$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь правильного треугольника. Тогда $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ и $a^2 = 4$ или $a = 2$.

Ответ: 2.

789. $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) (см. рис. 32). $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$,

$AB^2 = AD{\cdot}AC = 4{\cdot}9$, $AB = 6$. $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AB{\cdot}AD{\cdot}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}\dfrac{1}{2} = 6$.

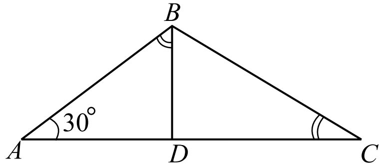

Рис. 32.

Ответ: 6.

790. Так как расстояние $MN = MP$, то $M \in$ биссектрисе $\angle B$ (см. рис. 33). $\triangle ABC$ — равнобедренный, то биссектриса совпадает с высотой (B, M, K

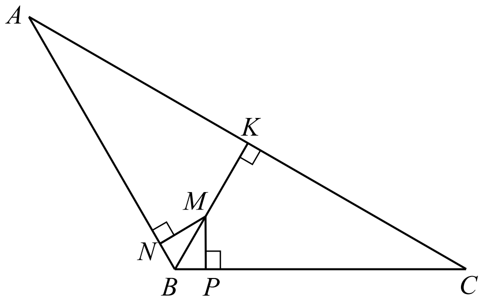

Рис. 33.

лежат на высоте BK). Из $\triangle BMP$ имеем: $BM = \dfrac{MP}{\sin 60^\circ} = \dfrac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$,

$BK = 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BKC$: $KC = BK \cdot \operatorname{tg}\angle 60^\circ$,

$KC = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 7$, $AC = 2KC = 14$.

Ответ: 14.

791. Из $\triangle BOK$ (см. рис. 34) имеем: $BO = \dfrac{OK}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}} =$

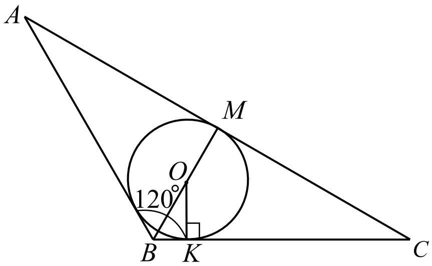

Рис. 34.

$= \dfrac{2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$; $BM = BO + OM = \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3} + 2 - \sqrt{3} =$ $= \dfrac{4\sqrt{3}-6+6-3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BMC$ имеем: $MC = BM\cdot \operatorname{tg} 60^\circ =$ $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{3}{3} = 1$. $AC = 2$.

Ответ: 2.

792. Используя условие задачи, сделаем рисунок (см. рис. 35). Из усло-

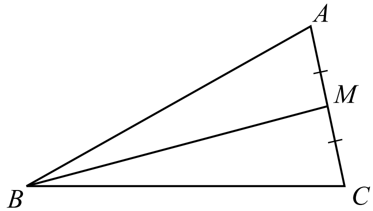

Рис. 35.

вия, что $S_{\triangle ABC} = 96$, следует $S_{BMC} = 48$, $S_{BMC} = \dfrac{1}{2}BM\cdot BC\cdot\sin\angle MBC$,

$48 = 6\cdot 2\sqrt{97}\cdot\sin\angle MBC$, $\sin\angle MBC = \dfrac{4}{6\cdot 2\sqrt{97}}\dfrac{4}{\sqrt{97}}$;

$\cos\angle MBC = \sqrt{\dfrac{81}{97}} = \dfrac{9}{\sqrt{97}}$. По теореме косинусов из $\triangle BMC$ имеем: $MC^2 = BM^2 + BC^2 - 2BM\cdot BC\cdot\cos\angle MBC$,

$MC^2 = 144 + 388 - 2 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{97}}$, $MC^2 = 100$, $MC = 10$; $AC = 20$. Из $\triangle ABC$ имеем: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin\angle C$, $\sin\angle C = \dfrac{24}{5\sqrt{97}}$; $\cos\angle C = \pm\sqrt{1 - \dfrac{576}{25 \cdot 97}} = \pm\dfrac{43}{5\sqrt{97}}$. Из условия следует, что $BC > BM$. Значит $\angle BMC = \angle BCM$. Следовательно, $\angle BCM < 90°$; $\cos\angle C = \dfrac{43}{5\sqrt{97}}$. Так как по условию $BC > MC$, то $\angle MBC < \angle BMC$. Следовательно, $\angle MBC = 90°$; $\cos\angle MBC = \dfrac{9}{27}$. По теореме косинусов из $\triangle ABC$ имеем: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$,
$AB^2 = 4 \cdot 97 + 400 - 2 \cdot 2\sqrt{97} \cdot 20 \cdot \dfrac{43}{5\sqrt{97}} = 100$; $AB = 10$.

Ответ: 10.

793. 1. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 35).

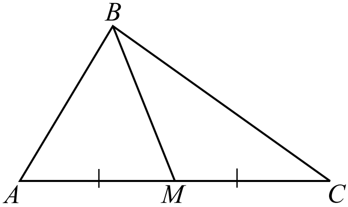

Рис. 36.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$; $96 = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sin\angle A$, $\sin\angle A = \dfrac{96 \cdot 2}{10 \cdot 20} = 0{,}96$;
$\cos\angle A = \pm\sqrt{1 - 0{,}96^2} = \pm\sqrt{(1 - 0{,}96)(1 + 0{,}96)} =$
$= \pm\sqrt{0{,}04 \cdot 1{,}96} = \pm 0{,}2 \cdot 1{,}4 = \pm 0{,}28$. Так как $\angle A$ — острый, то $\cos\angle A = 0{,}28$.
2. Из $\triangle ABM$ имеем: $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\angle A$,
$BM^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0{,}28$; $BM^2 = 144$; $BM = 12$.

Ответ: 12.

794. Обозначим $\dfrac{1}{7} AB = x$; $\dfrac{1}{8} BC = y$, тогда $AB = 7x$, $MB = 4x$, $BN = 3y$, $BC = 8y$ (см. рис. 37).

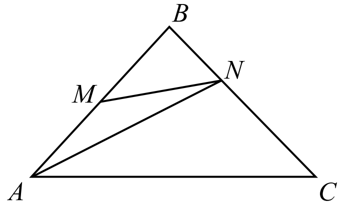

Рис. 37.

1. $\dfrac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot BN \cdot \sin\angle B}{\frac{1}{2}MB \cdot BN \cdot \sin\angle B} = \dfrac{7}{4}.$

Так как $S_{MBN} = S_{ABN} - S_{AMN} = S_{ABN} - 9$,

то $\dfrac{S_{ABN}}{S_{ABN} - 9} = \dfrac{7}{4}$; $4S_{ABN} = 7S_{ABN} - 63$; $S_{ABN} = 21$, $S_{BMN} = 12$.

2. $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin\angle B}{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B}$; $\dfrac{12}{S_{ABC}} = \dfrac{4 \cdot 3}{7 \cdot 8}$; $S_{ABC} = 56$.

Ответ: 56.

795. Сделаем рисунок (рис. 38).

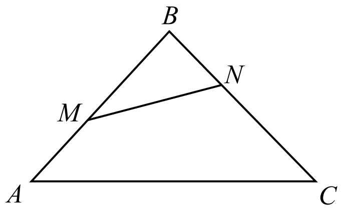

Рис. 38.

Обозначим $\frac{1}{5}AB = x$, $\frac{1}{13}BC = y$, тогда $AB = 5x$, $BM = 3x$, $BN = 2y$, $BC = 13y$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 13y \cdot \sin\angle B =$
$= \dfrac{65xy}{2}\sin\angle B$,

$S_{BNM} = \dfrac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4y \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot xy\sin\angle B,$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \dfrac{65xy\sin\angle B}{12xy\sin\angle B}, S_{MBN} = S_{ABC} \cdot \dfrac{12}{65} = \dfrac{130 \cdot 12}{65} = 24.$
$S_{AMNC} = 130 - 24 = 106.$

Ответ: 106.

796. Сделаем рисунок (см. рис. 39).

