9.34. ЕГЭ-а-33(2010), Восемь задач с решениями-3

Лекция 33, Алгебра
Математика для 11 класса

а33-1. Решите неравенство
$\log_{\frac{16-x^2}{12}}\big(|x|-3\big)^2 \geqslant \log_{\sqrt{\frac{16-x^2}{12}}}\big(6x^2+5x+1\big)$.

♦ $x \in (-4;\ -3)\bigcup(-3;\ -2)\bigcup[-1;\ -\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\ \frac{-3+\sqrt{21}}{6}]\bigcup(2;\ 3)\bigcup(3;\ 4)$.

♦ Решение.

$\log_{\frac{16-x^2}{12}}\big(|x|-3\big)^2 \geqslant \log_{\sqrt{\frac{16-x^2}{12}}}\big(6x^2+5x+1\big)$

$\Leftrightarrow 2\log_{\frac{16-x^2}{12}}\big||x|-3\big| \geqslant 2\log_{\frac{16-x^2}{12}}\big(6x^2+5x+1\big)$

$\Leftrightarrow(\star)\ \ \log_{\frac{16-x^2}{12}}\big||x|-3\big| \geqslant \log_{\frac{16-x^2}{12}}\big(6x^2+5x+1\big)$.

(1) Найдем ОДЗ, $\begin{cases}(|x|-3)^2>0,\\ \frac{16-x^2}{12}>0\bigcap\frac{16-x^2}{12}\neq 1,\\ 6x^2+5x+1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}|x|\neq 3,\\ 16-x^2>0\bigcap 16-x^2\neq 12,\\ 6x^2+5x+1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(-4;-3)\bigcup(-3;-2)\bigcup(-2;-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};2)\bigcup(2;3)\bigcup(3;4)$.

(2) Пусть $\begin{cases}\frac{16-x^2}{12}>1,\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;\ 2)$. Тогда $|x|=x$,

$\big||x|-3\big|=|x-3|=3-x$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ больше 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ возрастает на своей области определения,

поэтому $(\star)\ \ \Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|\geqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in[0;\ 2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\geqslant 6x^2+5x+1,\\ x\in[0;\ 2),\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+6x-2\leqslant 0,\\ x\in[0;\ 2),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+3x-1\leqslant 0,\\ x\in[0;\ 2),\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;\ \frac{-3+\sqrt{21}}{6}]$.

(3) Пусть $\begin{cases}\frac{16-x^2}{12}>1,\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;\ 0)$. Тогда $|x|=-x$,

$\big||x|-3\big|=|-x-3|=3+x$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ больше 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ возрастает на своей области определения,

поэтому $(\star)\ \ \Leftrightarrow\begin{cases}3+x\geqslant 6x^2+5x+1>0,\\ x\in(-2;\ 0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+4x-2\leqslant 0,\\ 6x^2+5x+1>0,\\ x\in(-2;\ 0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+2x-1\leqslant 0, \\ x\in(-\infty;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,+\infty), \\ x\in(-2;\,0) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x\in[-1;\,\frac{1}{3}], \\ x\in(-\infty;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,+\infty), \\ x\in(-2;\,0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in[-1;\,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{3};\,0)$.

(4) Пусть $\begin{cases} 0<\frac{16-x^2}{12}<1, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;\,4)$. Тогда $|x|=x$, $||x|-3|=|x-3|$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ лежит строго в пределах от 0 до 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ убывает на своей области определения, поэтому

$(\star)\quad \Leftrightarrow 0<|x-3|\leqslant 6x^2+5x+1$.

