Домашнее задание 31 (2010-2011)

11. Десять задач с решениями

a31-1. Найдите значение параметра p, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения $(\star)$ $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0$ принимает наименьшее возможное значение.
♦ 2/3 ♦
Решение. (1) $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0 \Leftrightarrow x\big(x^2-(p+2)x+4p-2p^2\big)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-(p+2)x+4p-2p^2=0. \end{array}\right.$
(2) Найдем дискриминант,
$D=(p+2)^2-4(4p-2p^2)=p^2+4p+4-16p+8p^2=9p^2-12p+4=(3p-2)^2$.
(3) Найдем корни,
$x_{1,2}=\frac{p+2\pm(3p-2)}{2}=\{2p;2-p\}$, $x_3=0$.
(4) Заметим, что уравнение $(\star)$ имеет в зависимости от величины параметра p ровно два различных корня (при $p\in\{0;\,2;\,2/3\}$) или ровно три различных корня (при всех остальных значениях p).
(5) Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p\neq 2/3$,
$S=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(2p)^2+(2-p)^2=4p^2+4-4p+p^2=5p^2-4p+4=5(p-2/5)^2-4/5+4$
$=5(p-2/5)^2+16/5$, наименьшее значение достигается при $p_1=\frac{2}{5}$, и тогда $S=16/5=3{,}2$.
(6) Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p=2/3$, $p_1=p_2=4/3$, два различных корня равны в этом случае 2/3 и 0, $S=16/9=1{,}(7)<3{,}2$, поэтому верный ответ $p=2/3$. ■

a31-2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
$(\star)$ $f(x)=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21\sin^2 x-12\cos x$.
♦ $\{-373/16;\,29\}$ ♦
Решение. (1) $f(x)=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21\sin^2 x-12\cos x$
$=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21+21\cos^2 x-12\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3-21+21t^2-12t \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21. \end{cases}$ Так как $\cos x\in[-1;\,1]$, то множество значений функции $(\star)$ совпадает со множеством значений функции
$(\star\star)$ $g(t)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21$
на промежутке $t\in[-1;\,1]$.
(2) Пусть сначала функция $(\star\star)$ определена на всей числовой оси. Тогда
$g'(t)=12t^3-42t^2+42t-12=12(t^3-1)-42(t^2-t)=12(t-1)(t^2+t+1)-42t(t-1)$
$=6(t-1)\big[2(t^2+t+1)-7t\big]=6(t-1)\big[2t^2+2t+2-7t\big]=6(t-1)\big(2t^2-5t+2\big)$.
(3) $2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$ $t=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}$ $t=\frac{5\pm 3}{4}\in\{-1/2;\,2\}$, поэтому
$g'(t)=6(t-1)(t-2)(2t-1)$. Функция $g(t)$
(3a) убывает на промежутке $t\in(-\infty;\,1/2]$,
(3b) возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$,
(3c) убывает на промежутке $t\in[1;\,2]$,
(3d) возрастает на промежутке $t\in[2;\,+\infty)$,
(4) Пусть теперь функция $(\star)$определена на промежутке $t\in[-1;\,1]$. Тогда $g(t)$
(4a) убывает на промежутке $t\in[-1;\,1/2]$,
(4b) возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$.
(5) Наименьшее значение $g(t)$ совпадает с числом $g(\frac{1}{2})=\frac{3}{16}-\frac{14}{8}+\frac{21}{4}-\frac{12}{2}-21$
$=\frac{3}{16}-\frac{28}{16}+\frac{84}{16}-6-21=\frac{3-28+84}{16}-27=\frac{59}{16}-27=\frac{64-5}{16}-27=-\frac{5}{16}+4-27=-23-\frac{5}{16}=-\frac{373}{16}$.
(6) Наибольшее значение $g(t)$ совпадает с большим из двух чисел
(6a) $g(-1)=3+14+21+12-21=29$,
(6b) $g(1)=3-14+21-12-21=-23$,
поэтому наибольшее значение равно 29. ■

a31-3. Решите неравенство $\log_{0{,}1x^2-1{,}1x+2{,}8}\dfrac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant 1$.

