17} - 9 = (\frac{x}{17} + 4)^2, \\ \frac{x}{17} + 4 > 0, \end{cases}$

$(\frac{x}{17})^2 + 8\frac{x}{17} + 16 - \frac{18x}{17} + 9 = 0$, $\frac{x^2}{17^2} - \frac{10x}{17} + 25 = 0$, $x = 17 \cdot 5$. ■

1533. Сумма всех различных корней уравнения $\lg^2(4-x)+\lg(4-x)\cdot\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ $x \in \{0;\ \frac{5}{2} \pm \sqrt{2}\}$.

Решение. $u = \lg(4 - x)$, $v = \lg\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$,

$u^2 + uv - 2v^2 = 0$, $\dfrac{u}{v} = \{1;\ -2\}$. $a)$ $\lg(4 - x) = \lg(x + 0,5)$,

$4 - x = x + 0,5 \bigcap 4 - x > 0$, $x = 1,75$.

$b)$ $\lg(4 - x) + 2\lg(x + 0,5) = 0$, $\begin{cases} (4 - x)(x + 0,5)^2 = 1 \\ 4 - x > 0 \\ x + 0,5 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x^3 + 20x^2 - 17x = 0 \\ x < 4 \\ x > -0,5, \end{cases}$ $\begin{cases} x(4x^2 - 20x + 17) = 0 \\ x \in (-0,5;\ 4), \end{cases}$

$x \in \{0;\ \dfrac{5}{2} \pm \sqrt{2}\}$. ■

1534. Решите уравнение
$\log_7(3 - 2x) \cdot \log_x(3 - 2x) = \log_7(3 - 2x) + \log_7 x^2$.

Решение. $\log_7(3 - 2x) \cdot \log_x 7 \cdot \log_7(3 - 2x) = \log_7(3 - 2x) + 2\log_7 x$, условие $x > 0$ можно не дописывать, $u = \log_7(3 - 2x)$, $v = \log_7 x$, $u \cdot v^{-1} \cdot u = u + 2v$,

$u^2 = uv + 2v^2,\quad \dfrac{u}{v} \in \{-1;\,2\},\quad a)\quad u/v = -1,\quad u = -v,$ $\begin{cases} (3-2x)x = 1, \\ x > 0 \bigcap x \neq 1, \\ 3 - 2x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \{0,5;\,1\}, \\ x > 0 \bigcap x \neq 1, \\ 3 - 2x > 0, \end{cases}$ $x = 0,5,\quad b)\quad u/v = 2,$ $u = 2v,$ $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ x > 0 \bigcap x \neq 1, \\ 3 - 2x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \{1;\,-3\}, \\ x > 0 \bigcap x \neq 1, \\ 3 - 2x > 0, \end{cases}$ $x \in \emptyset,$ Ответ: $x = 0,5.$ ■

1535. Решите уравнение $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) = x + \log_5 13.$

Решение. $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) = \log_5(13\cdot 5^x),$ $3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1} = 13\cdot 5^x,$ $6\cdot 2^{2x} - 13\cdot 2^x\cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} = 0,$ $6\cdot (2/5)^{2x} - 13\cdot (2/5)^x\cdot 5^x - 5 = 0,$ $6t^2 - 13t - 5 = 0,$ $t \in \{-1/3;\,5/2\},$ $(2/5)^x = 5/2,$ $x = -1.$ ■

1536. Решите неравенство $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) \geqslant x + \log_5 13.$

Решение. $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) \geqslant \log_5(13\cdot 5^x),$ $3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1} \geqslant 13\cdot 5^x,$ $6\cdot 2^{2x} - 13\cdot 2^x\cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} \geqslant 0,$ $6\cdot (2/5)^{2x} - 13\cdot (2/5)^x\cdot 5^x - 5 \geqslant 0,$ $6t^2 - 13t - 5 \geqslant 0,$ $t \in (-\infty;\,-1/3] \bigcup [5/2;\,+\infty),$ $(2/5)^x \geqslant 5/2,$ $x \leqslant -1.$ ■

1537. Решите неравенство $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) \leqslant x + \log_5 13.$

Решение. $\log_5\left(3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right) \leqslant \log_5(13\cdot 5^x),$ $0 < 3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1} \leqslant 13\cdot 5^x,$ Решаем сначала правую часть неравенства: $6\cdot 2^{2x} - 13\cdot 2^x\cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} \leqslant 0,$ $6\cdot (2/5)^{2x} - 13\cdot (2/5)^x\cdot 5^x - 5 \leqslant 0,$ $6t^2 - 13t - 5 \leqslant 0,$ $t \in [-1/3;\,5/2],$ $(2/5)^x \leqslant 5/2,$ $x \geqslant -1.$ Теперь решаем левую часть: $3\cdot 2^{1+x} - 2^{-x}\cdot 5^{2x+1} > 0,$ $6\cdot 2^{2x} > 5\cdot 5^{2x},$ $\dfrac{6}{5} > \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x},$

$3 > \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}$, $2x+1 < \log_{2,5} 3$, $x < \frac{\log_{2,5} 3 - 1}{2}$, $x < \frac{\log_{2,5} 1,2}{2}$,
$x < \log_{2,5} \sqrt{1,2}$, Ответ: $x \in [-1;\ \log_{2,5} \sqrt{1,2})$. ■

1538. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}\cdot\sin x}(1+\cos x) = 2$.

Решение. $\log_{\sqrt{2}\cdot\sin x}(1+\cos x) = \log_{\sqrt{2}\cdot\sin x}(\sqrt{2}\cdot\sin x)^2$,
$\begin{cases} 1+\cos x = 2\sin^2 x, \\ \sqrt{2}\sin x > 0, \\ \sqrt{2}\sin x \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \in \{-1;\ 0,5\}, \\ \sqrt{2}\sin x > 0, \\ \sqrt{2}\sin x \neq 1, \end{cases}$
$x = \pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

1539. Решите уравнение $\log_5\left(-x^7\right) + 2 = \log_{25} x^2$.

Решение. $\log_5(-25x^7) = \log_5|x|$, $\begin{cases} |x| = -25x^7, \\ x < 0, \end{cases}$ $x = -5^{-1/3}$.
■

1540. Решить неравенство: $\frac{(\log_3 x - 1)(\log_2 x - 2)(x^2-9)}{x^2-1} \geqslant 0$.♦ $x \in (0;\ 1) \bigcup \{3\} \bigcup [4;\ +\infty)$.

17.5. Показательно-логарифмические уравнения и неравенства

1541. Решите уравнение $2^{\log_2 \sin x} + 3^{\log_3 \cos x} = -1$. ♦ Нет решений.

Решите уравнение $(\star)$ $\log_5\left(7 + 3\cdot 5^{-x}\right) = x+1$.
$(\star)$ $\Leftrightarrow$ $(\star\star)$ $\log_5\left(7 + 3\cdot 5^{-x}\right) = \log_5\left(5^{x+1}\right)$
Так как для всех x верны неравенства $7 + 3\cdot 5^{-x} > 0$ и $5^{x+1} > 0$, то $(\star\star) \Leftrightarrow 7 + 3\cdot 5^{-x} = 5^{x+1}$. Выполним замену $5^x = t$, причем $t > 0$.

$$(\star\star) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7 + 3t^{-1} = 5t, \\ t > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-5t^2 + 7t + 3}{t} = 0, \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2 - 7t - 3 = 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{7 \pm \sqrt{109}}{10}, \\ t > 0. \end{cases}$$ Так как $7^2 < 109$,

то $7-\sqrt{109}<0$. Поэтому $(\star\star) \Leftrightarrow t=\dfrac{7+\sqrt{109}}{10} \Leftrightarrow 5^x=\dfrac{7+\sqrt{109}}{10}$
$\Leftrightarrow x=\log_5 \dfrac{7+\sqrt{109}}{10}$.

Решите уравнение $(\star)$ $\log_2(4\cdot 3^x-9)-\log_2(9^x-6)=1$.