(4a) $\begin{cases} x-3\leqslant 6x^2+5x+1, \\ x\in(3;4), \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+4x+4\geqslant 0, \\ x\in(3;4), \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3;4)$,

(4b) $\begin{cases} 3-x\leqslant 6x^2+5x+1, \\ x\in(2;3), \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+6x-2\geqslant 0, \\ x\in(2;3), \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+3x-1\geqslant 0, \\ x\in(2;3), \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(2;3)$,

(5) Пусть $\begin{cases} 0<\frac{16-x^2}{12}<1, \\ x\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-4;\,-2)$. Тогда $|x|=-x$, $||x|-3|=|-x-3|$, основание логарифма $a=\frac{16-x^2}{12}$ лежит строго в пределах от 0 до 1, так что функция $f(t)=\log_a t$ убывает на своей области определения, поэтому $(\star)\quad \Leftrightarrow 0<|-x-3|\leqslant 6x^2+5x+1$.

(5a) $\begin{cases} 3+x\leqslant 6x^2+5x+1, \\ x\in(-3;-2) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+4x-2\geqslant 0, \\ x\in(-3;-2) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+2x-1\geqslant 0, \\ x\in(-3;-2), \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(-3;-2)$.

(5b) $\begin{cases} -3-x\leqslant 6x^2+5x+1, \\ x\in(-4;-3) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+6x+4\geqslant 0, \\ x\in(-4;-3) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+3x+2\geqslant 0, \\ x\in(-4;-3), \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(-4;-3)$.

а33-2. Диоген, живущий в бочке в виде прямого кругового цилиндра с радиусом r и высотой h, одно из оснований которого лежит на плоской (как он думал) земле, решил соорудить для защиты своего жилища от дождя шатер в виде правильной четырехугольной пирамиды, внутри которой должна поместиться бочка целиком. Каковы должны быть сторона основания и высота пирамиды, чтобы налог на ее строительство был наименьшим, если известно, что величина налога по законам той местности равна объему пирамиды?

♦ $3r$, $3h$ ♦ Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна $2x+2r$. Тогда площадь основания пирамиды равна $4(x+r)^2$. Пусть высота

пирамиды равна $h+y$, тогда из подобия треугольников найдем $y=\frac{hr}{x}$,
$V=\frac{1}{3}4(x+r)^2\big(h+y\big)$, $V=\frac{1}{3}4(x+r)^2\big(h+\frac{hr}{x}\big)$,
$V'=\frac{4}{3}\Big(2(x+r)\big(h+\frac{hr}{x}\big)+(x+r)^2\big(-\frac{hr}{x^2}\big)\Big)$,
$V'=\frac{4}{3}(x+r)\Big(2\big(h+\frac{hr}{x}\big)+(x+r)\big(-\frac{hr}{x^2}\big)\Big)$,
$V'=\frac{4}{3}(x+r)\Big(2h+\frac{2hr}{x}-(x+r)\frac{hr}{x^2}\Big)$,
$V'=\frac{4}{3x^2}(x+r)\Big(2hx^2+2hrx-xhr-hr^2\Big)$, $V'=\frac{4h}{3x^2}(x+r)\Big(2x^2+rx-r^2\Big)$,
$V'=\frac{4h}{3x^2}(x+r)(x+r)(2x-r)$, точка минимума $x=\frac{r}{2}$, основание $3r\cdot 3r$, тогда $y=2h$, высота $3h$.

а33-3. В начале года предприниматель положил 3 доли своего капитала в банк $\mathcal{A}$, остальные 4 доли – в банк $\mathcal{B}$. Каждый банк начисляет проценты на вклад в конце года и прибавляет их к сумме вклада. В конце года сумма двух вкладов стала равной 200 у. е., в конце следующего года – 364 у. е. Если бы первоначально 4 доли своего капитала были положены в банк $\mathcal{A}$, а оставшиеся 3 доли – в банк $\mathcal{B}$, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 192 у. е. Найдите величину капитала и банковский процент каждого из банков.

