Планиметрия

Вписанная и описанная окружность, треугольник

780. В треугольнике ABC синус угла C равен $\frac{3}{5}$, $AC = 5$, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 1. Найдите сторону BC, если $AB < AC$.

781. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B, равным 30°, описана окружность радиусом $7\sqrt{2}$. Её диаметр AD пересекает сторону BC в точке E. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC.

782. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$. Найдите длину стороны AB, если $\angle ABC = 60°$ и $\angle BCA = 75°$.

783. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Длина стороны BC равна $3\sqrt{2}$, а скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно 9. Найдите длину стороны AB, если $\angle ACB = 45°$.

784. Окружность радиусом 15, вписанная в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону этого треугольника в отношении 2 : 3, считая от вершины основания. Во сколько раз длина окружности, описанной около этого треугольника, превосходит число π?

785. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону в отношении 2 : 5, считая от вершины основания. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $2\sqrt{5}$. Найдите боковую сторону.

786. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{2}$. Его вершины делят окружность на три части в отношении 1 : 2 : 3. Найдите сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади треугольника ABC.

787. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{\sqrt{12}-2}$. Его вершины делят окружность на три части в отношении 3 : 4 : 5. Найдите сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади треугольника ABC.

780-787-1

780. 1. $S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r$, с другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$,

$\frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$, по условию $r = 1$, $AC = 5$, $\sin \angle C = 0{,}6$, поэтому $P_{ABC} = 5 \cdot 0{,}6 \cdot BC$, $P_{ABC} = 3BC$ (см. рис. 25).

2. Так как $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$. Это означает, что $\angle C$ острый. Следо-

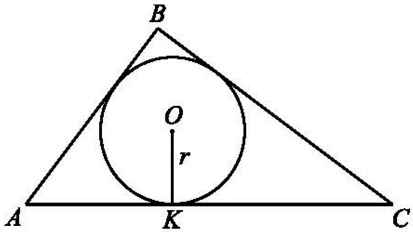

Рис. 25.

вательно, $\cos \angle C > 0$.

$\cos \angle C = \sqrt{1 - \sin^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

3. Выразим сторону AB через BC. По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$, $AB = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC}$.

4. $P_{ABC} = AB + BC + AC$, $P_{ABC} = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC} + BC + 5$, по доказанному $P_{ABC} = 3BC$. Пусть a — длина стороны BC, $a > 0$, тогда найдем a из уравнения:

(1) $\sqrt{a^2 + 25 - 8a} + a + 5 = 3a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 25 - 8a} = 2a - 5 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 + 25 - 8a = (2a-5)^2, \\ 2a - 5 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2 - 12a = 0, \\ a \geqslant 2{,}5; \end{cases} \Rightarrow a = 4.$$

$a = 4$ — корень уравнения (1). $BC = 4$.

Ответ: 4.

781. Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, AD — диаметр, $r = AO = 7\sqrt{2}$.

Найти: диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 26).

1. $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = \angle C = 75^\circ$.

2. Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опираются на одну и ту же дугу AC, поэтому $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$.

780-787-2

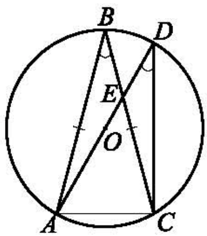

Рис. 26.

3. $\angle ACD = 90^\circ$. $\triangle ACD$ — прямоугольный, $AC = \frac{1}{2}AD = 7\sqrt{2}$, так как $\angle ADC = 30^\circ$.

4. $\triangle AEC$: $\angle EAC = 60^\circ$, $\angle ECA = 75^\circ$, тогда $\angle AEC = 45^\circ$. Стороны AE и EC найдем по теореме синусов. $\frac{AE}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle E} = \frac{EC}{\sin\angle A}$.

$$AE = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 7\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ\cdot\sqrt{2} = 14\sin 75^\circ.$$

$$EC = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

$S_{AEC} = \frac{1}{2}AE\cdot AC\cdot\sin\angle EAC$, $S_{AEC} = \frac{1}{2}\cdot 14\sin 75^\circ\cdot 7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75^\circ$. d — диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.

$d = \frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot S_{AEC}}$, где a,b,c — длины сторон $\triangle AEC$.

$$d = \frac{7\sqrt{2}\cdot 14\sin 75^\circ\cdot 7\sqrt{3}}{2\cdot\frac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75^\circ} = 14.$$

Ответ: 14.

782. Так как O — центр описанной окружности треугольника ABC, то $OA = OB = OC = R$, где R — радиус этой окружности (см. рис. 27). Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол $\angle ACB$ опираются на одну и ту же дугу AB, поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB = 150^\circ$. Аналогична ситуация для центрального угла $\angle AOC$ и вписанного угла $\angle ABC$: они оба опираются на дугу $AC \Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$. Так как $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC$, то $R^2\cdot\cos 120^\circ = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow$

780-787-3

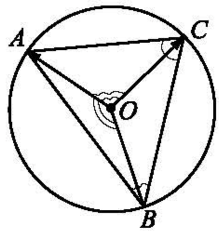

Рис. 27.