Решение $(\star) \Leftrightarrow \log_2(4\cdot 3^x-9)=\log_2(9^x-6)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(4\cdot 3^x-9)=\log_2(2\cdot 9^x-12)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\cdot 3^x-9=2\cdot 9^x-12,\\ 4\cdot 3^x-9>0,\\ 2\cdot 9^x-12>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\cdot 3^x-9=2\cdot 9^x-12,\\ 3^x>\dfrac{9}{4},\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot\left(3^x\right)^2-4\cdot 3^x-3=0,\\ 3^x>\dfrac{9}{4},\end{cases}$$

$3^x=t$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2t^2-4t-3=0,\\ t>\dfrac{9}{4},\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2},\\ t>\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

(1) $\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\bigvee\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{10}\bigvee 9$

$\Leftrightarrow -5<2\sqrt{10}$

не годится

(2) $\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\bigvee\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{10}\bigvee 9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{10} \bigvee 5$
$\Leftrightarrow 40 > 25$
годится

Ответ: $x = \log_3 \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

1542. Один из корней уравнения $(\star)$ $5 \cdot x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} = 24$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $x = 9$.

Решение. Применим тождество $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ к левой части $(\star)$,
$x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$, получим равносильное уравнение $6 \cdot 2^{\log_3 x} = 24$. Разделим обе части на 6, получим равносильное уравнение $2^{\log_3 x} = 4$. Логарифмируя по основанию 2, получим $\log_3 x = 2$, поэтому единственный корень $x = 9$. ■

1543. Один из корней уравнения $(\star)$ $2^{\log_3(x^2)} \cdot 5^{\log_3 x} = 8000$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x = 27$.

Решение. Для данного уравнения ОДЗ $x > 0$, внутри ОДЗ тождественно $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$, поэтому $(\star)$ равносильно каждому из уравнений **(1)** $2^{2\log_3(x)} \cdot 5^{\log_3 x} = 8000$, **(2)** $4^{\log_3(x)} \cdot 5^{\log_3 x} = 8000$, **(3)** $20^{\log_3(x)} = 20^3$, **(4)** $\log_3 x = 3$, **(5)** $\log_3 x = \log_3 3^3$, поэтому единственный корень $x = 3^3$. ■

1544. Все решения неравенства $2^{\log_3(x^2)} \cdot 5^{\log_3 x} \leqslant 8000$ образуют промежуток, длина которого равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $x \in (0;\ 27]$.

Решение. Логарифмируем: $\log_3 2 \cdot 2\log_3(x) + \log_3 5 \cdot \log_3 x \leqslant \log_3 8000$, $(\log_3(x)) \cdot (2\log_3 2 + \log_3 5) \leqslant \log_3 8000$,

$(\log_3(x))\cdot(\log_3 20)\leqslant \log_3 8000$, $\log_3(x)\leqslant \log_{20} 8000$, $\log_3(x)\leqslant 3$, $\log_3(x)\leqslant \log_3 3^3$, $0<x\leqslant 27$. ■

1545. Решите уравнение $x\cdot 3^{\log_{(1/9)}(16x^4-x^2+1)}=\dfrac{1}{3}$

♦ $x\in\{1/\sqrt{8};\ 1/\sqrt{2}\}$.

Решение. Заметим, что $x>0$, $16x^4-x^2+1>0$ (тождественно). Тогда $x\cdot 3^{\log_3\left[\left(\sqrt{16x^4-x^2+1}\right)^{-1}\right]}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4-x^2+1}}=\dfrac{1}{3}$, $9x^2=16x^4-x^2+1$, $x^2\in\{1/2;\ 1/8\}$, $x\in\{1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{8}\}$. ■

1546. Решите неравенство $x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}(16x^4-x^2+1)}\geqslant\dfrac{1}{3}$

♦ $x\in[1/\sqrt{8};\ 1/\sqrt{2}]$.

Решение. $x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{16x^4-x^2+1}}\geqslant\dfrac{1}{3}$, $x\cdot\left(\sqrt{16x^4-x^2+1}\right)^{-1}\geqslant\dfrac{1}{3}$, $\forall x\Rightarrow 16x^4-x^2+1>0$, $3x\geqslant\sqrt{16x^4-x^2+1}$, $9x^2\geqslant 16x^4-x^2+1$, $x\in[1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{8}]$. ■

1547. Решите неравенство $x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}(16x^4-x^2+1)}\leqslant\dfrac{1}{3}$

♦ $x\in(-\infty;\ 1/\sqrt{8}]\bigcup[1/\sqrt{2};\ +\infty)$.

Решение. $x\cdot\left(\sqrt{16x^4-x^2+1}\right)^{-1}\leqslant\dfrac{1}{3}$, $3x\leqslant\sqrt{16x^4-x^2+1}$,

$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;\ 0],\\ \begin{cases} x\in(0;\ +\infty),\\ 9x^2\geqslant 16x^4-x^2+1.\end{cases}\end{array}\right.$$ ■

1548. Решите уравнение $x^{2+\log_2 x}=256$.

♦ $x\in\{1/16;\ 4\}$.

Решение. $\log_2 x\cdot(2+\log_2 x)=\log_2 256$, $t=\log_2 x$, $t^2+2t-8=0$, $t\in\{-4;\ 2\}$, $x\in\{2^{-4};\ 2^2\}$. ■

1549. Решите неравенство $x^{2+\log_2 x}\geqslant 256$

♦ $x\in(0;\ 1/16]\bigcup[4;\ +\infty)$.

Решение. $\log_2 x \cdot (2 + \log_2 x) \geqslant \log_2 256$, $t = \log_2 x$, $t^2 + 2t - 8 \geqslant 0$, $t \in (-\infty;\ -4] \bigcup [2;\ +\infty)$, $\log_2 x \in (-\infty;\ -4] \bigcup [2;\ +\infty)$, $x \in (0;\ 2^{-4}] \bigcup [2^2;\ +\infty)$. ■

1550. Решите уравнение $x^{\log_4 x} = 64x^2$.

♦ $x \in \{0,25;\ 64\}$.

Решение. $t = \log_4 x$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t \in \{-1;\ 3\}$. ■

1551. Решите неравенство $x^{\log_4 x} \geqslant 64x^2$.

♦ $x \in (0;\ 0,25] \bigcup [64;\ +\infty)$.

Решение. $t = \log_4 x$, $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$, $t \in (-\infty;\ -1] \bigcup [3;\ +\infty)$, $x \in (0;\ 4^{-1}] \bigcup [4^3;\ +\infty)$. ■

17.5.1. Метод введения параметра

1552. Решите уравнение $x^{\log_5(8x)} = 16 \cdot \sqrt[3]{x^4}$.

♦ $x \in \{1/8;\ 5^{4/3}\}$.

Решение. $t = \log_5 x$, $b = \log_5 2$, логарифмируем по основанию 5: $t^2 - \left(\dfrac{4}{3} - 3b\right) t - 4b = 0$, $t \in \{\dfrac{4}{3};\ -3b\}$, $x \in \{5^{-3\log_5 2};\ 5^{4/3}\}$. ■

1553. Решите неравенство $x^{\log_5(8x)} \geqslant 16 \cdot \sqrt[3]{x^4}$

♦ $x \in (0;\ 0,125] \bigcup [5\sqrt[3]{5};\ +\infty)$.

Решение. $t = \log_5 x$, $b = \log_5 2$, логарифмируем по основанию 5: $t^2 - \left(\dfrac{4}{3} - 3b\right) t - 4b \geqslant 0$, $t \in (-\infty;\ -3b] \bigcup [\dfrac{4}{3};\ +\infty)$, $\log_5 2 \in (-\infty;\ -3\log_5 2] \bigcup [\dfrac{4}{3};\ +\infty)$, $x \in (0;\ 2^{-3}] \bigcup [5^{4/3};\ +\infty)$. ■

17.5.2. Преобразование $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

1554. Решите уравнение $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$

♦ $x = 10$.

Решение. $x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$, $5^{2\lg x} - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$, $5^{\lg x} \in \{-1; 5\}$, $5^{\lg x} = 5$, $\lg x = 1$, $x = 10$. ■

1555. Решите уравнение $x^{\log_3 x} = 7^{\log_x 7}$

♦ $x = 7^{\sqrt[3]{\log_7(3)}}$.