♦ 112, 50%, 100%. ♦ Решение. Пусть величина капитала равна $7A$, банковский процент первого банка равен $n\%$, $p=1+\frac{n}{100}$, банковский процент второго банка равен $m\%$, $q=1+\frac{m}{100}$. Тогда условия задачи равносильны $\begin{cases}3Ap+4Aq=200,\\3Ap^2+4Aq^2=364,\\4Ap+3Aq=192,\end{cases}$ $\begin{cases}3Ap+4Aq=200,\\3Ap^2+4Aq^2=364,\\7Ap+7Aq=392,\\Ap-Aq=-8,\end{cases}$

$\begin{cases}3Ap+4Aq=200,\\3Ap^2+4Aq^2=364,\\7Ap+7Aq=392,\\7Ap-7Aq=-56,\end{cases}$ $\begin{cases}3Ap+4Aq=200,\\3Ap^2+4Aq^2=364,\\14Ap=392-56=336,\\14Aq=392+56=448,\end{cases}$ $\begin{cases}3Ap+4Aq=200,\\3Ap^2+4Aq^2=364,\\Ap=24,\\Aq=32,\end{cases}$

$\begin{cases}3p*24+4q*32=364,\\p=3x,\\q=4x,\end{cases}$ $\begin{cases}18p+32q=91,\\p=3x,\\q=4x,\end{cases}$ $\begin{cases}18*3x+32*4x=91,\\p=3x,\\q=4x,\end{cases}$

$54x+128x=91$, $182x=91$, $x=\frac{1}{2}$, $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{4}{2}=2$, $A=16$, $7A=112$.

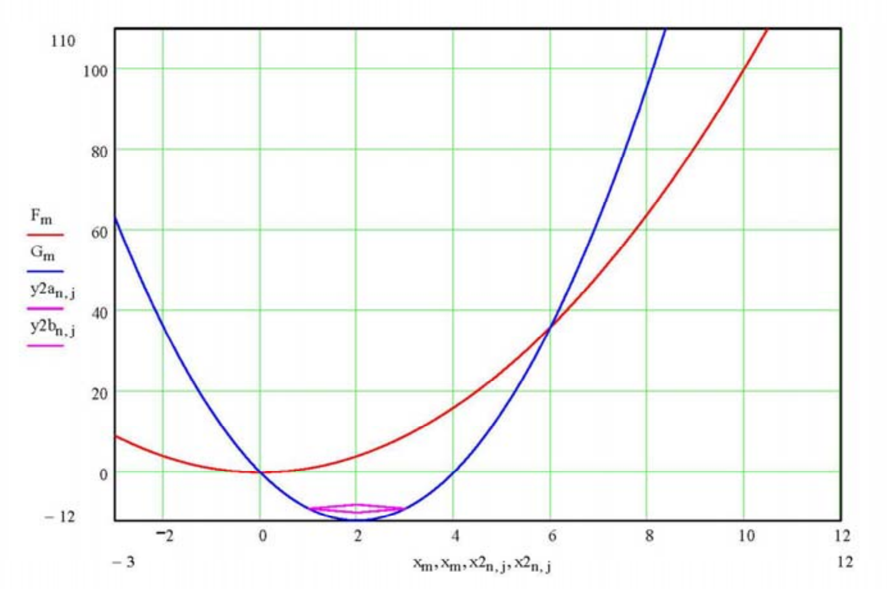
а33-4. Найдите все значения параметра q, при которых найдется по крайней мере одно значение параметра p такое, что система $\begin{cases} 3x^4 - 12x^3 - 4x^2y + 12xy + y^2 \geqslant 0, \\ |x-p| + |y-q| \leqslant 1 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