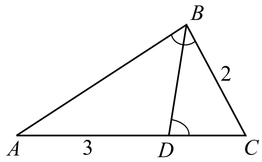

Рис. 39.

По условию $\angle ABC + \angle ADB = 180°$, а углы ADB и BDC смежные, то $\angle BDC + \angle ADB = \pi$. Следовательно, $\angle ABC = \angle BDC$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ($\angle ABC = \angle BDC$, $\angle C$ — общий). Значит, справедлива пропорция $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$, откуда $BC^2 = AC \cdot DC$. Пусть $DC = x > 0$. Тогда $4 = (3 + x)x,\ x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$ (не удовлетворяет $y > 0$), $x_2 = 1$. Таким образом, $DC = 1$; $AC = AD + DC = 4$, применив к треугольнику ABC теорему косинусов, имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC.$$

Так как $\angle ABC = \angle BDC$, то $\cos\angle ABC = \cos\angle BDC = \dfrac{13}{20}$. Обозначим, $AB = y$, $(y > 0)$. Получаем уравнение: $16 = y^2 + 4 - 4y \cdot \dfrac{13}{20}$, $5y^2 - 13y - 60 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = -2{,}4$ (не удовлетворяет условию $y > 0$). Значит, $AB = 5$, а периметр треугольника ABC равен $2 + 4 + 5 = 11$.

Ответ: 11.

797. $\triangle KOH \sim \triangle MOP$ (см. рис. 40) ($\angle KOH = \angle MOP$ — вертикальные;

$\angle KHO = \angle OMP$ — накрест лежащие). $\dfrac{HO}{OM} = \dfrac{KO}{OP}$, $\dfrac{4}{5} = \dfrac{KO}{OP}$, но

$MH = KP = 9; OK = \dfrac{4}{5}OP; 9 = PK = OK+OP = \dfrac{4}{5}OP+OP = \dfrac{9}{5}OP;$

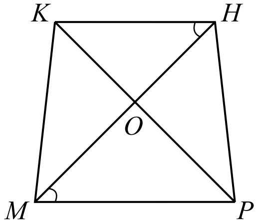

Рис. 40.

$OP = 5$, $KO = 4$. Следовательно, $MKHP$ — равнобедренная трапеция, $\dfrac{P_{OKM}}{P_{OHP}} = 1$.

Ответ: 1.

798. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 41) $OD = \dfrac{1}{2}AO$;

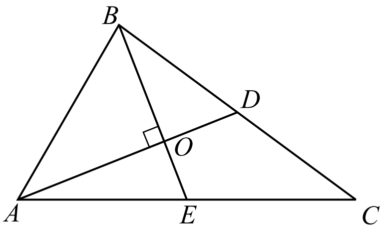

Рис. 41.

$BD = \dfrac{1}{2}BC = 6\sqrt{5}$. Из $\triangle BOD$ имеем: $BD^2 = BO^2+OD^2 = BO^2+\dfrac{1}{4}AO^2$.

$OE = \dfrac{1}{2}BO$; $AE = \dfrac{1}{2}AC = 15$.

Из $\triangle AOE$ имеем: $AE^2 = AO^2 + OE^2 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2$.

$$\begin{cases} BD^2 = BO^2 + \dfrac{1}{4}AO^2, \\ AE^2 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 180 = BO^2 + \dfrac{1}{4}AO^2, \\ 225 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2; \end{cases}$$

$405 = (AO^2+BO^2)+\dfrac{1}{4}(AO^2+BO^2)$. Из $\triangle ABO$ имеем $AO^2+BO^2 = AB^2$, следовательно $405 = \frac{5}{4}AB^2$, $AB^2 = 324$; $AB = 18$.

Ответ: 18.

799. Пусть $\angle CBA = \alpha$ (см. рис. 42), тогда $\angle CAB = 2\alpha$. Воспользуемся

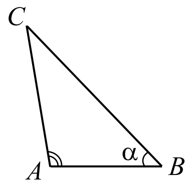

Рис. 42.

теоремой синусов для треугольника ABC: $\frac{AC}{\sin\angle CBA} = \frac{BC}{\sin\angle CAB} \Rightarrow$ $\frac{10}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{10}$; $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$. Далее применим теорему косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$. Обозначая $AB = x$, $x > 0$, и подставляя значения известных величин в равенство теоремы косинусов, приходим к уравнению: $100 = x^2 + 144 - 2\cdot 12\cdot\frac{3}{5}x$; $x^2 - \frac{72}{5}x + 44 = 0$; $5x^2 - 72x + 220 = 0$; $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{22}{5}$.

Пусть $AB = 10$, тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$), а значит $\angle ACB = \angle CBA = \alpha$. Но, тогда из равенства

$\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 45^\circ$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{3}{5}$.

Получили противоречие.

Следовательно, $AB \neq 10$. Получаем $AB = \frac{22}{5} = 4{,}4$.

Ответ: 4,4.

801. Пусть BO пересекает AC в точке B_1 (см. рис. 43), BB_1 — биссектриса (центр вписанной окружности точка O является точкой пересечения биссектрис). Так как $AB = BC$, то BB_1 является одновременно и медианой, при этом $S_{B_1OC} = S_{BB_1C} - S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Отсюда следует, что $\frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}} = \frac{S_{ABC}}{3} : \frac{S_{ABC}}{6} = 2 \Rightarrow O$ —

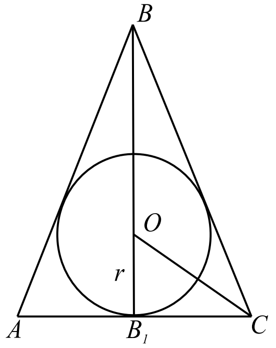

Рис. 43.

точка пересечения медиан (BB_1 — медиана, и она делится точкой O в отношении 2:1). То есть в $\triangle ABC$ точка пересечения биссектрис совпадает с точкой пересечения медиан $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ — равносторонний. Пусть a — сторона $\triangle ABC$, $r = \sqrt[4]{3}$ радиус, вписанной в него окружности, тогда площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\cdot r^2 = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

802. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$; $AC = 6$ (см. рис. 44). Обозначим через r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности.

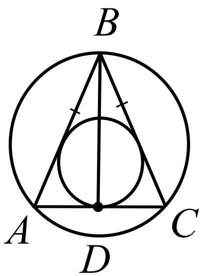

Рис. 44.

Пусть $BC = x$, $x > 3$, тогда $BD = \sqrt{x^2 - 9}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD$. С другой стороны $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}P_{ABC}\cdot r$. Следовательно $AC\cdot BD = P_{ABC}\cdot r$;

$6\sqrt{x^2-9}=(2x+6)\cdot 1$; $36\cdot\left(x^2-9\right)=4x^2+24x+36$; $32x^2-24x-360=0$; $4x^2-3x-45=0$; $x_1=3{,}75$, $x_2=-3$ — не удовлетворяет условию $x>3$.

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(3{,}75+3{,}75+6\right)\cdot 1=6{,}75$;

$R=\dfrac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\dfrac{3{,}75\cdot 3{,}75\cdot 6}{4\cdot 6{,}75}=3{,}125.$

Ответ: 3,125.

803. 1) В $\triangle ABB_1$ (см. рис. 45): $\angle B_1=90^\circ$; $AB=\sqrt{AB_1^2+BB_1^2}$; $AB=\sqrt{32^2+24^2}=40$.

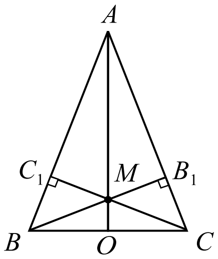

Рис. 45.

2) По условию $AB=AC$. Следовательно, $B_1C=AC-AB_1$; $B_1C=40-24=16$.

3) В $\triangle BB_1C$: $\angle B_1=90^\circ$; $BC=\sqrt{BB_1^2+B_1C^2}$; $BC=\sqrt{32^2+16^2}=16\sqrt{5}$.

4) В $\triangle AOB$: $\angle O=90^\circ$; $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}$; $AO=\sqrt{40^2-\left(8\sqrt{5}\right)^2}=16\sqrt{5}$.