Решение. $\log_3\left(x^{\log_3 x}\right) = \log_3\left(7^{\log_x 7}\right)$, $(\log_3 x)^2 = \log_3 7 \cdot \log_x 7$, $(\log_3 x)^2 = \log_3 7 \cdot \log_x 3 \cdot \log_3 7$, $(\log_3 x)^3 = (\log_3 7)^2$, $\log_3 x = (\log_3 7)^{2/3}$, $x = 3^{(\log_3 7)^{2/3}}$ $x = 3^{\log_3 7 \cdot (\log_3 7)^{-1/3}}$, $x = 7^{(\log_3 7)^{-1/3}}$, $x = 7^{(\log_7 3)^{1/3}}$ ■

1556. Решите неравенство $x^{\log_3 x} \geqslant 7^{\log_x 7}$.

♦ $x \in (0; 1) \bigcup [7^{\sqrt[3]{\log_7(3)}}; +\infty)$.

Решение. $\log_3\left(x^{\log_3 x}\right) \geqslant \log_3\left(7^{\log_x 7}\right)$, $(\log_3 x)^2 \geqslant (\log_3 7)^2 \cdot \log_x 3$, $\dfrac{(\log_3 x)^3 - (\log_3 7)^2}{\log_3 x} \geqslant 0$, $\log_3 x \in (-\infty; 0) \cup \left[(\log_3 7)^{2/3}; +\infty\right)$, $x \in (0; 1) \bigcup \left[3^{(\log_3 7)^{2/3}}; +\infty\right)$. ■

17.5.3. Показательно - логарифмические уравнения с двумя основаниями

1557. Найдите сумму всех различных корней уравнения $3^x \cdot 7^{1/x} = 1234$.

♦ $x_1 + x_2 = \log_3(1234)$.

Решение. $x + \dfrac{1}{x} \cdot \log_3 7 = \log_3 1234$, $\dfrac{x^2 - \log_3 1234 \cdot x + \log_3 7}{x} = 0$, $\log_3 1234 > 4$, $\log_3 7 < 2$, $D = (\log_3 1234)^2 - 4\log_3 7 > 0$, $x_1 + x_2 = \log_3 1234$. ■

1558. Найдите такое $m \in \mathbf{Z}$, что сумма S всех различных корней уравнения $3^x \cdot 7^{1/x} = 1234$ удовлетворяет условию $S \in [m; m+1)$.

♦ $m = 6$; $x_1 + x_2 \in (6; 7)$.

Решение. Пусть $S \stackrel{\text{def}}{=\!=} x_1 + x_2 = \log_3 1234$, $S \in (\log_3 729;\ \log_3 2187)$, $S \in (\log_3 3^6;\ \log_3 3^7)$, $S \in (6;\ 7)$. ■

1559. Найдите такое $m \in \mathbf{Z}$, что сумма S всех различных корней уравнения $3^x \cdot 7^{1/x} = 1234$ удовлетворяет условию $S \in \left[\frac{m}{2};\ \frac{m+1}{2}\right)$.

♦ $m = 12$; $x_1 + x_2 \in (6;\ 6,5)$.

Решение. $x_1 + x_2 = \log_3 1234$, $x_1 + x_2 \in (\log_3 3^6;\ \log_3 3^7)$, $\frac{1234}{729} < 1,7$, $\sqrt{3} > 1,7$, $\log_3 1234 < \log_3(729 \cdot \sqrt{3})$, $1234 = \frac{1234}{729} \cdot 729 < \sqrt{3} \cdot 729$, $1234 < 3^6 \cdot \sqrt{3}$, $\log_3 1234 < \log_3(3^6 \cdot \sqrt{3})$, $\log_3 1234 < 6,5$, $\frac{12}{2} < \log_3 1234 < \frac{13}{2}$. ■

1560. Найдите произведение всех различных корней уравнения $3^x \cdot 7^{1/x} = 1234$

♦ $x_1 \cdot x_2 = \log_3(7)$.

1561. Решите уравнение $3^x \cdot 27^{1/x} = 81$

♦ $x \in \{1;\ 3\}$.

1562. Решите неравенство $3^x \cdot 27^{1/x} \leqslant 81$

♦ $x \in (-\infty;\ 0) \bigcup [1;\ 3]$.

1563. Решите уравнение $3^x \cdot 243^{-1/x} = 81$

♦ $x \in \{-1;\ 5\}$.

1564. Решите неравенство $3^x \cdot 243^{-1/x} \leqslant 81$

♦ $x \in (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ 5]$.

1565. Решите уравнение $3^{\log_2 x} \cdot 243^{\log_x(0,5)} = 81$.

♦ $x \in \{0,5;\ 32\}$.

Решение. $3^{\log_2 x} \cdot 3^{-5/\log_2 x} = 3^4$, $t = \log_2 x$, $t \in \{-1;\ 5\}$, $\log_2 x \in \{-1;\ 5\}$. ■

1566. Решите неравенство $3^{\log_2 x} \cdot 243^{\log_x(0,5)} \leqslant 81$
♦ $x \in (0;\ 0,5] \bigcup (1;\ 32]$.

Решение. $\frac{t^2-4t-5}{t} \leqslant 0, \quad t \in (-\infty;\ -1] \bigcup (0;\ 5]$. ■

1567. Если число П равно произведению всех различных корней уравнения $(\star)\ 3^{\log_2 x} \cdot 7^{\log_x(0,5)} = 1234$, то

$\boxed{1}$ П $\in (0;\ 1)$ $\boxed{2}$ П $\in [1;\ 4)$ $\boxed{3}$ П $\in [4;\ 16)$ $\boxed{4}$ П $\in [16;\ 64)$
$\boxed{5}$ П $\in [64;\ 999999)$

Ответ $\boxed{5}$♦ $x_1 \cdot x_2 = 2^{\log_3(1234)} \in (64;\ 128)$.

Решение. Выполним замену $t = \log_2 x$, получим уравнение $\dfrac{t^2 - t \cdot \log_3(1234) - \log_3 7}{t} = 0$, равносильное квадратному уравнению
$(\star\star)\ t^2 - t \cdot \log_3(1234) - \log_3 7 = 0$, сумма и произведение корней которого равны соответственно $t_1 + t_2 = \log_3 1234$, $t_1 \cdot t_2 = -\log_3 7$. Для вычисления произведения корней уравнения $(\star)$ используем сумму корней уравнения $(\star\star)$, $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_3 1234$, $\log_2(x_1 x_2) = \log_3 1234$, $x_1 \cdot x_2 = 2^{\log_3 1234} \in (64;\ 128)$. ■

1568. Найдите сумму двух наименьших положительных корней уравнения $3^{\operatorname{tg} x} \cdot 7^{\operatorname{ctg} x} = 1234$.
♦ $x_1 + x_2 = \pi - \operatorname{arctg}(\log_{(7/3)} 1234)$.

Решение. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \log_3(1234) + \log_3 7}{\operatorname{tg} x} = 0$,
$\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 = \log_3 1234$, $\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 = \log_3 7$,
$\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \dfrac{\log_3 1234}{1 - \log_3 7}$, $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\log_3 1234}{\log_3(3/7)} = -\log_{\frac{7}{3}} 1234$. ■

1569. Найдите сумму корней уравнения $3^{2^x} \cdot 7^{2^{-x}} = 1234$.
♦ $x_1 + x_2 = \log_2[\log_3(7)]$.

Решение. $\dfrac{2^{2x} - 2^x \cdot \log_3(1234) + \log_3 7}{2^x} = 0$,
$2^{2x} - 2^x \cdot \log_3(1234) + \log_3 7 = 0$, $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = \log_3 7$, $2^{x_1+x_2} = \log_3 7$, $x_1 + x_2 = \log_2[\log_3(7)]$. ■

1570. Решите уравнение $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} = 17$.

♦ $x \in \{0,25;\ 1;\ 4\}$.

