## 8.2. ЕГЭ-а-46(2010), Сорок девять задач с решениями

**Лекция 46, Алгебра**

### 8.2.1. Т329(2011-2012) 49 задач по различным темам с решениями и указаниями

**а46-1.** Если точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ на плоскости $(x;\ y)$ с координатами $(0;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(2t-6;\ 3t-7)$ лежат на одной прямой, то

$\boxed{1}$ $t=1$ $\boxed{2}$ $t=2$ $\boxed{3}$ $t=3$ $\boxed{4}$ $t=4$ $\boxed{5}$ $t=5$

Ответ $\boxed{5}$♦ $t=5$. Если точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой, то угловые коэффициенты прямых, содержащих отрезки $[M_1; M_2]$ и $[M_1; M_3]$ равны. Поэтому $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$. Для вычисления $t$ получится линейное уравнение, которое имеет единственное решение.

**а46-2.** Сосна на 25% выше елки. Если каждое дерево подрастет на 18 м, то сосна будет на 10% выше елки. Первоначальная высота елки (в метрах) равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{2}$♦ остаток 2; $x=12$. Пусть $x$ — первоначальная высота елки. Из условия задачи следует, что $\dfrac{1,25x+18}{x+18}=1,1$. При приведении подобных членов не следует умножать $1,1\cdot 18$, вличина $x$ определяется из уравнения $0,15x=0,1\cdot 18$.

**а46-3.** Сумма всех различных корней уравнения

$\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{36}{x^2}+\dfrac{4}{x}=0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ 4; $\Sigma=\dfrac{36}{4}=9$. Уравнение равносильно $\begin{cases} x\neq 0,\\ 4x^2-36x+3=0.\end{cases}$

**а46-4.** Найдите наибольшую длину отрезка числовой оси, координаты всех точек которого удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |x-1|\geqslant 5,\\ |x-4|\leqslant 8.\end{cases}$

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 6

Ответ $\boxed{5}$♦ $\begin{cases} |x-1|\geqslant 5,\\ |x-4|\leqslant 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;\ -4]\bigcup[6;\ +\infty,\\ x\in[-4;\ 12].\end{cases}$ Длина равна 6; $x\in\{-4\}\bigcup[6;\ 12]$.

**а46-5.** Если $a_n$ — арифметическая прогрессия, $a_2+a_5+a_{11}=24$, то значение выражения $a_7+a_5$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{1}$♦ Остаток равен 1. $a_7+a_5=\frac{a_2+a_5+a_{11}}{3}\cdot 2$.

**а46-6.** Если $x=9$ и $y=4$, то число, равное значению выражения $\dfrac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}+\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$, в десятичном представлении содержит на первом месте после запятой цифру

$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ 8 $\boxed{5}$ 1

Ответ $\boxed{2}$♦ $\frac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}+\frac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}=\dfrac{2\cdot 3}{5}=1{,}2$.

**а46-7.** Наименьший положительный корень уравнения $\cos 2x=4\cos x+4\sin x$ расположен на промежутке

$\boxed{1}$ $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ $\boxed{2}$ $\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\boxed{3}$ $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{4}\right]$ $\boxed{4}$ $\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \pi\right]$ $\boxed{5}$ $(\pi;\ 2\pi]$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x=\dfrac{3\pi}{4}$. $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=4(\cos x+\sin x)\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-4)=0\Leftrightarrow$ $\left[\begin{aligned}&\cos x+\sin x=0,\\ &\cos x-\sin x-4=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \cos x+\sin x=0.$

**а46-8.** Один из корней уравнения $x-5=\sqrt{x+7}$ равен натуральному числу. Найдите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ Выполним замену $\sqrt{x+7}=t$, $t^2-7-5=t$, $t^2-t-12=0$, $\begin{cases} t\in\{4;\ -3\}, \\ t\geqslant 0, \end{cases}$ $t=4$, $\sqrt{x+7}=4$, $x+7=16$, $x=9$.

**а46-9.** Если число $\dfrac{23}{33}$ преобразовать в бесконечную периодическую десятичную дробь, то сумма первой и второй цифр после запятой будет равна

$\boxed{1}$ 12 $\boxed{2}$ 6 $\boxed{3}$ 15 $\boxed{4}$ 17 $\boxed{5}$ 9

Ответ $\boxed{3}$♦ $\dfrac{23}{33}=\dfrac{69}{99}=0{,}(69)$.