5) $\triangle AOC\sim\triangle AB_1M$ ($\angle A$ — общий, $\angle O=\angle B_1=90^\circ$), отсюда $\dfrac{AO}{AB_1}=\dfrac{OC}{MB_1}$; $\dfrac{16\sqrt{5}}{24}=\dfrac{8\sqrt{5}}{MB_1}$; $MB_1=12$, тогда и $MC_1=12$.

6) $S_{ABM}=\dfrac{1}{2}AB\cdot MC_1$; $S_{ABM}=\dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 12=240$.

Ответ: 240.

804. 1) $LP=LO+OP$ (см. рис. 46). Получаем, что $LP=5+4=9$.
2) $\triangle MLP\sim\triangle OLB$ ($\angle L$ — общий, $\angle P=\angle B=90^\circ$), поэтому $\dfrac{LP}{LB}=\dfrac{PM}{BO}$, но $PM=KP$; $\dfrac{9}{LB}=\dfrac{KP}{BO}$, отсюда $LB=\dfrac{9BO}{KP}$.
3) $\triangle KOP\sim\triangle LOB$ ($\angle 1=\angle 2$ — вертикальные, $\angle P=\angle B=90^\circ$),

следовательно, $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{KP}{LB}$; $\dfrac{4}{OB} = \dfrac{KP}{LB}$, отсюда

$LB = \dfrac{OB \cdot KP}{4}$.

4) Из 2) и 3) следует, что $\dfrac{9BO}{KP} = \dfrac{OB \cdot KP}{4}$, отсюда $KP^2 = 36$; $KP = 6$.

5) $S_{KLO} = S_{KLP} - S_{KOP} = \dfrac{1}{2} \cdot KP \cdot LP - \dfrac{1}{2} KP \cdot OP =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 15$.

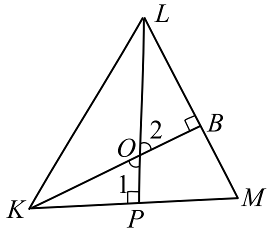

Рис. 46.

Ответ: 15.

805. Так как O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, (см. рис. 47) то прямые AM и BN являются биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$.

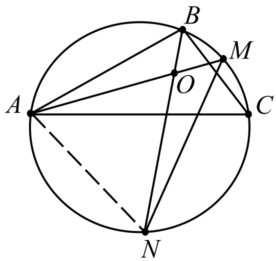

Рис. 47.

Пусть градусные меры углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ равны α, β и γ, соответственно. Тогда, $\angle CAN = \angle CBN = \beta/2$, как углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, $\angle BNA = \angle BCA = \gamma$, $\angle MNB = \angle MAB = \alpha/2$. Из условия $AM = MN \Rightarrow \angle MAN = \angle MNA$. Выразим углы $\angle MAN$ и

$\angle MNA$ через α, β, γ: $\angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \alpha/2 + \beta/2$, $\angle MNA = \angle MNB + \angle BNA = \alpha/2 + \gamma$. Отсюда мы имеем: $\alpha/2+\beta/2 = \alpha/2+\gamma$; $\beta = 2\gamma$. По условию, $\alpha = 30°$, воспользовавшись соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и равенством $\beta = 2\gamma$, получаем: $3\gamma = 150°$, $\gamma = 50°$.

Ответ: 50.

806. $\triangle ABC$ — равнобедренный (см. рис. 48).

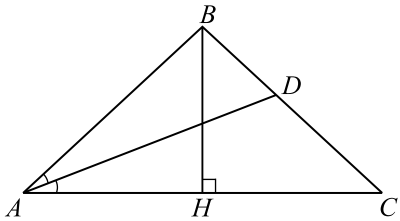

Рис. 48.

Свойство биссектрисы $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow AB = \dfrac{5}{8}AC$. Пусть $AC = x$, $x > 0$, тогда $AB = BC = \dfrac{5}{8}x$. $r = \dfrac{S_{ABC}}{p}$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, то есть $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{\frac{5}{8}x + \frac{5}{8}x + x}{2} = \dfrac{9}{8}x$. Пусть H — середина стороны AC. Так как $AB = BC$, то $BH \perp AC$. Поэтому из $\triangle ABH \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{25}{64}x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{3}{8}x$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{3}{16}x^2. \text{ Таким образом, } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{3}{16}x^2}{\frac{9}{8}x} = \frac{x}{6}.$$

По условию $r = 2$, поэтому $\dfrac{x}{6} = 2$; $x = 12$.

Ответ: 12.

807. $S_{ANMB} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin \angle AON$(см. рисунок 49).

В равнобедренном $\triangle ACB$ $\angle C = 120°$, тогда $\angle A = \angle B = 30°$. AM

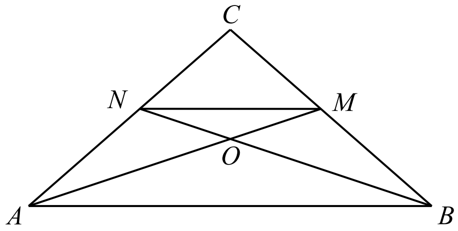

Рис. 49.

и BN биссектрисы $\Rightarrow \angle MAB = \angle NBA = 15°$, тогда $\angle AON = 30°$. $S_{ANMB} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} = 6{,}25$.

Ответ: 6,25.

808. 1. По условию $\triangle ABC$ равнобедренный и $\angle C = 120°$, следовательно $\angle BAC = \angle ABC = 30°$.

2. AM и BN биссектрисы, следовательно, $\angle MAB = \angle NBA = 15°$, тогда $\angle AON = 30°$, как внешний угол $\triangle AOB$ (см. рис. 49).

3. $S_{ANMB} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin\angle AON \Rightarrow AM \cdot BN = \dfrac{2S_{ANMB}}{\sin\angle AON} =$

$= \dfrac{2 \cdot 12{,}25}{0{,}5} = 49$. Следовательно, $AM = BN = 7$.

Ответ: 7.

809. Так как CD — биссектриса $\angle ACB$ (см. рис. 50), то $\dfrac{CB}{BD} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1}$.
Значит, мы можем обозначить $AC = 2x$; $AD = x$, $x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:
$6^2 + (3 + x)^2 = (2x)^2$; или $x^2 - 2x - 15 = 0$.
Решениями этого уравнения будут: $x_1 = 5; x_2 = -3$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 5$. $S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot 6 = 15$.

Ответ: 15.

810. Так как AD — биссектриса $\angle BAC$ (см. рис. 51), то $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Поэтому можем обозначить $AB = 2x$, $AC = x$, $x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\angle BAC$; $36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$. Отсюда $x = 2\sqrt{3}$. Теперь все стороны треугольника ABC известны. По теореме, обратной теореме Пифагора,

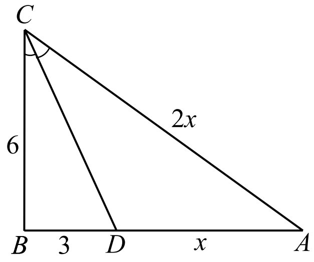

Рис. 50.

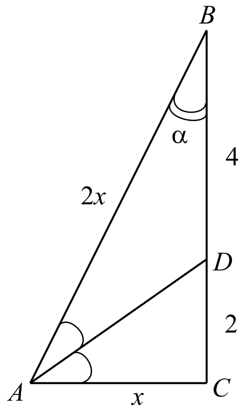

Рис. 51.

так как $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = (4\sqrt{3})^2$ — истинное равенство, то $\triangle ABC$ является прямоугольным и катет AC равен половине гипотенузы AB. Значит $\angle ABC = 30°$.

Ответ: 30.

811. Так как треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 52), то высота BH, опущенная на боковую сторону AC, попадает на саму сторону, а не на её продолжение. Найдём BH.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 300 = \frac{1}{2}25 \cdot BH$. Отсюда $BH = 24$. Из $\triangle BCH$ имеем теперь по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Следовательно, $AH = AC - CH = 25 - 7 = 18$. Из треугольника ABH получаем по теореме Пифагора:
$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$.

Ответ: 30.