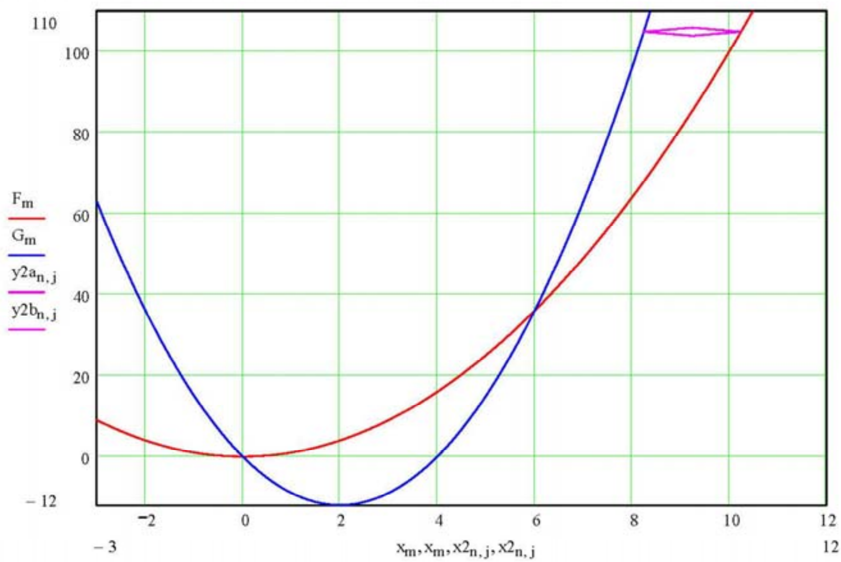
♦ 1) $(p;q) = (2;-9)$, 2) $(p;q) = (1-\sqrt{6};6)$, 3) $(p;q) = (1+\sqrt{6};6)$, 4) $(p;q) = (5+\sqrt{18};54+12\sqrt{18})$. 5) $(p;q) = (5-\sqrt{18};54-12\sqrt{18})$, это решение должно быть отброшено. ♦

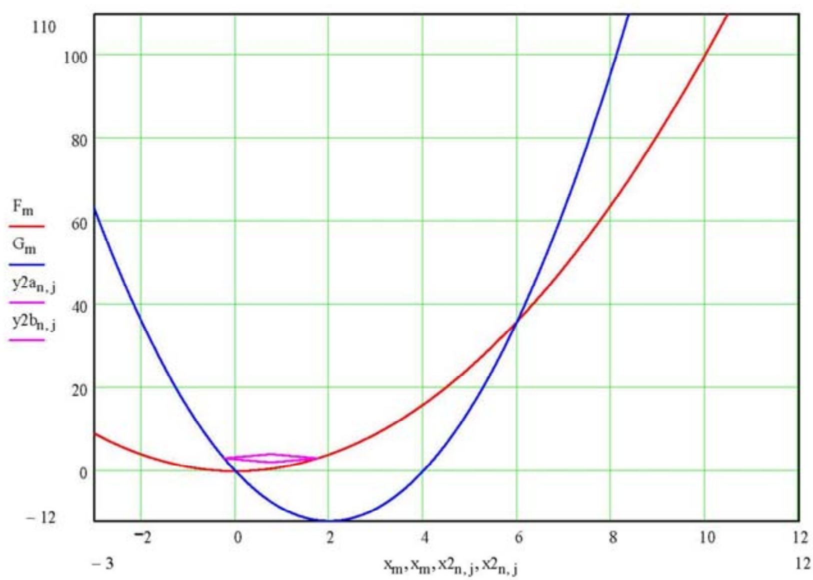
Решение Решение.