**а46-10.** Наибольшая возможная длина отрезка числовой оси, все точки которого являются решениями неравенства

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqslant \operatorname{tg} x\leqslant 1,$ равна

$\boxed{1}$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{5\pi}{12}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{7\pi}{12}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{\pi}{2}$

Ответ $\boxed{3}$♦ $x\in[-\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n], n\in\mathbf{Z}$, $\dfrac{\pi}{4}-(-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{5\pi}{12}$.

**а46-11.** Найдите все значения параметра $m$, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x+(m+1)y=3, \\ (m-1)x+5y=m-1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений. Укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ существует ровно одно такое значение $m$, причем $m<0$

$\boxed{2}$ существует ровно одно такое значение $m$, причем $m>0$

$\boxed{3}$ таких значений $m$ бесконечно много

$\boxed{4}$ существует ровно два таких значения $m$

$\boxed{5}$ таких значений $m$ не существует

Ответ $\boxed{4}$♦ $m=\pm 4$. Решение. $3\cdot 5-(m+1)(m-1)=0$, $15-m^2+1=0$, $m\in\{-4;\ 4\}$. **(1)** $m=4$, $\begin{cases} 3x+(m+1)y=3, \\ (m-1)x+5y=m-1 \end{cases}$ $llra$ $\begin{cases} 3x+5y=3, \\ 3x+5y=3, \end{cases}$ годится. **(2)** $m=-4$, $\begin{cases} 3x+(m+1)y=3, \\ (m-1)x+5y=m-1 \end{cases}$ $llra$ $\begin{cases} 3x-3y=3, \\ -5x+5y=-5, \end{cases}$ годится.

**а46-12.** Сумма всех различных значений параметра $p$, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x+7y=p, \\ xy=4+p \end{cases}$ имеет единственное решение, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ Запишем систему в виде $\begin{cases} mx+ny=p, \\ xy=b+p \end{cases}$; $\begin{cases} mx+ny=p, \\ (mx)(ny)=mn(b+p) \end{cases}$, Эта система равносильна квадратному уравенению $(mx)^2-p(mx)+mn(b+p)=0$. В соответствии с теоремой Виета единственное решение будет при условии $p^2-4mnp-4mnb=0$, $p_1+p_2=4mn$. $p_1+p_2=4\cdot 3\cdot 7=\dots 4$.

**а46-13.** Найдите площадь квадрата на плоскости $(x;\ y)$, две противоположные вершины которого находятся в точках, координаты которых $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=16, \end{cases}$ и укажите в ответе остаток от деления ближайшего натурального числа на 5

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{2}$♦ остаток 2; $S=17$; $x+y=p$; $xy=q$; $x^2-px+q=0$; $x=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$; $y=\dfrac{p\pm\left(-\sqrt{p^2-4q}\right)}{2}$; $\Delta x=\Delta y=\sqrt{p^2-4q}$; $S=\Delta x\cdot\Delta y=p^2-4q$.

**а46-14.** Все значения параметра $a$, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=0{,}75x-a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения, образуют множество

$\boxed{1}$ $a\in(-\sqrt{20};\ \sqrt{20})$ $\boxed{2}$ $a\in(-5;\ 5)$ $\boxed{3}$ $a\in(-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$ $\boxed{4}$ $a\in(-10;\ 10)$ $\boxed{5}$ $a\in(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$

Ответ $\boxed{2}$♦ $a\in(-5;\ 5)$. Решение. Пусть $R=4;\ k=0,75;\ x^2+y^2=R^2;\ y=kx-a;\ x^2+(kx-a)^2=R^2;$ $(1+k^2)x^2-2kax+a^2-R^2=0;\ a\in(-A;\ A);\ A=R\cdot\sqrt{1+k^2}=4\cdot\sqrt{25/16}.$

**а46-15.** Если гипербола $y=\frac{b}{4x}$, $b\neq 0$, и прямая $y=6-4x$ имеют единственную общую точку, то $b$ — натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ Решение. Пусть $b=9;\ m=6;\ n=4,$ Тогда $\dfrac{b}{4x}=m-nx;\ nx^2-mx+\dfrac{b}{4}=0;\ b=\dfrac{m^2}{n}.$