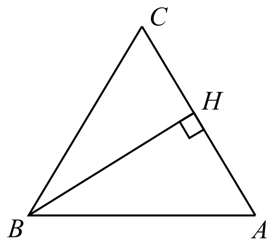

Рис. 52.

813. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC (см. рис. 53).

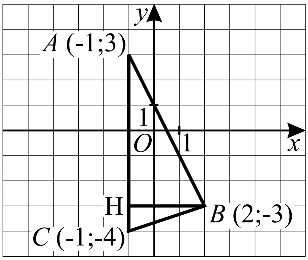

Рис. 53.

Проведём $BH \perp AC$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BH$.

Сторона AC параллельна оси ординат, $AC = 3 - (-4) = 7$.
Высота BH параллельна оси абсцисс, $BH = 2 - (-1) = 3$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

814. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC (см. рис. 54). Проведём $AH \perp BC$, тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC$.

Сторона BC параллельна оси ординат, $BC = 5 - 2 = 3$.
Высота AH параллельна оси абсцисс, $AH = 3 - 0 = 3$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

815. Проведём KH — высоту к основанию.

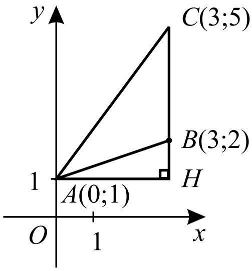

Рис. 54.

$$KH = PK \sin\angle P = PK\sqrt{1-\cos^2\angle P} = 13\sqrt{1-\frac{105}{169}} = 13\cdot\frac{8}{13} = 8.$$

Ответ: 8.

816. 1) $\angle CLD = \angle BCL$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых, (см. рис. 55). Так как CL — биссектриса $\angle C$, то $\angle DCL = \angle BCL$.

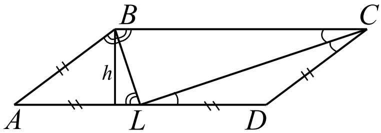

Рис. 55.

Получаем $\angle CLD = \angle DCL$; $DL = CD$. Аналогично, $AL = AB$. Поскольку $AB = CD$, как противоположные стороны параллелограмма, то $AL = DL$, и, значит, $AL = \frac{1}{2}AD$. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD. Тогда $S_{ABCD} = h\cdot AD$, $S_{ABL} = \frac{1}{2}h\cdot AL = \frac{1}{4}h\cdot AD$. Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{ABL} = 60$. Отметим также, что для периметра p параллелограмма $ABCD$ имеем выражение: $p = 2(AB+AD) = 2\cdot\frac{3}{2}AD = 3AD = 3BC$.

2) $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle B + \angle C = 180°$. Значит, $\angle BCL + \angle CBL = 90°$, $\angle BLC = 180° - \angle BCL - \angle CBL = 90°$. Следовательно, $\triangle BCL$ — прямоугольный. Значит, $2S_{BCL} = BL\cdot CL = h\cdot BC = S_{ABCD} = 60$, $BL = \frac{60}{CL} = 5$.

Из $\triangle BCL$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{BL^2 + CL^2} = 13$. Итак, $p = 3BC = 39$.

Ответ: 39.

817. 1) Так как $\angle CLD = \angle BCL$ и $\angle DCL = \angle BCL$, то $\angle CLD = \angle DCL$, (см. рис. 56). Следовательно, $DL = CD$, и, аналогично, $AL = AB$. По-

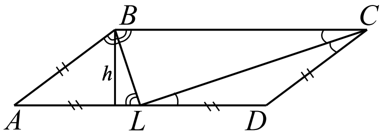

Рис. 56.

скольку $CD = AB$, то $DL = AL = \frac{1}{2}AD$.

2) Так как $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, то $\angle BCL + \angle CBL =$

$= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 90° \Rightarrow \angle BLC = 90°$. Пусть $CL = x$, $(x > 0)$, тогда из $\triangle BLC$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{36 + x^2}$. Таким образом, $DL = CD = \frac{1}{2}\sqrt{36 + x^2}$ и $CL + CD + DL = x + \sqrt{36 + x^2}$. Так как по условию периметр $\triangle BCL = 18$, то $x + \sqrt{36 + x^2} = 18$, $\sqrt{36 + x^2} = 18 - x$. Отсюда $x = 8$. Итак, $S_{BCL} = \frac{1}{2}BL \cdot CL = 24$, $S_{ABCD} = 2S_{BCL} = 48$.

Ответ: 48.

818. 1) Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично, $CD = DK$. Следовательно, учитывая условие, получаем:
$LK = AD - AL - DK = 3AB - 2AB = AB$, (см. рис. 57). Пусть P — точ-

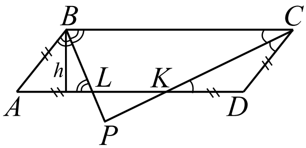

Рис. 57.

ка пересечения прямых BL и CK. Так как $AL + DK = 2AB = \frac{2}{3}AD < AD$, то точка P лежит вне параллелограмма. Так как $LK \parallel BC$, то

$\triangle LKP \backsim \triangle BCP$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{LK}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Имеем: $PL = \dfrac{1}{3}BP$, $BL = \dfrac{2}{3}BP$, $BP = \dfrac{3}{2}BL = 9$. Аналогично находим, что $CP = \dfrac{3}{2}CK = 12$.

2) Так как $\angle PBC = \dfrac{1}{2}\angle B$, $\angle PCB = \dfrac{1}{2}\angle C$, $\angle PBC + \angle PCB =$

$= \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90°$, то $\angle BPC = 90°$.

3) $S_{BCP} = \dfrac{1}{2}BP \cdot CP = 54$, $S_{LKP} = k^2 \cdot S_{BPC} = \dfrac{1}{9} \cdot 54 = 6$. Итак, $S_{BCKL} = S_{BCP} - S_{LKP} = 48$, $S_{BCKL} = \dfrac{h}{2} \cdot (BC + LK) = \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{4}{3}BC =$

$= \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$ (здесь h обозначает высоту параллелограмма). Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}S_{BCKL} = 72$. *Ответ:* 72.

819. Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично, $CD = DK$. Поскольку $AL + DK = 2AB = \dfrac{4}{3}AD > AD$, то точка пересечения отрезков BL и CK лежит внутри параллелограмма. Пусть $P = BL \cap CK$ (см. рис.58). Тогда $KL = AL + DK - AD = 2AB - AD =$ $= 2 \cdot \dfrac{2}{3}AD - AD = \dfrac{1}{3}AD$. $KL = AL + DK - AD = \dfrac{1}{3}AD$. Пусть h —

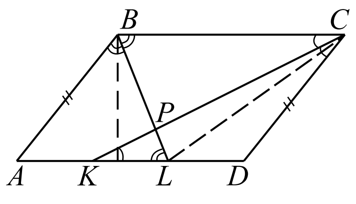

Рис. 58.

высота параллелограмма $ABCD$ к стороне AD. Тогда

$S_{BCLK} = \dfrac{1}{2}h \cdot (BC + KL) = \dfrac{1}{2}h(BC + \dfrac{1}{3}AD) = \dfrac{1}{2}h \cdot \dfrac{4}{3}BC = \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$,

$S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK}$.

2) Заметим, что $\angle BPC = 90^\circ$, так как $\angle PBC + \angle PCB = = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ$. Поэтому $S_{BCLK} = \frac{1}{2}BL \cdot CK \cdot \sin 90^\circ = 30$.

Получаем $S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45$.

Ответ: 45.

820. Пусть ML — высота треугольника MEC. Тогда KL — высота трапеции $FECD$ (см. рис. 59).

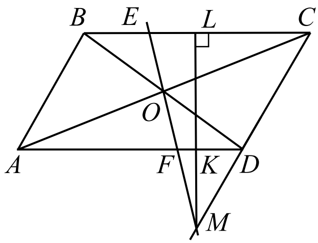

Рис. 59.

Рассмотрим треугольники MEC и MFD. $\angle ECM$ и $\angle FDM$ — соответственные, $\angle CEM$ и $\angle DFM$ — соответственные, $\angle CME$ и $\angle DMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle CME \sim \triangle FMF$ — по трем равным углам. Так как, по условию, $EC : FD = 2$, то $ML : KM = 2$. Отсюда, $EC = 2FD$, $ML = 2KM$. С учетом того, что $LK = ML - KM = 2KM - KM = KM$, получаем $S_{FECD} = \frac{EC + FD}{2}KL = \frac{3FD \cdot KM}{2}$.