Решение. $x^{\log_2 x} + 16\left(x^{\log_2 x}\right)^{-1} = 17$, $t = x^{\log_2 x}$,
$t + 16 \cdot t^{-1} = 17$, $\dfrac{t^2 - 17t + 16}{t} = 0$, $t \in \{1;\ 16\}$,
(1) $x^{\log_2 x} = 1$, $(\log_2 x)^2 = 0$, $\log_2 x = 0$, $x = 1$.
(2) $x^{\log_2 x} = 16$, $(\log_2 x)^2 = 4$, $\log_2 x = \pm 2$, $x = 2^{\pm 2}$. ■

1571. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} \leqslant 17$.
♦ $x \in [0,25;\ 4]$.

Решение. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot \left(x^{\log_2 x}\right)^{-1} \leqslant 17$, $t = x^{\log_2 x}$,
$\dfrac{t^2 - 17t + 16}{t} \leqslant 0$, $t \in (-\infty;\ 0) \bigcup [1;\ 16]$,
(1) $x^{\log_2 x} < 0$, $x \in \emptyset$,
(2) $x^{\log_2 x} \in [1;\ 16]$, $(\log_2 x)^2 \in [0;\ 4]$, $\log_2 x \in [-2;\ 2]$, $x \in [0,25;\ 4]$.
■

1572. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17$.
♦ $x \in (0,25;\ 1) \bigcup (1;\ 4)$.

Решение. $\frac{t^2 - 17t + 16}{t} < 0$, $t \in (-\infty;\ 0) \bigcup (1;\ 16)$,
(1) $x^{\log_2 x} < 0$, $x \in \emptyset$,
(2) $x^{\log_2 x} \in (1;\ 16)$, $(\log_2 x)^2 \in (0;\ 4)$, $\log_2 x \in (-2;\ 0) \bigcup (0;\ 2)$. ■

1573. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} \geqslant 17$.
♦ $x \in (0;\ 0,25] \bigcup \{1\} \bigcup [4;\ +\infty)$.

Решение. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot \left(x^{\log_2 x}\right)^{-1} \geqslant 17$, $t = x^{\log_2 x}$,
$t + 16 \cdot t^{-1} \geqslant 17$, $\dfrac{t^2 - 17t + 16}{t} \geqslant 0$, $t \in (0;\ 1] \bigcup [16;\ +\infty)$,
(1) $0 < x^{\log_2 x} \leqslant 1$, $(\log_2 x) \leqslant 0$, $\log_2 x = 0$, $x = 1$.
(2) $x^{\log_2 x} \in [16;\ +\infty), \ldots$ ■

1574. Решите уравнение $x^{\log_2 x} + 256 \cdot x^{-\log_2 x} = 68$.
♦ $x \in \{2^{\pm\sqrt{2}};\ 2^{\pm\sqrt{8}}\}$.

1575. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 256 \cdot x^{-\log_2 x} \leqslant 68$.

♦ $x \in (2^{-\sqrt{8}};\ 2^{-\sqrt{2}}) \bigcup (2^{\sqrt{2}};\ 2^{\sqrt{8}})$.

1576. Решите уравнение $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$.
♦ $x \in \{0,01;\ 0,1;\ 10;\ 100\}$.

1577. Решите неравенство $x^{\lg^3 x - 5\lg x} \geqslant 0{,}0001$.
♦ $x \in (0;\ 0,01] \bigcup [0,1;\ 10] \bigcup [100;\ +\infty)$.

1578. Решите уравнение $10^{\sqrt{\lg x}} + x^{\sqrt{\log_x 10}} = 200$.
♦ $x = 10000$.

Решение. $x^{\sqrt{\log_x 10}} = x^{\log_x 10 \cdot \sqrt{\log_{10} x}} = 10^{\sqrt{\log_{10} x}}$, $10^{\sqrt{\lg x}} = 100$, $\sqrt{\lg x} = 2$, $\lg(x) = 4$. ■

1579. Решите уравнение $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.
♦ $x \in \{3;\ -\log_5 2\}$.

1580. Решите неравенство $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} \leqslant 500$.
♦ $x \in (-\infty;\ -\log_5 2] \bigcup (0;\ 3]$.

17.5.4. Уравнения со сложной степенью

1581. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения
$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$, то
$\boxed{1}$ $S \in (0;\ 1{,}1)$ $\boxed{2}$ $S \in [1{,}1;\ 3{,}3)$ $\boxed{3}$ $S \in [3{,}3;\ 6{,}5)$
$\boxed{4}$ $S \in [6{,}5;\ 7{,}7)$ $\boxed{5}$ $S \in [7{,}7;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x \in \{\frac{1}{6};\ 6\}$.

Решение. $6^{\log_6^2 x} = 6^{\log_6(x)\cdot\log_6(x)} = x^{\log_6 x}$, $2x^{\log_6 x} = 12$, $(\log_6 x)^2 = 1$, $\log_6 x = \pm 1$, $x \in \{\dfrac{1}{6};\ 6\}$. ■

1582. Множество всех решений неравенства $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leqslant 12$ совпадает с промежутком, длина которого равна
$\boxed{1}$ 6,1(6) $\boxed{2}$ 5,8(3) $\boxed{3}$ 5,1(6) $\boxed{4}$ 12 $\boxed{5}$ 18

Ответ $\boxed{2}$♦ $x \in [\frac{1}{6};\ 6]$.

Решение. $6^{\log_6^2 x} = 6^{\log_6(x)\cdot\log_6(x)} = x^{\log_6 x}$, $2x^{\log_6 x} \leqslant 12$, $(\log_6 x)^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant \log_6 x \leqslant 1$, $\dfrac{1}{6} \leqslant x \leqslant 6$. ■

1583. Решите уравнение $100^{\lg^2 x} - 9\cdot x^{\lg x} = 10$.

♦ $x \in \{0{,}1;\ 10\}$.

Решение. $100^{\lg^2 x} = 10^{2\cdot\lg x\cdot\lg x}$, $x^{2\lg x} - 9\cdot x^{\lg x} - 10 = 0$, $x^{\lg x} \in \{-1;\ 10\}$, $(\lg x)^2 = 1$, $\lg x = \pm 1$, $x \in \{0{,}1;\ 10\}$. ■

1584. Решите неравенство $100^{\lg^2 x} - 9\cdot x^{\lg x} \leqslant 10$

♦ $x \in [0,1;\ 10]$.

Решение. $x^{2\lg x} - 9\cdot x^{\lg x} - 10 \leqslant 0$, $x^{\lg x} \in [-1;\ 10]$, $x^{\lg x} \in (0;\ 10]$, $(\lg x)^2 \in (-\infty;\ 1]$, $(\lg x)^2 \in [0;\ 1]$, $\lg x \in [-1;\ 1]$, $x \in [0,1;\ 10]$. ■

1585. Решите уравнение $(\star)$ $4^{\log_2^2(4x)} + 3\cdot(4x)^{\log_2(4x)} = 10$.

♦ $x \in \{\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{2}\}$.

Решение. Уравнение $(\star)$ равносильно квадратному показательно-логарифмическому уравнению $\left((4x)^{\log_2(4x)}\right)^2 + 3\cdot(4x)^{\log_2(4x)} - 10 = 0$, корни которого $(4x)^{\log_2(4x)} \in \{-5;\ 2\}$. Отрицательное значение показательной функции невозможно, поэтому $(4x)^{\log_2(4x)} = 2$, $(\log_2(4x))^2 = 1$, $\log_2(4x) = \pm 1$, $4x \in \{\dfrac{1}{2};\ 2\}$, $x \in \{\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{2}\}$. ■

1586. Решите уравнение $4^{\log_2^2(4x)} - 18\cdot(4x)^{\log_2(4x)} + 32 = 0$

♦ $x \in \{0,0625;\ 0,125;\ 0,5;\ 1\}$.