**а46-16.** Разность наибольшего и наименьшего значений функции $y=3\sin^2 x-2\sqrt{\cos^2 x}$ равна

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

Ответ $\boxed{5}$♦ Пусть $z=|\cos x|$, $z\in[0;\ 1]$. Тогда $y=-3z^2-2z+3$, $y=-3\big(z^2+\dfrac{2}{3}z\big)+3$, $y=-3\big(z+\dfrac{1}{3}\big)^2+\dfrac{1}{3}+3$, вершина квадратного трехчлена расположена вне указанного промежутка, поэтому на нем функция $y(t)$ монотонна, так что $y_{min}=y(1)=-2$, $y_{max}=y(0)=3$.

**а46-17.** Укажите первую цифру после запятой в десятичном представлении наименьшего возможного значения знаменателя бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, второй член которой относится к сумме всех членов как $6:25$..

$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 4 $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ 2

Ответ $\boxed{3}$♦ $q_{\min}=\dfrac{2}{5}=0,4$.. Все возможные значения знаменателя прогрессии можно найти из уравнения $\frac{bq}{b/(1-q)}=\frac{6}{25}$, $q(1-q)=\dfrac{6}{25}$, $q\in\{0,4;\ 0,6\}$.

**а46-18.** Сколько целых чисел не являются решениями неравенства $\log_2(x^2-10x+17)\geqslant 0$?

$\boxed{1}$ ни одного или одно $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять или больше пяти

Ответ $\boxed{5}$♦ пять, $\log_2(x^2-10x+17)\geqslant 0\Leftrightarrow\log_2(x^2-10x+17)\geqslant\log_2 1\Leftrightarrow x^2-10x+17\geqslant 1\Leftrightarrow x^2-10x+16\geqslant 0$ $(x-2)(x-8)\geqslant 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;2]\bigcup[8;\ +\infty)$, не являются $x=3;\ldots;7$.

**а46-19.** Если $S$ — площадь треугольника, ограниченного отрезками осей абсцисс и ординат и отрезком касательной к параболе $y=\frac{x^2}{2}$, проведенной через точку этой параболы с абсциссой $x=2$, то

$\boxed{1}$ $0<S\leqslant 1$ $\boxed{2}$ $1<S\leqslant 1,2$ $\boxed{3}$ $1,2<S\leqslant 1,4$ $\boxed{4}$ $1,4<S\leqslant 1,6$ $\boxed{5}$ $1,6<S<999$

Ответ $\boxed{1}$♦ $y=f(2)+f'(2)(x-2)$, $y=2+2(x-2)$, $y=2x-2$, точки пересечения $x_1=1, y_1=0$, $x_2=0, y_2=-2$, $S=1$.

**а46-20.** Множество всех решений неравенства $\arcsin(\arcsin x)+\dfrac{\pi}{6}\geqslant 0$ является промежутком, длина которого равна

$\boxed{1}$ $\sin(1)-\sin(0,5)$ $\boxed{2}$ $1+\sin(0,5)$ $\boxed{3}$ $1,5$ $\boxed{4}$ $1-\sin(0,5)$ $\boxed{5}$ $\sin(1)+\sin(0,5)$

Ответ $\boxed{5}$♦ $\arcsin(\arcsin x)+\frac{\pi}{6}\geqslant 0\Leftrightarrow\arcsin(\arcsin x)\geqslant-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 1\geqslant\arcsin x\geqslant-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 1\geqslant x\geqslant-\sin\frac{1}{2}.$

**а46-21.** Значение выражения $\big(\log_2 27\big)\cdot\big(\log_3 125\big)\cdot\big(\log_5 4\big)$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{3}$♦ $(\log_2 27)\cdot(\log_3 125)\cdot(\log_5 4)=3\log_2 3\cdot 3\log_3 5\cdot 2\log_5 2=3\cdot 3\cdot 2=18.$

**а46-22.** Площадь фигуры $|x-1|+|x+1|\leqslant y\leqslant 4$ равна

$\boxed{1}$ 8 $\boxed{2}$ 6 $\boxed{3}$ 10 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 12

Ответ $\boxed{2}$♦ Это трапеция с нижним основанием $x\in[-1;\ 1], y=2$, верхним основанием $x\in[-2;\ 2], y=4$ и высотой, равной 2, $S=\dfrac{2+4}{2}\cdot 2=6.$

**а46-23.** В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AC=5$, $BC=\sqrt{65}$ и величина $\angle A=\arccos(-0{,}6)$. Найдите длину стороны $AB$ и укажите верное утверждение.