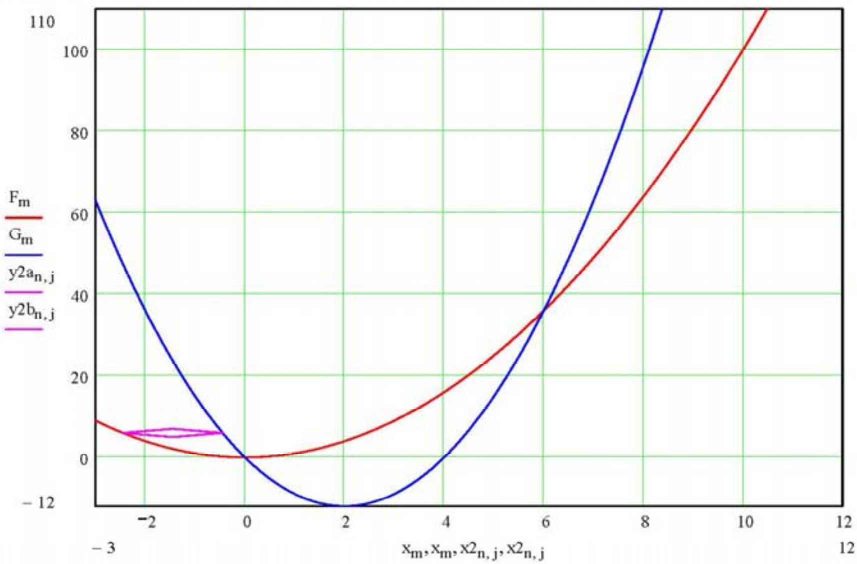
(1) Разложим на множители квадратный трехчлен относительно y и найдем корни, $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 3x^2 - 12x$, или $x_{1,2}(y) = \pm\sqrt{y} \bigcap y \geqslant 0$, $x_{3,4}(y) = 2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{36+3y} \bigcap y \geqslant -12$. Далее рассмотрим различные варианты расположения квадрата на плоскости, см. рис.

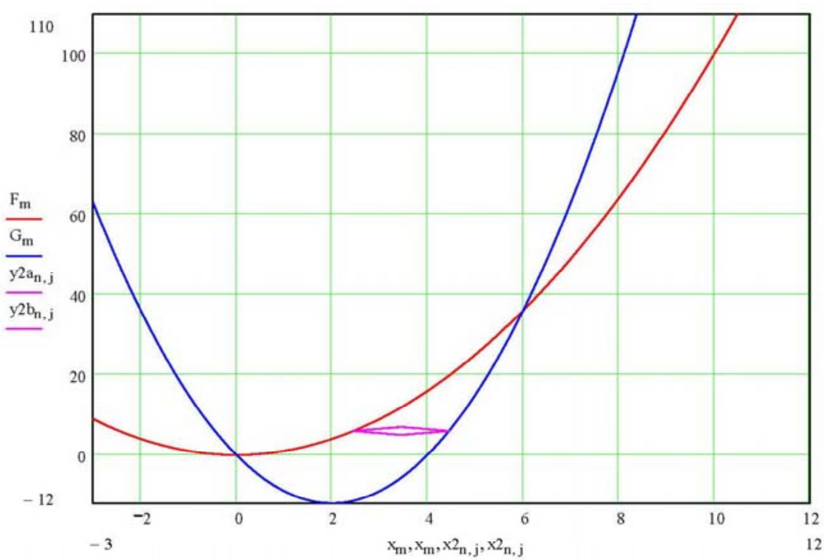
(2) $y = (x-2)^2$, $y = 3x^2 - 12x$,




F_m
G_m
$y2a_{n,j}$
$y2b_{n,j}$
$x_m, x_m, x2_{n,j}, x2_{n,j}$


F_m
G_m
$y2a_{n,j}$
$y2b_{n,j}$
$x_m, x_m, x2_{n,j}, x2_{n,j}$


110
100
80
60
40
20
0
– 12
F_m
G_m
$y2a_{n,j}$
$y2b_{n,j}$
−2 0 2 4 6 8 10 12
– 3
$x_m, x_m, x2_{n,j}, x2_{n,j}$
12


110
100
80
60
40
20
0
– 12
F_m
G_m
$y2a_{n,j}$
$y2b_{n,j}$
−2 0 2 4 6 8 10 12
– 3
$x_m, x_m, x2_{n,j}, x2_{n,j}$
12