Решение. $\left((4x)^{\log_2(4x)}\right)^2 - 18\cdot(4x)^{\log_2(4x)} + 32 = 0$, $(4x)^{\log_2(4x)} \in \{2;\ 16\}$, $a)$ $(4x)^{\log_2(4x)} = 2$, $(\log_2(4x))^2 = 1$, $\log_2(4x) = \pm 1$, $4x \in \{0,5;\ 2\}$, $x \in \{0,125;\ 0,5\}$. $b)$ $(4x)^{\log_2(4x)} = 16$, $(\log_2(4x))^2 = 4$, $\log_2(4x) = \pm 2$, $4x \in \{0,25;\ 4\}$, $x \in \{2^{-4};\ 1\}$. ■

1587. Решите неравенство $4^{\log_2^2(4x)} + 18\cdot(4x)^{\log_2(4x)} + 32 \geqslant 0$

♦ $x \in (0;\ 0,0625] \bigcup [0,125;\ 0,5] \bigcup [1;\ \infty)$.

1588. Решите уравнение $5^{\log_2 x} + 2 \cdot x^{\log_2 5} = 15$,
♦ $x = 2$.
Решение. $3 \cdot 5^{\log_2 x} = 15$, $5^{\log_2 x} = 5$, $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ■

1589. Решите неравенство $5^{\log_2 x} + 2 \cdot x^{\log_2 5} \leqslant 15$
♦ $x \in (0;\ 2]$.

1590. Решите уравнение $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5(45x)} = 1$,
♦ $x \in \{1/3;\ 1/15\}$.
Решение. $\log_5 15 \cdot \log_5 3 + \log_5 x \cdot \log_5(45x) = 0$, $\log_5 x = t$, $\log_5 3 = b$, $(b+1)b + t(t+1+2b) = 0$, $t^2 + (2b+1)t + b^2 + b = 0$, $t^2 - (-b-b-1)t \quad +(-b)(-b-1) = 0$, $t \in \{-b;\ -b-1\}$, $x \in \{3^{-1};\ (15)^{-1}\}$. ■

1591. Решите неравенство $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5(45x)} \geqslant 1$.
♦ $x \in (0;\ 1/3] \bigcup [1/15;\ +\infty)$.

1592. Решите уравнение $x^{\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_5 x}} = \log_5 14$.
♦ $x = 14$.
Решение. Левая часть существует при условии $x > 1$. На этом множестве уравнение равносильно $x^{\log_x(\log_5 x)} = \log_5 14 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_5 x = \log_5 14, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 14$. ■

1593. Решите уравнение $x^{\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_5 x}} \leqslant \log_5 14$.
♦ $x \in (1;\ 14]$.
Решение. Левая часть существует при условии $x > 1$. На этом множестве неравенство равносильно $x^{\log_x(\log_5 x)} \leqslant \log_5 14 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_5 x \leqslant \log_5 14, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;\ 14]$. ■

1594. Решите уравнение $|\cos x|^{\sin^2 x - 1{,}5\sin x + 0{,}5} = 1$.
♦ $x = \pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

1595. Решите уравнение $\left(\log_2 x\right)^{\sin x} = \left(\log_x 2\right)^{-\cos x}$.

$\boxed{1}$ $2 \bigcup \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$ $\boxed{2}$ $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$
$\boxed{3}$ $\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$ $\boxed{4}$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$
$\boxed{5}$ $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Решение. $\begin{cases} \left(\log_2 x\right)^{\sin x} = \left(\log_2 x\right)^{\cos x}, \\ x \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\log_2 x\right)^{\sin x - \cos x} = 1, \\ x \neq 1, \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\log_2 x\right)^{\sin x - \cos x} = \left(\log_2 x\right)^{0}, \\ x \neq 1, \end{cases}$

(1) $\log_2 x = 1$, $x = 2$.

(2) $\begin{cases} \sin x - \cos x = 0, \\ x \in (0;\, 1) \bigcup (1;\, +\infty). \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$. ■

1596. Решите неравенство $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$

♦ $x \in (-\sqrt{2+\sqrt{3}};\, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \bigcup (-\sqrt{2-\sqrt{3}};\, 0) \bigcup (0;\, \sqrt{2-\sqrt{3}}) \bigcup (\sqrt{\frac{2}{3}};\, \sqrt{2+\sqrt{3}})$

17.6. Неизвестная величина в основании

1597. Решите уравнение $\log_{3x} x = \log_{9x} x$.

♦ $x = 1$.

Решение. $a)$ $\log_{3x} x = \log_{9x} x = 0$, $x = 1$.
$b)$ $\log_{3x} x = \log_{9x} x \neq 0$, $\frac{1}{\log_x 3x} = \frac{1}{\log_x 9x}$, $\frac{\log_x 9x - \log_x 3x}{\log_x 3x \cdot \log_x 9x} = 0$, $\dfrac{\log_x 3}{\log_x 3x \cdot \log_x 9x} = 0$. ■

1598. Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$

♦ $x = 1/25$.

1599. Решите уравнение $\log_{3x+7}(4x^2+12x+9) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$.

♦ $x = -1/4$.

Решение. $4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$, $6x^2+23x+21 = (3x+7)(2x+3)$, $\log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(3x+7)(2x+3) = 4$, $2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) + 1 =$

4, $\log_{3x+7}(2x+3)=t$, $\frac{2t^2-3t+1}{t}=0$, $t\in\{1;\,0,5\}$, $a)$ $\log_{3x+7}(2x+3)=1$, $3x+7=2x+3$, $x=-4$. не корень. $b)$ $\log_{3x+7}(2x+3)=\dfrac{1}{2}$, $2\log_{3x+7}(2x+3)=1$, $(2x+3)^2=3x+7$, $4x^2+9x+2=0$, $x\in\{-0,25;\,-2\}$, $x=-0,25$. ■

1600. Решите уравнение $\log_{2x+1}(-4x^2+8x+5)+\log_{5-2x}(4x^2+4x+1)=$
♦ $x=1/2;\,1$.

1601. Решите уравнение $1+\log_x(4-x)=\log_5 3\cdot\log_x 5$.
Решение. $\log_x[x(4-x)]=\log_x 3$, $\log_x 3\cdot\log_3[x(4-x)]=\log_x 3\cdot\log_3 3$, $\log_x 3\,(\log_3[x(4-x)]-\log_3 3)=0$,
$\begin{cases} x(4-x)=3,\\ x>0,\\ x\neq 1,\end{cases}$ $x=3$. ■

1602. Решите уравнение $\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}=1$.

Решение. $\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}=\log_{2x-1}(2x-1)$, $\begin{cases} \frac{x^4+2}{2x+1}=2x-1,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1,\end{cases}$
$x=\sqrt{3}$. ■

1603. Решите неравенство $\log_{g(x)}f(x)\geqslant 0$.

Решение. $\begin{cases} (g(x)-1)(f(x)-1)\geqslant 0\\ g(x)>0,\\ g(x)\neq 1,\\ f(x)>0.\end{cases}$ ■

1604. Решите неравенство $\log_{2x}(5x-7)\geqslant 0$
♦ $x\in(0;\,\frac{1}{2})\bigcup[\frac{8}{5};\,+\infty)$.

Решение. $\begin{cases} (2x-1)(5x-7-1)\geqslant 0\\ 2x>0,\\ 2x\neq 1,\\ 5x-7>0,\end{cases}$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ \frac{1}{2}] \bigcup [\frac{8}{5};\ +\infty), \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \in (\frac{7}{5};\ +\infty). \end{cases} \qquad \blacksquare$$

1605. Решите неравенство $\log_x(10x+3) \cdot \log_{10x}(3x+10) \geqslant 0$.

♦ $x \in (0;\ 0,1) \bigcup (1;\ +\infty)$.

Решение 1. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x(10x+3) \geqslant 0 & (a), \\ \log_{10x}(3x+10) \geqslant 0 & (b), \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x(10x+3) \leqslant 0 & (c), \\ \log_{10x}(3x+10) \leqslant 0 & (d). \end{cases} \end{array}\right.$

Решим сначала неравенство (a) $\log_x(10x+3) \geqslant 0$,
$\begin{cases} (x-1)(10x+2) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ 10x+3 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;\ -\frac{1}{5}] \bigcup [1;\ +\infty), \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \in (-\frac{3}{10};\ +\infty), \end{cases}$
$x \in (1;\ +\infty)$.