$\boxed{1}$ $AB\in(0;\ 2,5]$ $\boxed{2}$ $AB\in(2,5;\ 3]$ $\boxed{3}$ $AB\in(3;\ 3,5]$ $\boxed{4}$ $AB\in(3,5;\ 4]$ $\boxed{5}$ $AB\in(4;\ 999)$

Ответ $\boxed{4}$♦ Пусть $a = BC$, $b = AC$, $x = AB$. Тогда $\begin{cases} a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos A, \\ x > 0, \end{cases}$ $x = 4$.

**а46-24.** Основания трапеции равны $AD = 9$ и $BC = 4$. Боковые стороны трапеции отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок $MN$, длина которого равна 6. Найдите отношение площади трапеции $AMND$ к площади трапеции $MBCN$.

$\boxed{1}$ 2,4 $\boxed{2}$ 2,25 $\boxed{3}$ 2,5 $\boxed{4}$ 2,75 $\boxed{5}$ 2,69

Ответ $\boxed{2}$♦ Проведем прямую $CQ$ параллельно $AB$ и пусть $P \in MN$, $Q \in AD$. Тогда $MP = AQ = BC = 4$, $QD = 9 - 4 = 5$, $PM = 6 - 4 = 2$, так что высоты трапеций $AMND$ и $MBCN$ относятся как $3 : 2$. Их площади относятся как $\frac{9+6}{2} \cdot 3 : \frac{6+4}{2} \cdot 2 = 9 : 4$.

**а46-25.** Стороны треугольника $AB = 4$, $BC = 5$ и $AC = 7$. Отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно

$\boxed{1}$ $\dfrac{5}{16}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{21}{80}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{7}{16}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{12}{35}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{9}{40}$

Ответ $\boxed{4}$♦ $\dfrac{r}{R} = \dfrac{12}{35}$; $\dfrac{r}{R} = \dfrac{(a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)}{2\cdot a\cdot b\cdot c.}$

**а46-26.** Точка $P$ находится на продолжении стороны $AB$ треугольника $ABC$ за точку $B$, $BP = 2\,AB$. Точка $Q$ находится на продолжении стороны $BC$ треугольника $ABC$ за точку $C$, $CQ = 3\,BC$. Точка $R$ находится на продолжении стороны $AC$ треугольника $ABC$ за точку $A$, $AR = 4\,AC$. Отношение площадей треугольников $S_{PQR} : S_{ABC}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{1}$♦ Пусть $BP = m\,AB$, $CQ = n\,BC$, $AR = k\,AC$. Тогда $\dfrac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = 1 + m + n + k + mn + nk + km$, $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ACN}} = 36$.

**а46-27.** Если П — произведение всех различных корней уравнения $x^2 - 8x + 11 = 6\sqrt{x^2 - 8x + 3}$, то П — натуральное число и остаток от деления числа П на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{3}$♦ Пусть $t = \sqrt{x^2 - 8x + 3}$. Тогда $t^2 + 8 = 6t$, $t^2 - 6t + 8 = 0$, $t \in \{2; 4\}$, $x^2 - 8x - 1 = 0$ или $x^2 - 8x - 13 = 0$, оба квадратных уравнения имеют по два различных корня, произведение всех четырех равно $\Pi = (-1)\cdot(-13) = 13$.

**а46-28.** Если число $p$ равно наименьшему положительному корню уравнения
$\sin(16x) + 2\sin(19x) + \sin(22x) = 0$, то значение выражения $\frac{\pi}{p}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ 19; $\sin((m-k)x) + 2\sin(mx) + \sin((m+k)x) = 0$, $2\sin(mx)[1 + \cos(px)] = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{m}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{p}$.

**а46-29.** За 30 дней совместной работы Билл и Джек строят 11 домов. Если Билл повысит свою производительность на 25%, то за 12 дней совместной работы они построят 5 домов. Сколько домов построят они за 48 дней совместной работы, если Билл еще раз повысит свою производительность на 25%?

