Оглавление

e14–2011–v225–C1…C6

C1 Решите уравнение

$$\frac{9^{\cos x}-3^{\sqrt{2}}}{\sqrt{-23\operatorname{tg} x}}=0.$$

C2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой C_1F.

C3 Решите неравенство

$$\frac{14^{\log_2(x+1)}}{7\left(\lg(x-3)^2\right)^4\log_{0,6}(x+2)}\geq\frac{\left(4\cdot(x+1)\right)^{\log_2(x+1)}}{4\left(\lg(x-3)^2\right)^4\log_{0,6}(x+2)}.$$

C4 Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC=80$ и $BD=18$. Проведена окружность радиусом $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B, касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|3a+5|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — чётная периодическая функция с периодом $T=\frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=(3a+1)x^2$, если $0\leq x\leq\frac{8}{3}$.

C6 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены последовательности $a_n=dn^n+21$ (d — целое). В результате получается рациональное число. Найдите это число.

e14–2011–v226–C1…C6

C1 Решите уравнение

$$\left(2\cos^2 x-7\cos x+3\right)\log_{41}(-\sin x)=0.$$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

C3 Решите неравенство

$$\frac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)}\le\frac{\left(4\cdot 2^{\lg(10_x)}\right)^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)}.$$

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

C5 Найти все пары (x,y), $x\le 0$, $y\ge 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases}\dfrac{2}{f(x)-3}+\dfrac{10}{f(y)-2}=3\\ \left(f(y)-2\right)\left(f(x)-3\right)=f(y)-2,\end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T=2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=4|x|$ при $-1\le x\le 1$.

C6 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

e14–2011–v227–C1...C6

C1 Решите уравнение

$$(2\sin^2 x - 7\sin x + 3)\log_{14}(-\cos x) = 0.$$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 4, а боковые ребра равны $3\sqrt{6}$, найдите угол между прямыми BG и AD, где G — точка на ребре SC, причём $SG:GC = 1:2$.

C3 Решите неравенство

$$\frac{14^{\log_2(4x)}}{7\log_2^2(32x)\log_2(0{,}25x)} \geq \frac{\left(4\cdot 2^{\log_2(4x)}\right)^{\log_2(4x)}}{4\log_2^2(32x)\log_2(0{,}25x)}.$$

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 14 и 48. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

C5 Найти все пары $(x,\ y)$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{6}{f(x)-4} + \dfrac{1}{f(y)-1} = 2, \\ (f(y)-1)(f(x)-4) = 6f(y)-6, \end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T = 2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = 10|x|$ при $-1 \leq x < 1$.

C6 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны по порядку последние цифры всех последовательных натуральных степеней некоторого натурального числа. В результате получается рациональное число, которое представимо несократимой дробью $\dfrac{a^2}{b}$, где a натуральное, $b > 100$. Найдите a.

e14–2011–v228–C1…C6

C1 Решите уравнение

$$(4\cos^2 x-8\cos x-5)\log_{51}(-\sin x)=0.$$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямыми BM и DE, где M — середина ребра SC.

C3 Решите неравенство

$$\frac{14^{\log_2(0,4x)}}{7\log_5^2(0,2x)\log_8(0,125x)}\le\frac{(1,6x)^{\log_2(0,4x)}}{4\log_5^2(0,2x)\log_8(0,125x)}.$$

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 16 и 30. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

C5 Найти все пары $(x,\ y)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases}\dfrac{5}{f(x)-3}+\dfrac{3}{f(2x+3y)-2}=6\\(f(2x+3y)-2)(f(x)-3)=3f(x)-9,\end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T=2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=5|x|$ при $-1\le x<1$.

C6 Первый набор чисел является геометрической прогрессией 2, 4, 8, ... 2^{10}. Второй набор является геометрической прогрессией 3, 9, 27, ... 3^{10}. Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте число из первого набора, а на втором — какое-то число из второго. Внутри пар числа умножили и полученные произведения сложили. Найдите наибольшее возможное значение полученной суммы.

e14–2011–v229–C1…C6

C1 Решите уравнение

$$(4\sin^2 x - 8\sin x - 5)\log_{15}(-\cos x) = 0.$$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямыми SF и BM, где M — середина ребра SC.

C3 Решите неравенство

$$\frac{14^{1+\log_7 x}}{7\log_{17}{}^2(17x)\log_{\frac{1}{7}}(49x)} \le \frac{(4\cdot 2^{1+\log_7 x})^{1+\log_7 x}}{4\log_{17}{}^2(17x)\log_{\frac{1}{7}}(49x)}.$$

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 40 и 42. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

C5 Найти все пары (x, y), $x > 0$, $y > 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{4(f(x)-1}{f(x)-2} + \dfrac{2f(y)+3}{f(y)-2} = 6, \\ (f(y)-2)(f(x)-2) = f(y)-2, \end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T = 2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = 3|x|$ при $-1 \le x < 1$.