$S_{ECM} = \frac{1}{2}EC \cdot ML = \frac{2FD \cdot 2KM}{2} = 2FD \cdot KM$. Следовательно,

$\frac{S_{FECD}}{S_{ECM}} = \frac{3FD \cdot KM}{4FD \cdot KM} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

821. Искомый периметр $P_{ABD} = AB + AD + BD$. Найдём стороны AB, AD и BD (см. рис. 60).

$AD = AF + FD$. Чтобы найти FD покажем, что треугольники BOE и FOD равны. $\angle EBO$ и $\angle ODF$ — накрест лежащие, $\angle BOE$ и $\angle FOD$ — вертикальные, $BO = OD$ — так как O — точка пересечения диагоналей. Следовательно, $\triangle BOE = \triangle FOD$ — по стороне и двум прилежащим

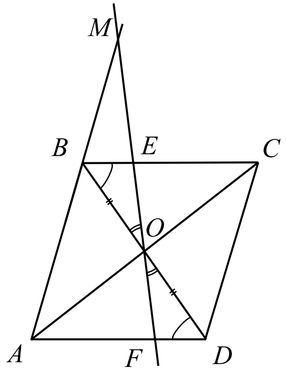

Рис. 60.

углам. Поэтому $FD = BE = 1{,}6$. Следовательно, $AD = 6{,}4 + 1{,}6 = 8$.

Найдём сторону AB. Рассмотрим треугольники BME и AMF. $\angle MBE$ и $\angle MAF$ — соответственные, $\angle BME$ и $\angle AMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle BME \sim \triangle AMF$ — по двум равным углам. Из подобия треугольников имеем $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{BE}{AF}$, $AM = \dfrac{MB \cdot AF}{BE} = \dfrac{1 \cdot 6{,}4}{1{,}6} = 4$. Получаем, $AB = AM - BM = 4 - 1 = 3$.

Найдём сторону BD. По теореме косинусов
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle BAD = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49$, $BD = 7$.

Получаем, $P_{ABD} = 3 + 8 + 7 = 18$.

Ответ: 18.

822. 1) $\triangle BKP \sim \triangle CDP$ (по двум углам).
Значит, $\dfrac{BK}{CD} = \dfrac{PK}{PD} = \dfrac{PK}{PK + DK} = \dfrac{6}{6+9} = \dfrac{2}{5}$. То есть $BK = \dfrac{2}{5}CD = 4$.

2) Докажем, что $\triangle BKP$ – равнобедренный (см. рис. 61).
$\angle BPK = \angle PDA$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD, PC и секущей PD), $\angle BKP = \angle CDP$ (как соответственные при параллельных прямых AB, CD и секущей PD), $\angle PDA = \angle CDP$ (DP – биссектриса $\angle D$). Значит, $\angle BPK = \angle BKP$ и $BP = BK = 4$.

3) $P_{BKP} = BP + BK + PK = 4 + 4 + 6 = 14$.

Ответ: 14.

823. 1) $\triangle ABN \sim \triangle DMN$ (по двум углам) (см. рис. 62). Значит,
$\dfrac{AB}{MD} = \dfrac{BN}{MN} = \dfrac{BM + MN}{MN} = \dfrac{6+4}{4} = \dfrac{5}{2}$. То есть $AB = \dfrac{5}{2}MD = 12{,}5$.

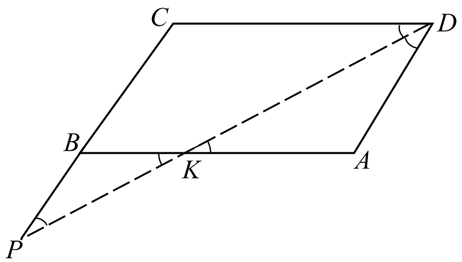

Рис. 61.

2) $\angle ANB = \angle NBC$ (как накрест лежащие), $\angle ABN = \angle NBC$, BN — биссектриса $\angle B$. Значит, $\angle ANB = \angle ABN$, следовательно, $\triangle ABN$ – равнобедренный, $AN = AB = 12{,}5$.

3) $P_{ABN} = AN + AB + BN = 12{,}5 + 12{,}5 + 10 = 35$.

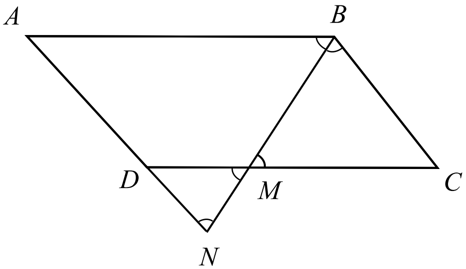

Рис. 62.

Ответ: 35.

824. $\cos\angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (см. рис. 63).

Пусть AH_1 высота параллелограмма, проведенная к стороне CB. $BH_1 = 2\sqrt{5}\cdot\cos\angle B = 2$; $AH_1 = CH = 4$. Так как $\triangle AHK \sim \triangle KBC$, то $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{3}{5}$. Пусть $AH = 3x$, тогда $BC = 5x$. Так как четырехугольник $AHCH_1$ является прямоугольным, то $AH = CH_1 = 3x \Rightarrow BH_1 = BC - CH_1 = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, $BC = 5$. $S_{ABCD} = BC\cdot AH_1 = 5\cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

825. $\angle CDN = \angle DNA$ (как накрест лежащие), $\angle CDN = \angle NDA$ (DN

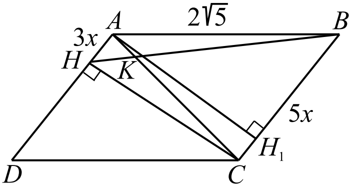

Рис. 63.

— биссектриса $\angle D$). Следовательно $\angle ADN = \angle DNA$. Следовательно $\triangle ADN$ — равнобедренный (см. рис. 64). $AD = AN = AB - BN = DC - BN = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $\angle ADN = \angle BMN$ (как накрест лежащие), $\angle BNM = \angle DNA$ (вертикальные). Так как $\angle NDA = \angle DNA$, то $\angle BNA = \angle BMN$. Значит, $\triangle NBM$ — равнобедренный. $BN = BM = \sqrt{3}$. $\triangle DCM \sim \triangle NBM$ (по двум углам: $\angle M$ — общий, $\angle CDM = \angle BNM$ — соответственные), $\dfrac{DC}{BN} = \dfrac{DM}{NM}$. $NM = \dfrac{BN \cdot DM}{DC}$, $NM = 3$. Из $\triangle BNM$ по теореме косинусов $MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2BN \cdot BM \cdot \cos\angle NBM$, $\cos\angle NBM = -\dfrac{1}{2}$, $\angle NBM = 120°$. $\angle NBC = 180° - 120° = 60°$. Из $\triangle CBN$ по теореме косинусов
$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC \cdot BN \cos\angle NBC$, $CN^2 = 9$, $CN = 3$.

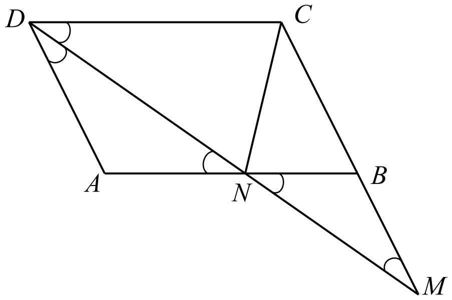

Рис. 64.

Ответ: 3.

826. Пусть $h_1 = 5$, $h_2 = 7$, $AB = b$, $AD = a$ (см. рис. 65).

$S_{ABCD} = ah_1 = bh_2 \Rightarrow 5a = 7b$, кроме того периметр параллелограмма равен $2(a + b) = 48$. Составим систему: $\begin{cases} 5a - 7b = 0, \\ a + b = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ b = 10. \end{cases}$

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{h_1}{b} = \dfrac{1}{2}$.