$\boxed{1}$ 22 $\boxed{2}$ 23 $\boxed{3}$ 24 $\boxed{4}$ 25 $\boxed{5}$ 21

Ответ $\boxed{2}$♦ 23 дома. Пусть производительность труда Билла равна $x$ домов в день, производительность труда Джека равна $y$ домов в день, и пусть $n = 30$, $N = 11$, $m = 12$, $M = 5$, $q = 1,25$, $K = 25$, $p = 1,25$. Из условий задачи следует, что $nx + ny = N$, $mqx + my = M$. Решая линейную чистему, получим $x = \dfrac{1}{5}$; $y = \dfrac{1}{6}$, поэтому $kqpx + ky = 23$.

**а46-30.** Найдите значение параметра $b$, при котором парабола $y = 7x^2$ и линия $y = 2\sqrt{b}\,|x| - 3$ имеют ровно две общие точки, и укажите остаток от деления целой части значения $b$ на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{1}$♦ Пусть $a = 7$, $d = 3$, $y_1 = ax^2$, $y_2 = 2\sqrt{b}|x| - d$. Тогда $ax^2 = 2\sqrt{b}|x| - d$, $ax^2 - 2\sqrt{b}|x| + d = 0$, дискриминант равен нулю, $b - ad = 0$, $b = ad$, $b = 21$.

**а46-31.** Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в 2 раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Число $q$, равное знаменателю исходной геометрической прогрессии, принадлежит промежутку

$\boxed{\mathbf{1}}$ $q \in (1;\ 4)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $q \in [4;\ 5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $q \in [5;\ 6)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $q \in [6;\ 7)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $q \in [7;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{1}}$♦ Пусть исходные числа равны $b,\ bq,\ bq^2$. После увеличения среднего числа в $k$ раз получим три числа $b,\ k \cdot bq,\ bq^2$. Свойства арифметической прогрессии: $b - 2 \cdot k \cdot bq + bq^2 = 0,\ \ q^2 - 2kq + 1 = 0$, $q = k \pm \sqrt{k^2-1}$, $q > 1$, $q = 2 \pm \sqrt{3}$, знак $+$.

**а46-32.** Числа $1,\ b,\ c$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Если большее из них увеличить на $6{,}666666\ldots\%$, то они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Укажите верное утверждение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $b \in (1;\ 1{,}2)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $b \in [1{,}2;\ 1{,}4)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $b \in [1{,}4;\ 1{,}6)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $b \in [1{,}6;\ 1{,}8)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $b \in [1{,}8;\ 999)$

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ $1;\ 1,(3);\ 1,(6)$. Исходные числа $a;\ a+d;\ a+2d$. После увеличения числа $c$ в $k$ раз $a;\ a+d;\ k(a+2d)$. Свойства геометрической прогрессии: $a \cdot k \cdot (a+2d) = (a+d)^2$. $\dfrac{a}{d} = -1 \pm \sqrt{\dfrac{k}{k-1}} > 1$.

**а46-33.** Множество всех решений неравенства $10 \cdot 3^{\left(\log_3^2 x\right)} \leqslant x^3 + x^{\log_3 x}$ представляет собой промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 4 $\boxed{\mathbf{4}}$ 6 $\boxed{\mathbf{5}}$ 8

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ $10 \cdot 3^{\left(\log_3^2 x\right)} \leqslant x^3 + x^{\log_3 x} \Leftrightarrow 10 \cdot x^{\log_3 x} \leqslant x^3 + x^{\log_3 x} \Leftrightarrow 9 \cdot x^{\log_3 x} \leqslant x^3 \Leftrightarrow 2 + \left(\log_3 x\right)^2 \leqslant 3\log_3 x$ $\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^2 - 3\log_3 x + 2 \leqslant 0$ $\log_3 x \in [1;\ 2] \Leftrightarrow x \in [3;\ 9]$.

**а46-34.** Сколько различных корней имеет уравнение $|x \cdot (3 - |x|)| = 3$?

$\boxed{\mathbf{1}}$ три $\boxed{\mathbf{2}}$ четыре $\boxed{\mathbf{3}}$ корней нет $\boxed{\mathbf{4}}$ шесть $\boxed{\mathbf{5}}$ два

Ответ $\boxed{\mathbf{5}}$♦ Нарисуем график функции $f(x) = |x \cdot (3 - |x|)|$. Функция четная, $f(x) = x(3-x)$ при $x \in [0;3]$, уравнение $x(3-x) = 3$ на отрезке $x \in [0;3]$ корней не имеет (и вообще не имеет), $f(x) = x(x-3)$ при $x \in [3;\ +\infty)$, уравнение $x(x-3) = 3$ на промежутке $x \in [0;\ +\infty)$ имеет ровно один корень.