Теперь решим неравенство (b) $\log_{10x}(3x+10) \geqslant 0$,
$\begin{cases} (10x-1)(3x+9) \geqslant 0, \\ 10x > 0, \\ 10x \neq 1, \\ 3x+10 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty;\ -3] \bigcup [\frac{1}{10};\ +\infty), \\ x > 0, \\ x \neq 0,1, \\ x > -10/3, \end{cases}$
$x \in (0,1;\ +\infty)$. Наконец, решение первой системы (ab) $x \in (1;\ +\infty)$.

Решим сначала неравенство (c) $\log_x(10x+3) \leqslant 0$,
$\begin{cases} (x-1)(10x+2) \leqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ 10x+3 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in [-\frac{1}{5};\ 1], \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \in (-\frac{3}{10};\ +\infty), \end{cases}$
$x \in (0;\ 0,5) \bigcup (0,5;\ 1)$.

Теперь решим неравенство (d) $\log_{10x}(3x+10) \leqslant 0$,

$\begin{cases} (10x-1)(3x+9)\leqslant 0, \\ 10x>0, \\ 10x\neq 1, \\ 3x+10>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\in[-3;\ \frac{1}{10}), \\ x>0, \\ x\neq 0,1, \\ x>-10/3, \end{cases}$ $x\in(0;\ 0,1)$. Наконец, решение второй системы (cd) $x\in(0;\ 0,1)$. Решение совокупности систем $(a\bigcap b)\bigcup(c\bigcap d)$ $x\in(0;\ 0,1)\bigcup(1;\ +\infty)$. ■

Решение 2. Совокупность систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x(10x+3)\geqslant 0 & (a), \\ \log_{10x}(3x+10)\geqslant 0 & (b), \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x(10x+3)\leqslant 0 & (c), \\ \log_{10x}(3x+10)\leqslant 0 & (d). \end{cases} \end{array}\right.$ эквивалентна системе $\begin{cases} (x-1)(10x+2)\cdot(10x-1)(3x+10)\geqslant 0, \\ x>0\bigcap x\neq 1, \\ 10x+3>0, \\ 10x>0\bigcap 10x\neq 1, \\ 3x+10>0. \end{cases}$ ■

1606. Решите неравенство $\dfrac{\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}}\geqslant 0$

♦ $x\in(\dfrac{1}{5};\ \dfrac{2}{7}]\bigcup(\dfrac{1}{2};\ +\infty)$.

Решение. $\begin{cases} \frac{(2x-1)(5x-2)\cdot(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x}\geqslant 0, \\ 2x>0\bigcap 2x\neq 1, \\ 5x-1>0, \\ 3x>0\bigcap 3x\neq 1, \\ 7x-1>0, \\ 15x^2+2\neq 11x. \end{cases}$ ■

1607. Решите неравенство $\log_{3x+2}x<1$

♦ $x\in(0;\ +\infty)$.

1608. Решите неравенство $\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)<2$

♦ $x\in(0;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

1609. Решите неравенство $\log_{4x^2}(5x+6) > 1$

♦ $x \in (-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2};\ 2)$.

1610. Решите неравенство $\log_{\frac{x+2}{x^2+2}} \dfrac{x+1}{x^2+1} \leqslant 2$

♦ $x \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$.

1611. Решите неравенство

$$(\star)\quad \frac{\log_{x^2+3}(x+1) - \log_{x^2+3}(x^2+1)}{\log_{x^2+3}(x+2) - \log_{x^2+3}(x^2+2)} \leqslant 2$$

♦ $x \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$.

Решение. Найдем ОДЗ,

$x \in (-1;\ 0) \bigcup (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty)$,

и все преобразования выполняем в предположении, что $x \in$ОДЗ. Так как знак выражения $x+1$ при всех допустимых x совпадает со знаком выражения $\dfrac{x+1}{x^2+1}$, то

$$(\star) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_{x^2+3}\frac{x+1}{x^2+1}}{\log_{x^2+3}\frac{x+2}{x^2+2}} \leqslant 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_{x^2+3}\frac{x+1}{x^2+1} - 2\log_{x^2+3}\frac{x+2}{x^2+2}}{\log_{x^2+3}\frac{x+2}{x^2+2}} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\log_{x^2+3}\frac{x+1}{x^2+1} - \log_{x^2+3}\left(\frac{x+2}{x^2+2}\right)^2}{\log_{x^2+3}\frac{x+2}{x^2+2}} \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_{x^2+3}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\frac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2}\right);}{\log_{x^2+3}\frac{x+2}{x^2+2}} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_{\frac{x+2}{x^2+2}}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\frac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2}\right) \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \dfrac{x+2}{x^2+2} < 1, \\ \dfrac{x+1}{x^2+1}\dfrac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2} \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+2} > 1, \\ 0 < \dfrac{x+1}{x^2+1}\dfrac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2} \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-1;\ 0) \bigcup (1;\ +\infty), \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;\ 1), \\ x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow x \in (0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty).$$

Мы использовали следующие утверждения, в справедливости которых Вы можете убедиться самостоятельно (в представляемом Вами решении они должны быть упомянуты и обоснованы):

(1) при всех допустимых x выражение $\dfrac{x+2}{x^2+2} > 0$ и не равно 1,

(2) Все решения неравенства $\dfrac{x+2}{x^2+2} < 1$ образуют множество $x \in (-\infty;\, 0) \bigcup (1;\, +\infty)$,

(3) Все решения неравенства $\dfrac{x+2}{x^2+2} > 1$ образуют множество $x \in (0;\, 1)$,

(4) неравенство $\dfrac{x+1}{x^2+1}\dfrac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2} \leqslant 1$ равносильно $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$,

(5) неравенство $\dfrac{x+1}{x^2+1}\dfrac{(x^2+2)^2}{(x+2)^2} \geqslant 1$ равносильно $x \geqslant 0$. ■

1612. Решите неравенство $(\star)\ \log_{x^2}\left[(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)\right] > 1$.

♦ $x \in \left(-\infty;\, -\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) \bigcup \left(-1;\, -\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) \bigcup \left(\sqrt{3-\sqrt{5}};\, 1\right) \bigcup \left(\sqrt{3+\sqrt{5}};\, +\infty\right)$.

Решение. $(\star) \Leftrightarrow \log_{x^2}\left[(x^2-4)(x^2-1)\right] > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\star\star) \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ 0 < (x^2-4)(x^2-1) < x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1, \\ (x^2-4)(x^2-1) > x^2 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Условие $x^2 > 0$ во второй системе можно опустить, так как оно следует из первого неравенства этой системы. Пусть $x^2 = t$. Тогда

$$(\star\star) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < t < 1, \\ 0 < (t-4)(t-1) < t, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 1, \\ (t-4)(t-1) > t \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < t < 1, \\ (t-4)(t-1) > 0, \\ t^2 - 6t + 4 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 1, \\ t^2 - 6t + 4 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ddagger) \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < t < 1, \\ t \in (-\infty;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty), \\ t \in \left(3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}\right), \end{cases} \\ \begin{cases} t > 1, \\ t \in \left(-\infty;\ 3-\sqrt{5}\right) \bigcup \left(3+\sqrt{5};\ +\infty\right). \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как $\sqrt{5} \in (2;\ 3)$, то $3-\sqrt{5} \in (0;\ 1)$, $3+\sqrt{5} \in (5;\ 6)$, поэтому

$$(\ddagger) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \in \left(3-\sqrt{5};\ 1\right), \\ t \in \left(3+\sqrt{5};\ +\infty\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \in \left(3-\sqrt{5};\ 1\right), \\ x^2 \in \left(3+\sqrt{5};\ +\infty\right). \end{array}\right.$$

Ответ запишите самостоятельно. ■

1613. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{x-1}{2x+2}} 0{,}2}$.

♦ $(-\infty;\ -3) \bigcup (1;\ +\infty)$.