$(x-2)^2 = 3x^2 - 12x$, $x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 12x$, $2x^2 - 8x - 4 = 0$,
$x^2 - 4x - 2 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{6}$, $y = 6$, $p = x - 1 = 1 \pm \sqrt{6}$,
$p_1 = 1 - \sqrt{6}$, $p_1 = 1 + \sqrt{6}$,
(3) $y = (x+2)^2$, $y = 3x^2 - 12x$, $(x+2)^2 = 3x^2 - 12x$,
$x^2 + 4x + 4 = 3x^2 - 12x$, $2x^2 - 16x - 4 = 0$, $x^2 - 8x - 2 = 0$,
$x = 4 \pm \sqrt{18}$, $x + 2 = 6 \pm \sqrt{18}$, $y = 36 + 18 \pm 12\sqrt{18}$,
$p = x + 1 = 5 \pm \sqrt{18}$, $q = 54 \pm 12\sqrt{18}$, и т.д. ■

а33-5. В равнобедренной трапеции $ABCD$, $AB = CD$, известно что $\angle ADB = 60°$. На прямой AD существует по крайней мере одна точка E такая, что $AE = 4$, $EC = 2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

♦ $\sqrt{3}$. ♦ Решение. $\angle CAD = \angle ADB$, по теореме косинусов
$CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cos\angle CAD$, $12 = 16 + AC^2 - 2 \cdot 4 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$,
$AC^2 - 4AC + 4 = 0$, $AC = 2$, $BD = AC = 2$, $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$.

а33-6. Найдите все точки минимума и точки максимума функции $f(x) = \left|x^3 - 9x^2 + 15x\right|$.

♦ **(1)** $x_{(\min)} = 0$, **(2)** $x_{(\max)} = 1$, **(3)** $x_{(\min)} = \dfrac{9-\sqrt{21}}{2}$,
(4) $x_{(\min)} = \dfrac{9+\sqrt{21}}{2}$, **(5)** $x_{\max} = 5$. ♦ Решение. Заметим, что

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 15x, \ x \in [0; \frac{9-\sqrt{21}}{2}] \bigcup [\frac{9+\sqrt{21}}{2}; +\infty), \\ -(x^3 - 9x^2 + 15x), \ x \in (-\infty; 0] \bigcup [\frac{9-\sqrt{21}}{2}; \frac{9+\sqrt{21}}{2}], \end{cases}$$ Если

$f_1(x) = 3x^2 - 18x + 15$, $f_1'(x) = 3x^2 - 18x + 15$, $f_1'(x) = 3(x^2 - 6x + 5)$,
$f_1'(x) = 3(x-1)(x-5)$,
(6) точка $x = 1$ расположена на промежутке $(0;;\ \frac{9-\sqrt{21}}{2})$, где $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$, это точка максимума,
(7) точка $x = 5$ расположена на промежутке $(\frac{9-\sqrt{21}}{2};\ \frac{9+\sqrt{21}}{2})$, где $f(x) = -(x^3 - 9x^2 + 15x)$, это точка максимума, еще две точки минимума соответствуют нулям функции
(8) $f(x) = |x| \cdot \left|x^2 - 9x + 15\right|$,

а33-7. Найдите наименьшее положительное значение x, при котором найдется такое y, что равенство

$$z^2 + 2\cos^2 x + 2y^2 + y\cos x - 2z\cos x - 2yz - \frac{9}{16} = 0$$

будет верным хотя бы при одном значении z.

♦ $\frac{\pi}{6}$. ♦ Решение.