**а46-35.** Сумма всех различных значений параметра $p$, при которых графики функций $y = (p-7)x$ и $y = 324 - \dfrac{p-9}{x}$ имеют ровно одну общую точку, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{2}}$♦ остаток 2; $\Sigma = 2(7+9) = 32$. Запишем уравнение в виде $\dfrac{(p-7)x^2 - 324x + p - 9}{x} = 0$. Единственный корень будет при $p = 7$, при $p = 9$, или при условии нулевого дискриминанта, $(p-7)(p-9) - (324/2)^2 = 0$, поэтому сумма $\Sigma = 7 + 9 + (7+9)$.

**а46-36.** Сумма всех различных значений параметра $p$, при которых уравнение $(p^2 - 3p + 2)x^2 + 2(4p+5)x + 17 = 0$ имеет единственный корень, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{\mathbf{4}}$♦ остаток 4; $\Sigma = 94$. Запишем уравнение в виде $(p^2 - up + v)x^2 + 2(ap+b)x + g = 0$, и пусть $A = a^2 - g$; $B = 2ab + uv$; $C = b^2 - vg$, $B^2 - 4AC > 0$. Единственный корень будет при условии $p^2 - up + v = 0$ или при условии нулевого дискриминанта, $Ap^2 + Bp + C = 0$, поэтому $\Sigma = u - \dfrac{2ab + uv}{a^2 - g}$.

**а46-37.** Сумма всех различных положительных целочисленных значений параметра $p$, при которых уравнение
$(p-4) \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1 = 0$ имеет единственный корень, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Ответ $\boxed{5}$♦ остаток 0; $\Sigma = 4^2 + 2\cdot 4 + 1 + 2 + 3 = 30$. Запишем уравнение в виде $(p-m)t^2 - 2nt + 1 = 0,\ m > 0,\ n > 0$. Единственный корень будет при условии $p = m$; $t = \dfrac{1}{2n}$ или при условии нулевого дискриминанта, $n^2 - p + m = 0,\ t = \dfrac{1}{n}$, или при $p - m < 0$. поэтому $\Sigma = n^2 + 2m + 1 + \dots + (m-1)$.

**а46-38.** Пусть $N$ — количество различных целочисленных значений параметра $p$, при которых хотя бы одно решение неравенства $|x - 4p - 17| \leqslant 13$ является также решением неравенства $|x - 5p - 12| \leqslant 26$. Найдите остаток от деления $N$ на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ $N = 2(13+26)+1$. Хотя бы одно решение $|x - 4p - 17| \leqslant 13$ являетмя решением $|x - 5p - 12| \leqslant 26$ в тех и только тех случаях, когда $\begin{cases} 4p + 17 - 13 \leqslant 5p + 12 + 26, \\ 4p + 17 + 13 \geqslant 5p + 12 - 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geqslant 17 - 13 - 12 - 26, \\ p \leqslant 17 + 13 - 12 + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geqslant -34, \\ p \leqslant 44, \end{cases}$
$N = 44 + 34 + 1 = ...9$.

**а46-39.** Если число $P$ равно наименьшему значению параметра $p$, при котором уравнение $x^4 - 2x^3 + (2p-5)x^2 + (6-2p)x + p^2 - 2p = 0$ имеет ровно три различных корня, то

$\boxed{1}$ $P \in (-999;\ 0{,}93)$ $\boxed{2}$ $P \in [0{,}93;\ 1{,}17)$ $\boxed{3}$ $P \in [1{,}17;\ 1{,}38)$ $\boxed{4}$ $P \in [1{,}38;\ 1{,}68)$ $\boxed{5}$ $P \in [1{,}68;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ Уравнение можно рассматривать как квадратное относительно параметра, и тогда его корни $p_1 = -(x^2 + x - 2)$, $p_2 = -(x^2 - 3x)$, $x^2 + x - 2 = x^2 - 3x$ при $x = 0{,}5$, $p = 1{,}25$.