Решение. Функция $f(x)$ определена при тех о только тех x, для которых $\log_{\frac{x-1}{2x+2}} \dfrac{1}{5} \geqslant 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{x-1}{2x+2}} \dfrac{1}{5} \geqslant \log_{\frac{x-1}{2x+2}} 1 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \dfrac{x-1}{2x+2} < 1, \\ \dfrac{1}{5} \leqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+2} > 1, \\ \dfrac{1}{5} \geqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < \frac{x-1}{2x+2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+2} > 0, \\ \dfrac{x-1}{2x+2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \bigcup (1;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -3) \bigcup (-1;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -3) \bigcup (1;\ +\infty).\ ■$$

1614. Решите неравенство $\log_{1-x^2} \dfrac{1}{3} \leqslant \log_{\frac{1}{3x^2}} 3$

♦ $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{3}})$.

1615. Решите неравенство $(1-x) \cdot \log_{25-3\cdot 8^x} 2 \leqslant \dfrac{1}{3}$

♦ $x \in [-\frac{1}{3}\log_2 3;\ 1) \bigcup (1;\ \frac{1}{3}\log_2 \frac{25}{3})$.

1616. Решите неравенство $(\star)$ $\log_x 2 \cdot \log_{4x} 4 \geqslant 1$.

♦ $x \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right) \bigcup (1;\, 4)$.

Решение. Найдем ОДЗ, $x > 0 \bigcap x \neq \frac{1}{4} \bigcap x \neq 1$.
Внутри ОДЗ
$(\star) \Leftrightarrow \log_x 2 \cdot \left(1 + 2\log_x 2\right) \geqslant 1$.

Пусть $t = \log_2 x$. Тогда $(\star) \Leftrightarrow \frac{1}{t} \cdot \left(1 + \frac{2}{t}\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$ $\frac{t + 2 - t^2}{t^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0, \\ t^2 - t - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0, \\ t \in (-1;\, 2) \end{cases} \Leftrightarrow$ $t \in (-1;\, 0) \bigcup (0;\, 2)$. Поэтому $(\star) \Leftrightarrow \log_2 x \in (-1;\, 0) \bigcup (0;\, 2) \Leftrightarrow$ $\log_2 x \in \left(\log_2 \frac{1}{2};\, \log_2 1\right) \bigcup (\log_2 1;\, \log_2 4) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right) \bigcup (1;\, 4)$.
■

1617. Решите неравенство
$\log_{\frac{16-x^2}{12}} \left(|x| - 3\right)^2 \geqslant \log_{\sqrt{\frac{16-x^2}{12}}} \left(6x^2 + 5x + 1\right)$.

Решение. Выполним серию равносильных преобразований,
$\log_{\frac{16-x^2}{12}} \left(|x| - 3\right)^2 \geqslant \log_{\sqrt{\frac{16-x^2}{12}}} \left(6x^2 + 5x + 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\log_{\frac{16-x^2}{12}} ||x| - 3| \geqslant 2\log_{\frac{16-x^2}{12}} \left(6x^2 + 5x + 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\star)\ \log_{\frac{16-x^2}{12}} ||x| - 3| \geqslant \log_{\frac{16-x^2}{12}} \left(6x^2 + 5x + 1\right)$.

(1) Найдем ОДЗ, $\begin{cases} (|x| - 3)^2 > 0, \\ \frac{16-x^2}{12} > 0 \bigcap \frac{16-x^2}{12} \neq 1, \\ 6x^2 + 5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq 3, \\ 16 - x^2 > 0 \bigcap 16 - x^2 \neq 12, \\ 6x^2 + 5x + 1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-4; -3) \bigcup (-3; -2) \bigcup (-2; -\frac{1}{2}) \bigcup (-\frac{1}{3}; 2) \bigcup (2; 3) \bigcup (3; 4)$.

(2) Пусть $\begin{cases} \frac{16-x^2}{12} > 1, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;\, 2)$. Тогда $|x| = x$, $||x| - 3| = |x - 3| = 3 - x$, основание логарифма $a = \frac{16-x^2}{12}$ больше 1, так что функция $f(t) = \log_a t$

возрастает на своей области определения, поэтому $(\star)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|\geqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in[0;\,2)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\geqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in[0;\,2),\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+6x-2\leqslant 0,\\ x\in[0;\,2),\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+3x-1\leqslant 0,\\ x\in[0;\,2),\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in[0;\,\frac{-3+\sqrt{21}}{6}]$.

(3) Пусть $\begin{cases}\frac{16-x^2}{12}>1,\\ x<0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x\in(-2;\,0)$. Тогда $|x|=-x$, $||x|-3|=|-x-3|=3+x$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ больше 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ возрастает на своей области определения, поэтому $(\star)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3+x\geqslant 6x^2+5x+1>0,\\ x\in(-2;\,0)\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+4x-2\leqslant 0,\\ 6x^2+5x+1>0,\\ x\in(-2;\,0)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x-1\leqslant 0,\\ x\in(-\infty;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,+\infty),\\ x\in(-2;\,0)\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1;\,\frac{1}{3}],\\ x\in(-\infty;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,+\infty),\\ x\in(-2;\,0)\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in[-1;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,0)$.

(4) Пусть $\begin{cases}0<\frac{16-x^2}{12}<1,\\ x\geqslant 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in(2;\,4)$. Тогда $|x|=x$, $||x|-3|=|x-3|$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ лежит строго в пределах от 0 до 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ убывает на своей области определения, поэтому $(\star)$ $\Leftrightarrow 0<|x-3|\leqslant 6x^2+5x+1$.

(4a) $\begin{cases}x-3\leqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in(3;4),\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+4x+4\geqslant 0,\\ x\in(3;4),\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in(3;4)$,

(4b) $\begin{cases}3-x\leqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in(2;3),\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+6x-2\geqslant 0,\\ x\in(2;3),\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+3x-1\geqslant 0,\\ x\in(2;3),\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in(2;3)$,

(5) Пусть $\begin{cases}0<\frac{16-x^2}{12}<1,\\ x\leqslant 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x\in(-4;\,-2)$. Тогда $|x|=-x$, $||x|-3|=|-x-3|$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ лежит строго в пределах от 0 до 1, так что функция $f(t) = \log_a t$ убывает на своей области определения, поэтому $(\star) \quad \Leftrightarrow 0 < |-x-3| \leqslant 6x^2+5x+1$.

(5a) $\begin{cases} 3+x \leqslant 6x^2+5x+1, \\ x \in (-3;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+4x-2 \geqslant 0, \\ x \in (-3;-2) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x-1 \geqslant 0, \\ x \in (-3;-2), \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3;-2).$

(5b) $\begin{cases} -3-x \leqslant 6x^2+5x+1, \\ x \in (-4;-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+6x+4 \geqslant 0, \\ x \in (-4;-3) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3x+2 \geqslant 0, \\ x \in (-4;-3), \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;-3).$ ■

17.6.1. Для самостоятельного решения

17.6.1.1. Элементарные показательные уравнения и неравенства, 1

1618. Решите уравнение $4^x = 8$.

1 $\frac{3}{2}$ **2** 2 **3** $\frac{2}{3}$ **4** $\frac{3}{4}$ **5** $\frac{4}{3}$

1619. Наибольший корень уравнения $(x-13)\cdot 4^x = (x-13)\cdot 2^{3x-17}$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

1620. Если X — единственный корень уравнения $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = 17$, то

1 $X \in (-999;\ 0{,}3)$ **2** $X \in [0{,}3;\ 0{,}6)$ **3** $X \in [0{,}6;\ 1)$
4 $X \in [1;\ 1{,}3)$ **5** $X \in [1{,}3;\ 999)$

1621. Решите неравенство $(0{,}5)^x < 0{,}125$.