(1) Пусть $\cos x = X$, $z^2 + 2X^2 + 2y^2 + Xy - 2Xz - 2yz - \frac{9}{16} = 0$,

$z^2 - 2Xz - 2yz + 2X^2 + 2y^2 + Xy - \frac{9}{16} = 0$,

$z^2 - 2z(X + y) + 2X^2 + 2y^2 + Xy - \frac{9}{16} = 0$, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть не меньше нуля,

$(X + y)^2 - 2X^2 - 2y^2 - Xy + \frac{9}{16} \geqslant 0$,

$X^2 + 2Xy + y^2 - 2X^2 - 2y^2 - Xy + \frac{9}{16} \geqslant 0$, $-X^2 + Xy - y^2 + \frac{9}{16} \geqslant 0$,

$y^2 - Xy + X^2 - \frac{9}{16} \leqslant 0$,

(2) дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть не меньше нуля, $X^2 - 4X^2 + 4 \cdot \frac{9}{16} \geqslant 0$, $-3X^2 + \frac{9}{4} \geqslant 0$, $X^2 \leqslant \frac{3}{4}$,

(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant X \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$,

(4) $x_{\min} = \frac{\pi}{6}$.

а33-8. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$, опущенная из вершины S, равна $2\sqrt{6}$, а высота треугольника ABC, лежащего в основании, равна $3\sqrt{3}$. На ребрах SA, SB, SC соответственно взяты точки M, N, K так, что $MA = 2$, $NB = 3$, объем пирамиды $SMNK$ равен $\sqrt{18}$. Найдите
(1) длину бокового ребра пирамиды, **(2)** длину отрезка CK,
(3) величину угла между плоскостями ABC и MNK,
(4) наибольший возможный радиус шара, который может быть размещен внутри многогранника $ABCMNK$ (т.е. ни одна точка шара не находится вне указанного многогранника, но некоторые точки шара могут лежать на гранях).

♦ **(1)** 6, **(2)** 3, **(3)** $\arccos \frac{11}{\sqrt{129}}$, ♦ Решение. Пусть точка H есть основание высоты SH. Тогда **(4)** $AH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

(5) $AS = \sqrt{12 + 24} = 6$,

(6) $SM = 6 - 2 = 4$, **(7)** $SN = 6 - 3 = 3$, **(8)** $S_{SMN} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 3\sqrt{3}$,

(9) $V_{SMNK} = \frac{1}{3} \cdot S_{SMN} \cdot h_{K \Leftrightarrow SMN} = 3\sqrt{2}$, **(10)** $\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot h_{K \Leftrightarrow SMN} = 3\sqrt{2}$,

$\sqrt{3} \cdot h_{K \Leftrightarrow SMN} = 3\sqrt{2}$, $h_{K \Leftrightarrow SMN} = \sqrt{6}$, $\begin{cases} h_{K \Leftrightarrow SMN} = \sqrt{6}, \\ h_{C \Leftrightarrow SAB} = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow SK : SC = 1 : 2$

$\Leftrightarrow SK = KC = 3$.

(11) Пусть P – середина BC, Пусть Q – середина NK, далее указываем только $(x;y)$ $H(0;0)$, $P(\sqrt{3};0)$, $S(0;2\sqrt{6})$, $Q(\frac{1}{2}\sqrt{3};\sqrt{6})$, $A(-2\sqrt{3};0)$, $M(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\,\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{MQ}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3};\,\sqrt{6}-\frac{\cdot 2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{MQ}=(\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{6};\,\frac{3\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{MQ}=(\frac{11\sqrt{3}}{6};\,\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{6})$, $\overrightarrow{mq}=(11;\,2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AP}=(3\sqrt{3};\,0)$, $\overrightarrow{ap}=(1;\,0)$, $|\overrightarrow{mq}|=\sqrt{121+8}=\sqrt{129}$, $|\overrightarrow{ap}|=1$, $(\overrightarrow{mq},\overrightarrow{ap})=11$, $\angle(\overrightarrow{mq},\overrightarrow{ap})=\arccos\frac{11}{\sqrt{129}}$, $\angle(\overrightarrow{mq},\overrightarrow{ap})=\arcsin\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{129}}$, $\angle(\overrightarrow{mq},\overrightarrow{ap})=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8}}{11}$.