**а46-40.** Доход нефтяной компании (в у.е.) равен численно произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится в 16 у.е., одного добытчика — в 9 у.е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, то число $t$, равное отношению числа геологов $x$ к числу добытчиков $y$, удовлетворяет условию

$\boxed{1}$ $t \in \big(0;\ 0,35\big)$ $\boxed{2}$ $t \in \big[0,35;\ 0,4\big)$ $\boxed{3}$ $t \in \big[0,4;\ 0,5\big)$ $\boxed{4}$ $t \in \big[0,5;\ 0,75\big)$ $\boxed{5}$ $t \in \big[0,75;\ 999\big)$

Ответ $\boxed{2}$♦ $x : y = 3 : 8 = 0,375...$. Если $x^2 \cdot y^3 = z$, $f(x,y) = ax + by \Rightarrow \min$, то $g(x) = ax + b\sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}} \Rightarrow \min$. Пусть $t = \sqrt[3]{x}$; $g(t) = at^3 + b\sqrt[3]{z}\cdot t^{-2}$; $\dfrac{dg}{dt} = 3at^2 - 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^3}$; $3at^2 - 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^3} = 0$; $3at^3 = 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^2}$; $3ax = 2b\sqrt[3]{z}\cdot\dfrac{1}{t^2}$. Так как $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{x^2}}$; $y = \sqrt[3]{\dfrac{z}{t^6}}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{t^2}$; то $3ax = 2by$. Поэтому $x : y = 2b : 3a$.

**а46-41.** Уравнение $\sin\left(\dfrac{\arcsin\sqrt{1-25x^2}}{2}\right) = x\cdot\sqrt{3}$ имеет корень, принадлежащий промежутку

$\boxed{1}$ $x \in [0;\ 0,2)$ $\boxed{2}$ $x \in [0,2;\ 0,25)$ $\boxed{3}$ $x \in [0,25;\ 0,3)$ $\boxed{4}$ $x \in [0,3;\ 0,35)$ $\boxed{5}$ $x \in [0,35;\ 999)$

Ответ $\boxed{1}$♦ $x = 1/6 = 0,167$; $m = 5$; $n = 6$; $\sin\left(\dfrac{\arcsin\sqrt{1-m^2x^2}}{2}\right) = x\sqrt{\dfrac{n}{2}}$; $x = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2n}$.

**а46-42.** Наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2) + \log_x 81$ на промежутке $x \in (1;\ +\infty)$ лежит в пределах

$\boxed{1}$ $-\infty < y_{\min} \leqslant 4,5$ $\boxed{2}$ $4,5 < y_{\min} \leqslant 5$ $\boxed{3}$ $5 < y_{\min} \leqslant 5,5$ $\boxed{4}$ $5,5 < y_{\min} \leqslant 6$ $\boxed{5}$ $6 < y_{\min} \leqslant 999$

Ответ $\boxed{4}$♦ $y_{\min} = \sqrt{32} = 4\cdot 1,41... \in (5,5;\ 6)$. Решение. Выполним замену $y = 2t + \dfrac{4}{t}$, $t = \log_3 x$; $t > 0$. $y = at + \dfrac{b}{t}$, $y' = a - \dfrac{b}{t^2}$; $t = \sqrt{b/a}$; $y_{\min} = 2\sqrt{ab}$.

**а46-43.** Наименьшее значение функции $-\log_4\cos x - \log_{\cos x} 16$ на промежутке $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ лежит в пределах

$\boxed{1}$ $-\infty < y_{\min} \leqslant 2,5$ $\boxed{2}$ $2,5 < y_{\min} \leqslant 3$ $\boxed{3}$ $3 < y_{\min} \leqslant 3,5$ $\boxed{4}$ $3,5 < y_{\min} \leqslant 4$ $\boxed{5}$ $4 < y_{\min} \leqslant 999$

Ответ $\boxed{2}$♦ $y_{\min} = \sqrt{8} = 2\cdot 1,41... \in (2,5;\ 3)$. Выполним замену, $y = t + \dfrac{2}{t}$, $t = \log_4 x$; $t > 0$. Пусть $y = at + \dfrac{b}{t}$, тогда $y' = a - \dfrac{b}{t^2}$; точка экстремума $t = \sqrt{b/a}$, это минимум, $y_{\min} = 2\sqrt{ab}$.