C6 Первый набор чисел состоит из чисел 2, 4, 8, ... 2^{10}. Второй набор состоит из чисел 3, 9, 27, ... 3^{10}. Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте число из первого набора, а на втором — какое-то число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили. Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

e14–2011–v230–C1…C6

C1 Решите уравнение

$$(4\sin^2 x + 16\sin x + 7)\log_{15}(\cos x) = 0.$$

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямыми AL и BM, где M — середина ребра SC, L — середина ребра SB.

C3 Решите неравенство

$$\frac{(0{,}1x)\cdot 7^{\log_2(0{,}7x)}}{\log_6^2(36x)\log_{\frac{1}{25}}(0{,}2x)} \le \frac{(1{,}6x)^{\log_2(0{,}7x)}}{7\log_6^2(36x)\log_{\frac{1}{25}}(0{,}2x)}.$$

C4 Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 18 и 80. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

C5 Найти все пары $(x,\ y)$, $x>0$, $y>0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{8f(x)+3}{2f(x)-1}+\dfrac{6f(y)+1}{3f(y)-3}=6 \\ (6f(y)-3)(f(y)-1)=3f(y)-3, \end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T=2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=|x|$ при $-1\le x<1$.

C6 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все члены последовательности $a_n = 20^{bn}$, где b — целое неотрицательное. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Ответы e14–2011–v225–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$
C2	$\sqrt{\frac{6}{5}}$
C3	$(-1;\ 0,75],[1;\ 2),(2;\ 3),(3;\ 4),(4;\ +\infty)$
C4	$\frac{1271}{49}$ или $\frac{2009}{31}$
C5	$\frac{13}{69};\ -\frac{77}{123}$
C6	$\frac{7}{33}$

Ответы e14–2011–v226–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$ $-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$
C2	60°
C3	$(0;\ 0{,}01),\ \left(0{,}01;\ 10^{\log_2\frac{7}{8}}\right],\ [1;\ 10)$
C4	4 или 24
C5	$(1+2n,\ 0{,}75+2l)$, $(1+2n,\ -0{,}75+2m)$, $n=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ l=-1,\ -2,\ \ldots$ $m=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$
C6	$\frac{1}{9}$

Ответы e14–2011–v227–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z;\ (2k+1)\pi,\ k\in Z$
C2	$\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{2}}{4}$
C3	$\left(0;\ \frac{1}{32}\right),\ \left(\frac{1}{32};\ \frac{7}{16}\right],\ [0{,}5;\ 4)$
C4	12 или 112
C5	$(1+2n,\ -1{,}8-2l)$, $(1+2n,\ -0{,}2-2l)$, $n,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
C6	$a=19$

Ответы e14–2011–v228–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$
C2	1
C3	$\left[\frac{35}{8};\ 5\right),(8;\ +\infty)$
C4	12 или 80
C5	$\left(0{,}6+2l,-\frac{1}{15}+\frac{2}{3}(n-2l\right),$ $\left(-0{,}6+2m,\frac{11}{15}+\frac{2}{3}(n-2m\right),$ $l=0,1,2,\ldots,\ m=1,2,\ldots,$ $n-2l=1,2,\ldots,\ n-2m=1,2,\ldots$
C6	$\frac{6^{11}-6}{5}$

Ответы e14–2011–v229–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z;\ (2k+1)\pi,\ k\in Z$
C2	$\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$
C3	$\left(0, \frac{1}{49}\right), \left[7^{\log_2\frac{7}{8}};\ 1\right]$
C4	24 или 140
C5	$\left(1+2n,\ \frac{1}{3}+2l\right)$, $\left(1+2n,\ \frac{5}{3}+2l\right)$, $n=0,\ 1,\ 2,\dots,\ l=0,\ 1,\ 2,\dots$
C6	$6(3^{10}-2^{10})$

Ответы e14–2011–v230–C1…C6

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z;\ 2k\pi,\ k\in Z$
C2	$\frac{\sqrt{7}}{4}$
C3	$\left(0,\frac{1}{36}\right),\ \left(\frac{1}{36},\frac{10}{7}\right],\ [5;\ 8{,}75)$
C4	16 или 180
C5	$\left(1+2n,\ \frac{2}{3}+2l\right)$, $\left(1+2n,\ -\frac{2}{3}+2m\right)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots\ l=0,1,2,\ldots$ $m=1,\ 2,3\ldots$
C6	$0{,}111\ldots=\frac{1}{9}$