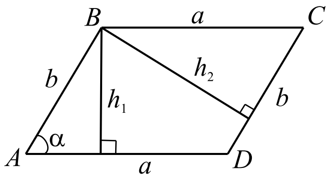

Рис. 65.

Ответ: 0,5.

827. Пусть $h_1 = 3\sqrt{2}$, $h_2 = 5\sqrt{2}$ (см. рис. 65). $S_{ABCD} = ah_1 = bh_2$, $\Rightarrow$ $3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}$, так же $2(a+b) = 32$. $\begin{cases} 3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}, \\ a + b = 16. \end{cases}$ Решив систему, получим $a = 10$, $b = 6$. $\sin\alpha = \dfrac{h_1}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Ответ: 1.

829. Обозначим одну восьмую часть площади трапеции через x, тогда $S_{MBCN} = 3x$, $S_{AMND} = 5x$, $S_{ABCD} = 8x$. Пусть $AD = a$, $a > 10$. Так

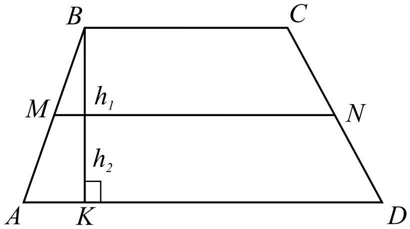

Рис. 66.

как $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$ (по теореме о средней линии трапеции), $BC =$ $= 2MN - AD = 20 - a$. Проведем высоту $BK = h_1 + h_2$, где h_1 — высота трапеции $MBCN$, h_2 — высота трапеции $AMND$ (см. рис. 66).

$S_{MBCN} = \dfrac{MN + BC}{2} \cdot h_1$; $3x = \dfrac{10 + 20 - a}{2} \cdot h_1$; $h_1 = \dfrac{6x}{30 - a}$.

$S_{AMND} = \dfrac{MN + AD}{2} \cdot h_2$; $5x = \dfrac{10 + a}{2} \cdot h_2$; $h_2 = \dfrac{10x}{10 + a}$.

$S_{ABCD} = 10 \cdot (h_1 + h_2)$; $h_1 + h_2 = \dfrac{8x}{10} = \dfrac{4x}{5}$, $\dfrac{6x}{30-a} + \dfrac{10x}{10+a} = \dfrac{4x}{5}$;

$\dfrac{3}{30-a} + \dfrac{5}{10+a} = \dfrac{2}{5}$; $a^2 - 25a + 150 = 0$; $a_1 = 15$, $a_2 = 10$ не удовлетворяет условию $a > 10$. $AD = 15$.

Ответ: 15.

830. Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, вписанная, $AD = 21$, $BC = 9$, BH — высота, $BH = 8$ (см. рис. 67).

Найти: диаметр описанной окружности.

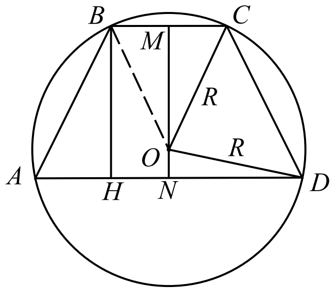

Рис. 67.

Обозначим через O — центр описанной около трапеции окружности (см. рис. 67). MN — высота трапеции, проходящая через точку O. Так как $OC = OB$ (радиус описанной окружности), то $\triangle OBC$ — равнобедренный. OM — высота $\triangle BOC$, а следовательно и медиана. Поэтому $BM = MC$; $MC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{9}{2}$. Аналогично, $ND = AN$. $ND = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{21}{2}$. Пусть $MO = x$, $x > 0$, тогда $ON = 8 - x$. Так как MN — высота трапеции, то $\angle CMO = 90°$, $\angle OND = 90°$. Следовательно, $\triangle CMO$ и $\triangle OND$ — прямоугольные. Из $\triangle MOC$ имеем:
$OC^2 = MC^2 + MO^2$. Пусть R — радиус описанной окружности. Тогда $R^2 = OC^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + x^2$ (1). Из $\triangle NOD$ имеем:

$OD^2 = ON^2 + ND^2$, $R^2 = OD^2 = (8-x)^2 + \left(\dfrac{21}{2}\right)^2$ (2). Из (1) и (2) имеем: $\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + x^2 = (8-x)^2 + \left(\dfrac{21}{2}\right)^2$; $\dfrac{81}{4} + x^2 = \dfrac{441}{4} + 64 - 16x + x^2$;

$16x = 154$; $x = \dfrac{77}{8} = 9\dfrac{5}{8}$. Из (1) имеем: $R^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{77}{8}\right)^2 = \dfrac{7225}{64}$; $R = \dfrac{85}{8}$. Диаметр окружности $D = 2R = \dfrac{85}{4} = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

831. Через вершину C проведем $CE \parallel BD$ (см. рис. 68). Продолжим отрезок AD до пересечения с CE. Четырехугольник $DBCE$ — параллело-

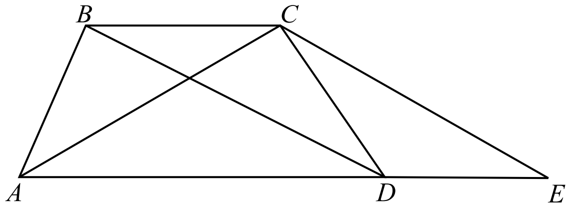

Рис. 68.

грамм,
$CE = BD = 12$, $DE = BC = 5$. $S_{ABCD} = S_{ACE}$. Найдём S_{ACE} по формуле Герона. $AC = 9$, $CE = 12$, $AE = 15$. Полупериметр $\triangle ACE$ $p = \dfrac{9+12+15}{2} = 18$. $S_{ACE}\sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} =$
$= \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = 3 \cdot 18 = 54$. $S_{ABCD} = 54$.

Ответ: 54.

832. Пусть O — центр вписанной в трапецию $ABCD$ окружности. Точка O лежит на средней линии (см. рис. 69) MN трапеции, так как равноудалена от прямых AD и BC. А поскольку $\angle BAD = 90°$, то и $\angle OMA$ — тоже прямой. Значит, M — точка касания. Поэтому, $MO = 5$. Пусть H — точка касания окружности со стороной CD. Тогда $\angle NHO = 90°$, $OH = 5$. Из прямоугольного треугольника OHN находим $ON = 2OH = 10$, то есть $MN = MO + ON = 15$.

Ответ: 15.

833. 1. Пусть O — центр окружности с диаметром AC. $AO = KO$ как радиусы, значит $\triangle AOK$ равнобедренный. Проведем высоту OM, тогда OM — медиана в $\triangle KOA \Rightarrow AK = 2AM = 2AO\cos\alpha = 18\cos\alpha$ (см. рис. 70).

2. В трапеции $ABCD$ проведем высоты DF и CK ($\angle CKA = 90°$ как опирающийся на диаметр AC). Пусть $2\alpha = 90°$, тогда DB совпадает с высотой $DF = FK$. И, значит, $CK = DB$. Но тогда $CK = 18\cos\alpha = 18\cos 45° =$

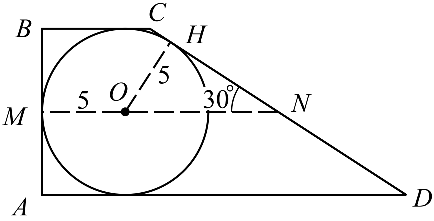

Рис. 69.

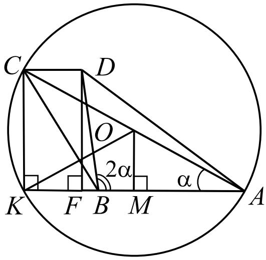

Рис. 70.

$= 9\sqrt{2} \neq 16 = DB$. Следовательно, $2\alpha \neq 90°$. Из $\triangle AKC$, $CK = AC\sin\alpha =$ $= 18\sin\alpha$. Из $\triangle BFD$ получаем: 1) если $2\alpha < 90°$, то $DF = BD\sin 2\alpha = 16\sin 2\alpha$; 2) если $2\alpha > 90°$, то $DF = BD\sin(180° - 2\alpha) = BD\sin 2\alpha =$

$= 16\sin 2\alpha$. Тогда $CK = DF$; $18\sin\alpha = 32\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{9}{16}$.