**а46-44.** Если значение параметра $k$ таково, что уравнение $x = kx^5 + 6$ имеет ровно два различных корня, то больший из корней равен

$\boxed{1}$ 12,5 $\boxed{2}$ 10 $\boxed{3}$ 7,5 $\boxed{4}$ 6 $\boxed{5}$ 12

Ответ $\boxed{3}$♦ Запишем уравнение в виде $x = k\cdot x^m + b$, $m = 5$, $b = 6$. Заметим, что из условия задачи следует, что $k > 0$. Приведем уравнение к виду $x - k\cdot x^m - b = 0$ и найдем промежутки монотонности левой части. Два корня будут при условии одновременного выполнения двух условий, равенство функций, $x = k \cdot x^m + b$ и равенство их производных, $1 = k \cdot m \cdot x^{m-1} + b$. Поэтому $x = \dfrac{m \cdot b}{m-1}$, $x_{\max} = 7,5$.

**а46-45.** Если $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1} + \sqrt{x^2-4x+3} = 0, \end{cases}$ то

$\boxed{1}$ $\frac{x}{y} \in (-999;\ 1,1)$ $\boxed{2}$ $\frac{x}{y} \in [1,1;\ 2,2)$ $\boxed{3}$ $\frac{x}{y} \in [2,2;\ 3,3)$ $\boxed{4}$ $\frac{x}{y} \in [3,3;\ 4,4)$ $\boxed{5}$ $\frac{x}{y} \in [4,4;\ 999)$

Ответ $\boxed{3}$♦ $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1} + \sqrt{x^2-4x+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ \sqrt{9y^2-6y+1} = 0, \\ \sqrt{x^2-4x+3} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ |3y-1| = 0, \\ x \in \{1;\ 3\} \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\}, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} = 0, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\}, \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \{1;\ -3\}, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x \in \{1;\ 3\}, \end{cases}$ $x = 1;\ y = 0,(3)$.

**а46-46.** Вычислите площадь фигуры $S$ на плоскости, образованной всеми точками, координаты которых $(x;\ y)$ удовлетворяют системе неравенств $\sqrt{3-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{12-x^2}$.

$\boxed{1}$ $3\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{2}$ $3\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{3}$ $3\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{2}$ $\boxed{4}$ $3\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{9\pi}{2}$

Ответ $\boxed{3}$♦ $S = \dfrac{\pi}{2} + 3\sqrt{3}$; $r = \sqrt{3}$; $R = \sqrt{12}$; $S = \arcsin\dfrac{r}{R} \cdot R^2 + r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \dfrac{\pi}{2} \cdot r^2$.

**а46-47.** Пусть $N$ — количество различных целочисленных значений параметра $p$, при которых система $\begin{cases} |y| = |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 128, \\ 4y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Остаток от деления $N$ на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{5}$♦ остаток 0, $N = 65$. $p \in \{-1\} \bigcup (224;\ 288]$. $R = 8$; $x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$; $4y + p = 4x^2$; $|x| = |y|$; $p \in \{-1\} \bigcup (4R^2 - 4R;\ 4R^2 + 4R]$; $N = 1 + 8R$.

**а46-48.** Если значение параметра $p$ таково, что $p > 0$, и уравнение $81x^6 = 2x^9 + p$ имеет ровно два различных корня, то $p$ — натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{3}$♦ $x = 3$; $p = ...3$. $ax^m = bx^n + p$; Два корня будут при условии $ma = k \cdot m \cdot x^{m-1} + b$. Поэтому $x = \sqrt[n-m]{\dfrac{ma}{nb}}$; $p = ax^m - bx^n$.

**а46-49.** Сумма всех различных целочисленных значений параметра $R$, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2R|x| + 2R|y|, \\ |x| + |y| = 12 \end{cases}$ имеет ровно восемь решений, равна натуральному числу. Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

Ответ $\boxed{4}$♦ $R \in (3;\ 6)$. Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2R|x| + 2R|y|, \\ |x| + |y| = b, \end{cases}$ имеет 4 решения, если $R = R_1$ или $R = R_2$, где $R_1 = \dfrac{b}{4}$; $R_2 = \dfrac{b}{2}$; имеет 8 решений, если $R \in \Big(R_1;\ R_2\Big)$.