C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sin x=0, \\ (3\sqrt{\sin x}-1)(2y+8)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=-4, \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ или $\sin x=\frac{1}{9}$.

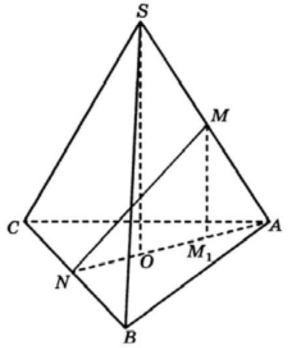
Если $y=-4$, то из первого уравнения получаем: $\sin x=4$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x=\frac{1}{9}$, то $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{9}+\pi n$, $n\in Z$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\frac{1}{9}+\pi n;\ -\frac{1}{9}\right)$, $n\in Z$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB=24\sqrt{3}$, $SC=25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

Решение.



Пусть N — середина BC, а M — середина AS. Прямая AS проецируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой AM, следовательно, угол M_1NM искомый.

$MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника SAO.

Тогда

$$NM_1=AN-\frac{1}{2}AO=\frac{2}{3}AN=\frac{2}{3}\cdot 24\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24.$$

Кроме того, $MM_1=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}\sqrt{SC^2-CO^2}=\frac{7}{2}$.

Из прямоугольного треугольника MM_1A находим:

$$\operatorname{tg}\angle M_1NM=\frac{MM_1}{NM_1}=\frac{7}{48}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{7}{48}$.

C3 Решите неравенство

$$\log_7\left(\left(5^{-x^2}-5\right)\left(5^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_7\left(\frac{5^{-x^2}-5}{5^{-x^2+16}-1}\right)>\log_7\left(5^{13-x^2}-4\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=5^{-x^2}, 0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_7\left((t-5)\left(5^{16}t-1\right)\right)+\log_7\frac{t-5}{5^{16}t-1}>\log_7(5^{13}t-4)^2.$$

$t-5<0$, поэтому $5^{16}t-1<0$, т.е. $0<t<\frac{1}{5^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases}\log_7(t-5)^2>\log_7(5^{13}t-4)^2,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$ $\begin{cases}|t-5|>|5^{13}t-4|,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$

$\begin{cases}5-t>4-5^{13}t,\\ 0<t<\frac{1}{5^{16}};\end{cases}$ $0<t<\frac{1}{5^{16}}$.

Тогда $5^{-x^2}<5^{-16}$; $x^2>16$; $\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$ **Ответ:** $(-\infty, -4), (4, +\infty)$.

C4 В треугольнике ABC $AB=7$, $BC=9$, $CA=4$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Подсчитывая разными способами периметры треугольников ADC и ABD, получаем: $DE=\frac{d+y-4}{2}$, $DF=\frac{d+x-7}{2}$. Возможны два случая.

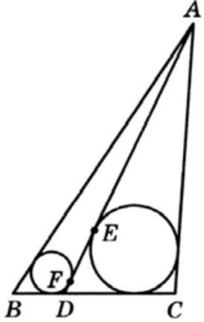


Рис. 1

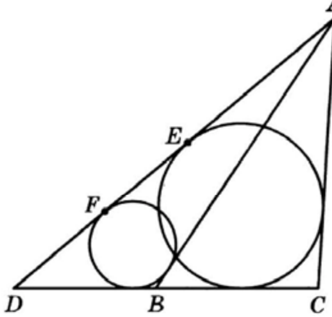


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=1{,}5$, $y=7{,}5$. Значит, $EF=\frac{3+y-x}{2}=4{,}5$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=\frac{9}{4}$, $y=x+9=\frac{45}{4}$. Значит, $EF=6$. **Ответ:** $4{,}5$ или 6.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2-3|x-a^2|-5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

При $x \geq a^2$ $f(x)=x^2-8x+3a^2$, поэтому график функции есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

При $x \leq a^2$ $f(x)=x^2-2x-3a^2$, поэтому график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.

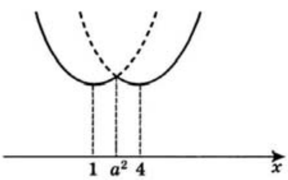


Рис. 1

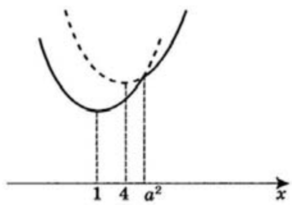


Рис. 2

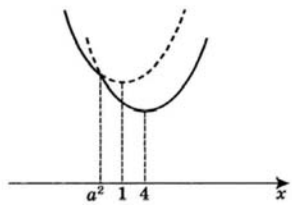


Рис. 3

Обе параболы проходят через точку $(a^2;\ f(a^2))$.

Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $1<a^2<4$, откуда $1<|a|<2$.

Ответ: $-2<a<-1;\ 1<a<2$.

C6 Перед каждым из чисел 3, 4, 5, ... 11 и 14, 15, ... 18 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа обоих наборов взяты с плюсами, то сумма максимальна и равна

$$5(3+\ldots+11)+9(14+\ldots+18)=5\left(\frac{3+11}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{14+18}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как сумма нечётная, число нечётных слагаемых в ней нечётно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого её слагаемого. Поэтому любая из полученных сумм будет нечётной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(3+4+5+6+7-8-9+10+11)+9(14-15-16-17+18)=$$
$$=5\cdot 29+9\cdot(-16)=145-144=1.$$

Ответ: 1 и 1035.