1 $(-\infty;\ -3)$ **2** $(-\infty;\ 3)$ **3** $(-\infty;\ +\infty)$ **4** $(-3;\ +\infty)$
5 $(3;\ +\infty)$

1622. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$, то

1 $S \in (-999;\ 1)$ **2** $S \in [1;\ 2)$ **3** $S \in [2;\ 3)$ **4** $S \in [3;\ 4)$
5 $S \in [4;\ 999)$

1623. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $343^x - 7^{2x+1} + 2 \cdot 7^{x+1} - 8 = 0$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S \in (-999;\ 0{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S \in [0{,}5;\ 1)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S \in [1;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $S \in [1{,}5;\ 2)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $S \in [2;\ 999)$

1624. Сумма всех различных корней уравнения $2^x + 2^{5-x} = 12$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 8 $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 $\boxed{\mathbf{4}}$ 7 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

1625. Сумма всех различных корней уравнения $x^{\log_2 x} = 16$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6,25 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2,5 $\boxed{\mathbf{3}}$ 2,25 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4,25 $\boxed{\mathbf{5}}$ 4,5

1626. Решите уравнение $\log_2 x = 8$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3 $\boxed{\mathbf{2}}$ 64 $\boxed{\mathbf{3}}$ 0,125 $\boxed{\mathbf{4}}$ 256 $\boxed{\mathbf{5}}$ 512

1627. Решите уравнение $\log_2 x = \log_3 x$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\{0\}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\{2;\ 3\}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ корней нет $\boxed{\mathbf{4}}$ $\{1;\ 2;\ 3\}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\{1\}$

1628. Сумма всех различных корней уравнения $\log_2 x + \log_x(16) = 5$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 16 $\boxed{\mathbf{2}}$ 17 $\boxed{\mathbf{3}}$ 18 $\boxed{\mathbf{4}}$ 33 $\boxed{\mathbf{5}}$ 34

1629. Решите уравнение $\log_{20} x + \log_{20}(x - 8) = 1$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\{10;\ -2;\ 2\}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\{10;\ -2\}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\{10;\ 2\}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\{10\}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ корней нет

1630. Найдите сумму и произведение корней уравнения $7^x \cdot 343^{-1/x} = 49$

1631. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $3 \cdot 6^{\left(\log_6 x\right)^2} + 2 \cdot x^{\log_6 x} = 30$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S \in (0;\ 2{,}1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S \in [2{,}1;\ 4{,}4)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S \in [4{,}4;\ 6{,}6)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $S \in [6{,}6;\ 8{,}8)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $S \in [8{,}8;\ 999)$

1632. Решите уравнение $\log_3 x = 2\log_3(x - 1)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ корней нет $\boxed{\mathbf{5}}$ $\{\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 2\}$

1633. Решите уравнение $\log_3 x = 7\log_2 x$

17.6.1.2. Элементарные показательные уравнения и неравенства, 2

1634. Решите уравнение $(0{,}125)^x = 32$.

$\boxed{1}$ $\frac{5}{3}$ $\boxed{2}$ $-\frac{5}{4}$ $\boxed{3}$ $-\frac{3}{5}$ $\boxed{4}$ $\frac{5}{4}$ $\boxed{5}$ $-\frac{5}{3}$

1635. Решите уравнение $2^x = 3^x$.

$\boxed{1}$ $\{1\}$ $\boxed{2}$ $\{0\}$ $\boxed{3}$ $\{0;\ 1\}$ $\boxed{4}$ корней нет $\boxed{5}$ $\{-1;\ 0;\ 1\}$

1636. Если X — единственный корень уравнения $2^x + 3^x + 4^x = 9$, то

$\boxed{1}$ $X \in (-999;\ 0{,}3)$ $\boxed{2}$ $X \in [0{,}3;\ 0{,}6)$ $\boxed{3}$ $X \in [0{,}6;\ 1)$
$\boxed{4}$ $X \in [1;\ 1{,}3)$ $\boxed{5}$ $X \in [1{,}3;\ 999)$

1637. Решите неравенство $2^x + 0{,}125 > 0$.

$\boxed{1}$ $(-\infty;\ -3)$ $\boxed{2}$ $(-\infty;\ 3)$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ $(-3;\ +\infty)$
$\boxed{5}$ $(3;\ +\infty)$

1638. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $36^x - 6^{x+2} + 180 = 0$, то

$\boxed{1}$ $S \in (-999;\ 1)$ $\boxed{2}$ $S \in [1;\ 2)$ $\boxed{3}$ $S \in [2;\ 3)$ $\boxed{4}$ $S \in [3;\ 4)$
$\boxed{5}$ $S \in [4;\ 999)$

1639. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $27^x - 3^{2x+1} - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$, то

1640. Решите неравенство $2^x - 2^{5-x} \leqslant 4$.

$\boxed{1}$ $(-2;\ 3)$ $\boxed{2}$ $(-\infty;\ 3)$ $\boxed{3}$ $(-4;\ 8)$ $\boxed{4}$ $(-0{,}25;\ 3)$ $\boxed{5}$ $(0{,}25;\ 3)$

1641. Решите неравенство $x^{\log_{0,5} x} \leqslant \dfrac{1}{512}$.

$\boxed{1}$ $(0{,}125;\ 1) \bigcup (8;\ +\infty)$ $\boxed{2}$ $(0;\ 0{,}125) \bigcup (8;\ +\infty)$
$\boxed{3}$ $(0{,}125;\ 1) \bigcup (1;\ 8)$ $\boxed{4}$ $(0{,}125;\ 8)$ $\boxed{5}$ $(0;\ 0{,}125) \bigcup (1;\ 8)$

1642. Решите неравенство $\log_{0,5} x \geqslant 8$.

$\boxed{1}$ $(0;\ 2^{-8})$ $\boxed{2}$ $(2^{-8};\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(2^{-8};\ 1)$ $\boxed{4}$ $(-\infty;\ 2^{-8})$ $\boxed{5}$ $(2^{-8};\ 2^8)$

1643. Решите неравенство $\log_2 x \leqslant \log_3 x$.

$\boxed{1}$ $(0;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $(-\infty;\ +\infty)$ $\boxed{4}$ решений нет $\boxed{5}$ $\{1\}$

1644. Сумма всех различных целочисленных решений неравенства $\log_2 x + \log_x(1024) \leqslant 7$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1645. Решите уравнение $\log_2 x + \log_2(x - 12) = 6$.

$\boxed{1}$ $\{16;\ -4\}$ $\boxed{2}$ $\{16;\ 4\}$ $\boxed{3}$ $\{16;\ -4;\ 4\}$ $\boxed{4}$ корней нет $\boxed{5}$ $\{16\}$

1646. Решите неравенство $7^x \cdot 343^{-1/x} \leqslant 49$

1647. Найдите остаток от деления на 5 наименьшего натурального числа, которое является решением неравенства

$3^{\left(\log_3 x\right)^2} + x^{\log_3 x} > 162.$

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

1648. Решите уравнение $\log_5(x^2 - 6x + 5) = 2\log_5(2 - x)$.

$\boxed{1}$ $\{0{,}25\}$ $\boxed{2}$ $\{0{,}5\}$ $\boxed{3}$ корней нет $\boxed{4}$ $\{0{,}5;\ 0{,}25\}$ $\boxed{5}$ $\{0{,}125\}$

1649. Решите неравенство $2\log_2 x \geqslant 3\log_3 x$.

$\boxed{1}$ $(0;\ 1]$ $\boxed{2}$ $[1;\ +\infty)$ $\boxed{3}$ $[\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3}]$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $(0;\ 1)\bigcup(1;\ +\infty)$

Ответы

1618. $\boxed{1}$ **1619.** $\boxed{2}$ **1620.** $\boxed{3}$ **1621.** $\boxed{5}$ **1622.** $\boxed{4}$ **1623.** $\boxed{3}$ **1624.** $\boxed{5}$
1625. $\boxed{4}$ **1626.** $\boxed{4}$ **1627.** $\boxed{5}$ **1628.** $\boxed{3}$ **1629.** $\boxed{4}$ **1630.** **1631.** $\boxed{3}$
1632. $\boxed{1}$ **1633.** ♦ $x = 1$. **1634.** $\boxed{5}$ **1635.** $\boxed{2}$ **1636.** $\boxed{4}$ **1637.** $\boxed{3}$
1638. $\boxed{3}$ **1639.** $\boxed{3}$ **1640.** $\boxed{2}$ **1641.** $\boxed{2}$ **1642.** $\boxed{1}$ **1643.** $\boxed{1}$
1644. $\boxed{2}$ **1645.** $\boxed{5}$ **1646.** **1647.** $\boxed{5}$ **1648.** $\boxed{2}$ **1649.** $\boxed{2}$