3. $AK = 18 \cdot \dfrac{9}{16} = \dfrac{81}{8} = 10{,}125$.

Ответ: 10,125.

834. Пусть $AC = 12$; $DB = 10$; $\angle OAB = x$, тогда $\angle OBA = 2x$ (см. рис. 71).

1. Высоту трапеции можно найти как $AC \cdot \sin x$. Пусть $2x = 90°$, тогда

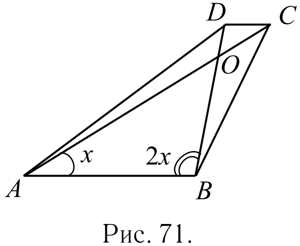

Рис. 71.

DB — высота трапеции. И, значит, $AC{\cdot}\sin x = 12{\cdot}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \neq 10 = DB$. Следовательно, $2x \neq 90°$.

2. Если $2x > 90°$, то высота трапеции будет равна $DB\sin(180°-2x) = DB\sin 2x$. Если $2x < 90°$, то высота трапеции будет равна $DB\sin 2x$. Тогда, с учетом п. 1, получаем $AC\sin x = DB\sin 2x$; $12\sin x = 10\sin 2x$, $\dfrac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{10}{12}$, $\dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{5}{6}$, $\cos x = \dfrac{3}{5}$, $\sin x = \dfrac{4}{5}$.

3. $S_{ADCB} = \dfrac{1}{2}AC{\cdot}DB\sin\angle AOB = \dfrac{1}{2}{\cdot}12{\cdot}10\sin\left(180° - (x+2x)\right) = 60\sin 3x$.

Найдём $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x =$
$= 2\sin x\cos^2 x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = \dfrac{108}{125} - \dfrac{64}{125} = \dfrac{44}{125}$.

Следовательно $S_{ADCB} = 60\cdot\dfrac{44}{125} = 21{,}12$.

Ответ: 21,12.

835.

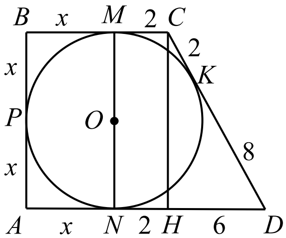

Рис. 72.

Проведем $MN \perp AD$ через центр вписанной окружности (см. рис. 72). Тогда точки M и N являются точками касания окружности со сторонами BC и AD соответственно.
$MC = CK = 2$ и $DK = DN = 8$ как отрезки касательных.
$BM = BP = PA = AN = x$ (аналогично). Опустим высоту CH.
$HD = DN - NH = 8 - 2 = 6$. Из $\triangle HCD$: $CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$; $CH = 8$.
$BA \parallel CH$, так как по условию $\angle BAD = 90°$. Следовательно, $BA = CH$ (как отрезки, заключенные между параллельными прямыми). Получаем, $2x = 8$; $x = 4$. Теперь найдем $P_{ABCD} = 4x + 2 + 10 + 8 = 20 + 16 = 36$.

Ответ: 36.

836. 1. Используя рисунок 73, имеем $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$;

$S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}$.

Так как $S_{ABD} = S_{ACD} = \dfrac{H \cdot AD}{2}$, то $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$;

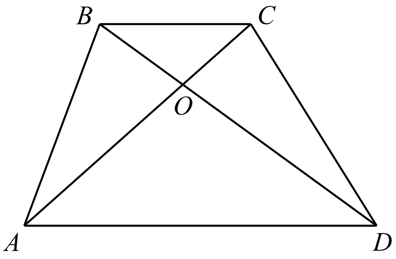

Рис. 73.

$S_{ABO} = S_{COD}$.

2. Из подобия треугольников BOC и AOD следует, $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = k^2 = \dfrac{1}{9}$, где k — коэффициент подобия; $S_{\triangle AOD} = 9S_{\triangle BOC}$.

3. Так как $OC = \dfrac{1}{3}AO$, то $S_{\triangle BOC} = \dfrac{1}{2}h \cdot OC = \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot \dfrac{1}{3}AO =$

$= \dfrac{1}{3}S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$. $S_{\triangle AOB} = 3S_{\triangle BOC}$. Получим:

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = 6 + 2 + 6 + 18 = 32$.

Ответ: 32.

837. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$ (см. рис. 74). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), значит $\dfrac{OH_1}{OH_2} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$. Так как $BC = \dfrac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия $\triangle APD$. Следовательно высота $\triangle BCC$ $PH = H_1H_2 = 3OH_1$. По условию $\dfrac{x \cdot OH_1}{2} = 3$, значит $S_{BOC} = \dfrac{x \cdot 3OH_1}{2} = 9 = S_{\triangle BPC}$.

$S_{PCOB} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle BOC} = 9 + 3 = 12$.

Ответ: 12.

839. 1) Из равенства $\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle A_3A_4A_5$ (см. рис. 75) имеем $A_1A_3 = A_3A_5$. $\angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_3A_4 - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_4A_3A_5$. Так как $\angle A_2A_3A_4 =$

$= \dfrac{180°(8-2)}{8} = 135°$ и $\angle A_2A_3A_1 + \angle A_4A_3A_5 = 180° - 135° = 45°$, то

$\angle A_1A_3A_5 = 90°$. Следовательно A_3A_5 — диаметр описанной окружности и $A_1A_3 = A_3A_5 = R\sqrt{2}$.

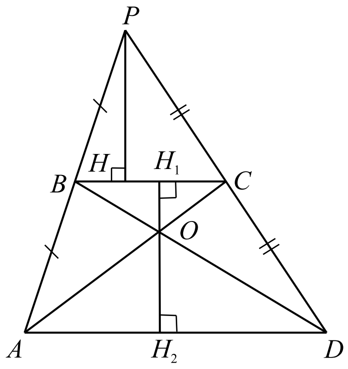

Рис. 74.

$S_{\triangle A_1A_3A_5} = \dfrac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_3A_5 = R^2$; $R^2 = 9$; $R = 3$.

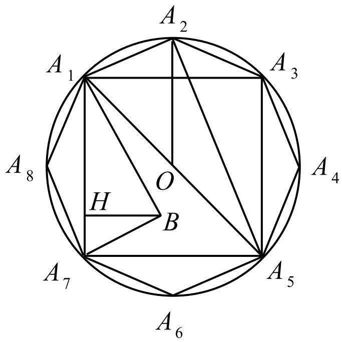

Рис. 75.

2) Так как $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, то $\angle A_2OA_5 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;

$S_{A_2OA_5} = \dfrac{1}{2} \cdot A_2O \cdot A_5O \cdot \sin 135^\circ = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

3) Из равенства $\triangle A_1A_8A_7$ и $\triangle A_1A_2A_3$ имеем $A_1A_7 = A_1A_3 = R\sqrt{2}$. Тогда, $S_{\triangle A_1A_7B} = \dfrac{1}{2}A_1A_7 \cdot BH = \dfrac{1}{2}R\sqrt{2} \cdot BH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot BH$. Учитывая, что по условию $\triangle A_1A_7B$ и $\triangle A_2OA_5$ равновелики, получаем $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}BH = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$;

$BH = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

840.

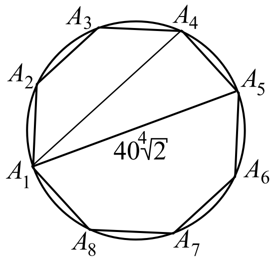

Рис. 76.

1) $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$; $180n - 360 = 135n$; $45n = 360$, $n = 8$, значит, дан правильный восьмиугольник (см. рис. 76).

2) $\angle A_1A_5A_4 = \angle A_1A_5A_6$ (как углы, опирающиеся на равные дуги $\smile A_1A_2A_4$ и $\smile A_1A_8A_6$). Следовательно, $\angle A_1A_5A_4 = \dfrac{1}{2}\angle A_5 = \dfrac{1}{2}\cdot 135^\circ = 67{,}5^\circ$.