$R^2 = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2} \cdot (-2) = 2 - \sqrt{3}$. Для нахождения AB воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике AOB:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 150^\circ =$

$= 2R^2 \cdot \left(1 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$

$= 2(2-\sqrt{3}) \cdot \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = 4 - 3 = 1.$

Ответ: 1.

783.

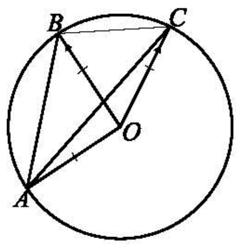

Рис. 28.

В треугольнике ABC (см. рис. 28) точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, то

$OA = OB = OC = R$, где R — радиус этой окружности. Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол ACB опираются на одну и ту же дугу AB, поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB = 90^\circ$.

Так как $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \cdot OC \cdot \cos\angle BOC$, то $R^2 \cdot \cos\angle BOC = 9$, $\cos\angle BOC = \dfrac{9}{R^2}$ ($\angle BOC$ — острый).

Для нахождения радиуса окружности воспользуемся теоремой косинусов

780-787-4

в $\triangle BOC$. $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\angle BOC =$
$= R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \dfrac{9}{R^2} = 2R^2 - 18$. $2R^2 - 18 = (3\sqrt{2})^2$, $2R^2 = 36$, $R^2 = 18$,
$R = \sqrt{18}$.
$\triangle AOB$: $AB = \dfrac{OB}{\sin 45^\circ}$, $AB = \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 6$.

Ответ: 6.

785. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC, O — центр его вписанной окружности, T, K, H — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно (см. рис. 29), а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r. Так как отрезки касательных равны, то $HC = KC$, $HA = AT$, $BT = BK$. Пусть $KC = AT = AH = HC = 2x$, $BK = BT = 5x$, $AB = BC = 7x$. Тогда $BH = \sqrt{(7x)^2 - (2x^2)^2} = 3\sqrt{5}x$. Площадь треугольника ABC равна $\dfrac{1}{2}BH \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5}x \cdot 4x = 6\sqrt{5}x^2$. С другой стороны, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 18x = 18\sqrt{5}x$,
$18\sqrt{5}x = 6\sqrt{5}x^2$, $x = 3$, $AB = BC = 7x = 21$.

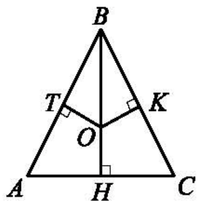

Рис. 29.

Ответ: 21.

786. Так как вершины треугольника (см. рис. 30), делят окружность в отношении $1 : 2 : 3$, то в $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Так как $OA = \sqrt{2}$, то $AC = 2\sqrt{2}$; $AB = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{6}$.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
Если сторона правильного треугольника равна a, то его площадь
$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая предыдущую запись $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $a^2 = 4$, $a = 2$.

780-787-5

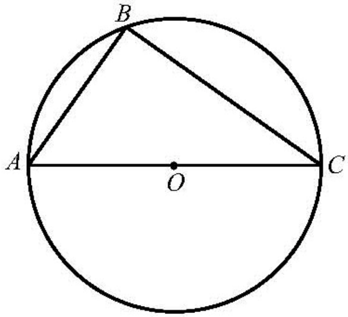

Рис. 30.

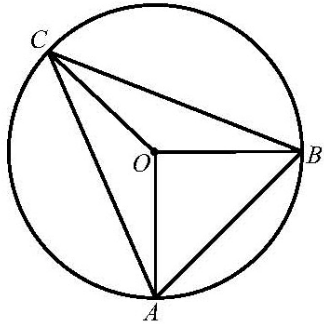

Рис. 31.

Отсюда $a^2 = 4$; $a = 2$.

Ответ: 2.

787. $R = \sqrt{\sqrt{12} - 2}$. $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 3 : 4 : 5$.

O — центр окружности (см. рис. 31).
Определим, на какие части разбивают вершины треугольника окружность: $3 + 4 + 5 = 12$, $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Значит $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle COA = 150^\circ$. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}R^2(\sin 90^\circ + \sin 150^\circ + \sin 120^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}R^2(3 + \sqrt{3}) = \frac{1}{4}(\sqrt{12} - 2)(\sqrt{3} + 3) = \sqrt{3}.$$

Пусть a — искомая сторона правильного треугольника. Известно, что

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь правильного треугольника. Тогда $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ и $a^2 = 4$ или $a = 2$.

Ответ: 2.