3) Из четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ следует $\angle A_3A_4A_1 + \angle A_2A_1A_4 =$ $= 360^\circ - \angle A_1A_2A_3 - \angle A_2A_3A_4 = 360^\circ - 2\cdot 135^\circ = 90^\circ$. $\angle A_3A_4A_1 =$ $= \angle A_2A_1A_4 = 45^\circ$. Тогда $\angle A_1A_4A_5 = \angle A_3A_4A_5 - \angle A_3A_4A_1 =$ $= 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Следовательно, A_1A_5 — диагональ описанной окружности. Сторона восьмиугольника $a_8 = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{8}$, где $2R = A_1A_5 = 40\sqrt[4]{2}$; $a_8 = 40\sqrt[4]{2}\cdot\sin 22{,}5^\circ$.

4) $S_{A_1A_4A_5} = \dfrac{1}{2}A_1A_5\cdot A_4A_5\cdot\sin\angle A_4A_5A_1 =$

$$= \frac{1}{2}\cdot 40\sqrt[4]{2}\cdot 40\sqrt[4]{2}\cdot\sin 22{,}5^\circ\cdot\sin 67{,}5^\circ = 800\sqrt{2}\sin 22{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ =$$

$$= 400\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ = 400\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 400.$$

Ответ: 400.

841. Так как двенадцатиугольник правильный, то $\angle A_6OA_9$ равен $3\cdot\dfrac{360^\circ}{12} = 90^\circ$ (см. рис. 77). Обозначим через r радиус, описанной около двенадцатиугольника окружности. Тогда, площадь треугольника

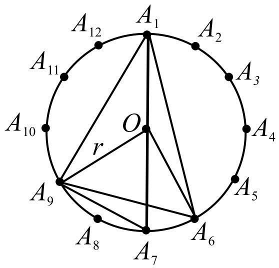

Рис. 77.

$$S_{\triangle A_6OA_9} = \frac{1}{2}A_6O \cdot A_9O = \frac{1}{2}r^2.$$

$$S_{\triangle A_1OA_9} = \frac{1}{2}A_1O \cdot A_9O \sin 120^\circ = \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4};$$

$$S_{\triangle A_7OA_9} = \frac{1}{2}A_7O \cdot A_9O \sin 60^\circ = \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Откуда, $S_{\triangle A_1A_7A_9} = S_{\triangle A_1OA_9} + S_{\triangle A_7OA_9} = \dfrac{\sqrt{3}r^2}{2}$, учитывая, что $S_{\triangle A_1A_7A_9} = 6\sqrt{3}$, то $\dfrac{\sqrt{3}r^2}{2} = 6\sqrt{3}$, $r^2 = 12 \Rightarrow S_{\triangle A_6OA_9} = 6$.

Ответ: 6.

842. Пусть $A_1A_2 = a$, $a > 0$, тогда так как $\triangle OA_1A_2$ — равносторонний, (покажите это) то $OB_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 78).

$$S_{A_1A_2A_3A_6} = 3 \cdot S_{A_1OA_2} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{B_1OB_2} = 3 \cdot OB_1 \cdot OB_2 \sin\angle B_1OB_2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin 60^\circ = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6}}{S_{A_1A_2A_3A_6}} = \frac{9 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}}{3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

844. Углы APH и ADP равны, так как каждый из них в сумме с углом

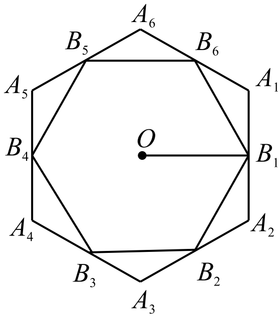

Рис. 78.

PAH даёт 90° (см. рис. 79).

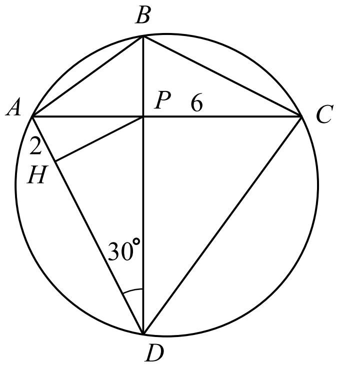

Рис. 79.

Следовательно $\angle APH = 30^\circ$. $AP = \dfrac{AH}{\sin 30^\circ} = 4$.

$PD = AP \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (см. рисунок). Углы DAC и DBC равны, как опирающиеся на одну дугу. $\angle BPC = \angle APD$ (как вертикальные). Следовательно, треугольники ADP и BCP подобны.

$AP : PD = BP : PC$. $BP = \dfrac{AP \cdot PC}{DP} = 2\sqrt{3}$.

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DP \cdot AC}{\frac{1}{2}PB \cdot AC} = \frac{DP}{BP} = 2.$$

Ответ: 2.

845. Так как $O_1A = 3$, $O_2A = 4$, $O_1O_2 = 5$, то $\triangle O_1O_2A$ является прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора (см. рис. 80).

$$S_{O_1O_2A} = \frac{1}{2} \cdot O_1O_2 \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{O_1O_2A}}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2} = \frac{12}{5}.$$

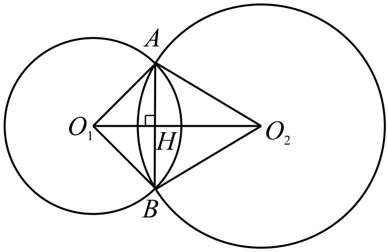

Рис. 80.

$$AB = 2 \cdot AH = \frac{24}{5}.$$

Ответ: 4,8.

846. Пусть ℓ_{BC} — длина дуги BC (см. рис. 81); $\angle BAC = \alpha$. Тогда

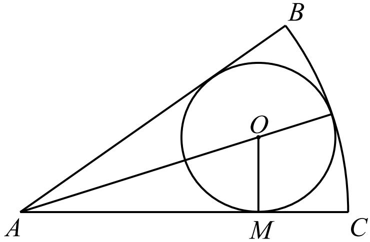

Рис. 81.

$\ell_{BC} = \alpha \cdot AC =$
$= \alpha \cdot 9 = 9\alpha.$
$P_{\text{сект.}} = AB + \ell_{BC} + AC = 2 \cdot 9 + 9\alpha = 18 + 9\alpha.$

По условию $P_{\text{сект.}} = 18 + 3\pi$, значит $9\alpha = 3\pi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. $\angle CAO =$ $= \angle BAO = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Пусть r — радиус окружности, вписанной в сектор. Из $\triangle AOM$: $\sin\angle OAM = \dfrac{OM}{AO}$; $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{r}{9-r}$; $\dfrac{r}{9-r} = \dfrac{1}{2}$; $r = 3$.

Ответ: 3.

847. Длина окружности радиусом 3 дм равна 6π дм, тогда скорость, с которой ползёт муха, равна $\dfrac{6\pi}{10}$ дм/мин. Диаметр окружности равен 6 дм, тогда искомое время равно $6 : \dfrac{6\pi}{10} = \dfrac{10}{\pi}$ (мин.). Округлив до целых, получим 3.

Ответ: 3.

848. Площадь прямоугольника 2 м $\times$ 3 м равна 6 м^2, значит, для окрашивания 1 м^2 необходимо 100 г краски. Площадь круга радиусом 5 м равна 25π м^2, значит, для его окрашивания нужно 2500π г $=$ $2{,}5\pi$ кг краски. Округлив до целых, получим 8.

Ответ: 8.

849. Рассмотрим рисунок 82, где AB — данный отрезок.

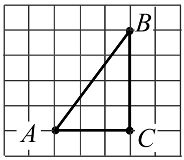

Рис. 82.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 +$ $+ BC^2$, $AB^2 = 3^2 + 4^2$, $AB^2 = 25$, $AB = 5$.

Ответ: 5.

850. $\triangle ABC$ — прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, $AB = 10$.

Ответ: 10.

851. По рисунку можно найти координаты точек: $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(3;2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(3-1;5-1)$, $\overrightarrow{AB}(2;4)$; $\overrightarrow{AC}(3-1;2-1)$, $\overrightarrow{AC}(2;1)$. Тогда $|\overrightarrow{AB}| =$ $= \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Таким образом, $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}| =$ $= \sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$.