♦ $x \in (0;1] \bigcup (2;4) \bigcup (10;10{,}5]$. ♦

Решение. (1) $\log_{0{,}1x^2-1{,}1x+2{,}8} \dfrac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant 1$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}} \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}} \frac{x^2-11x^2+28}{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x^2-11x+28}{10} > 1, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant \frac{x^2-11x+28}{10}, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \frac{x^2-11x+28}{10} < 1, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \geqslant \frac{x^2-11x+28}{10}, \\ \frac{x^2-11x+28x}{10} > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)(x-9) > 0, \\ (x-4)(2x^2-23x+21) \leqslant 0, \\ x(x-4)(x-10) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-4)(x-7) > 0, \\ (x-2)(x-9) < 0, \\ (x-4)(2x^2-23x+21) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;\, 2) \bigcup (9;\, +\infty), \\ x \in (-\infty;\, 1] \bigcup [4;\, 10{,}5], \\ x \in (0;\, 4) \bigcup (10;\, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty;\, 4) \bigcup (7;\, +\infty), \\ x \in (2;\, 9), \\ x \in [1;\, 4] \bigcup [10{,}5;\, +\infty), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (0;\, 1], \\ x \in (10;\, 10{,}5], \\ x \in (2;\, 4). \end{array}\right. \blacksquare$$

а31-4. Для защиты ценного оборудования от непогоды требуется изготовить палатку в форме пирамиды, в основании которой должен лежать прямоугольник, а одно из боковых ребер должно быть перпендикулярно основанию. Найдите наибольший возможный объем палатки при условии, что ни одно из ребер пирамиды не должно быть длиннее 2 метров.

♦ $8/(9\sqrt{3})$. ♦

Решение. (1) Пусть в основании лежит прямоугольник, стороны которого равны x и y, а высота равна z. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие x, y, z, что $\dfrac{xyz}{3} \Rightarrow \max$ при одновременном выполнении условий $0 < x \leqslant 2$, $0 < y \leqslant 2$, $0 < z \leqslant 2$, $0 < \sqrt{x^2+z^2} \leqslant 2$, $0 < \sqrt{y^2+z^2} \leqslant 2$, $0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 2$. Эта система условий равносильна системе $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$.

(2) Пусть палатка наибольшего объема имеет высоту, равную z. Докажем, что $x = y$. При заданном z условие $\dfrac{xyz}{3} \Rightarrow \max$ равносильно условию $\begin{cases} x > 0,\, y > 0, xy \Rightarrow \max, \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0,\, y > 0, xy \Rightarrow \max, \\ y^2+y^2 \leqslant 4-z^2. \end{cases}$ В соответствии с неравенством Коши, $x = y = \sqrt{4-z^2}$.

(3) Таким образом, в основании лежит квадрат со стороной x. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие x, z, что $\dfrac{x^2z}{3} \Rightarrow \max$ при одновременном выполнении условий $0 < x \leqslant 2$, $0 < z \leqslant 2$, $2x^2+z^2 \leqslant 4$, $x = \sqrt{4-z^2}$. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3}$ и условие $f(z) \Rightarrow \max \Leftrightarrow \dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3} \Rightarrow \max \Leftrightarrow (4-z^2)\cdot z \Rightarrow \max \Leftrightarrow 4z - z^3 \Rightarrow \max$. Пусть $g(z) = 4z - z^3$, $g'(z) = 4 - 3z^2$, $4 - 3z^2 = 0$ при $z = 2/\sqrt{3}$. Исследование знака производнлой показывает, что это точка максимума.

(4) Таким образом, $x^2+y^2+z^2 = 4$, $3x^2 = 4$, $x = y = z = 2/\sqrt{3}$, $V = x^3/3 = 8/(9\sqrt{3})$. $\blacksquare$

а31-5. В начале года предприниматель взял на год кредит в банке $\mathcal{A}$ на 80% требуемой ему суммы под n% годовых, остальные деньги занял на год в банке $\mathcal{B}$ под $3n$% годовых. Однако из—за кризиса в конце года расплатиться не смог и ему пришлось продлить договор в каждом банке еще на год, причем банк $\mathcal{A}$ установил ему на второй год $2n$% годовых, а банк $\mathcal{B}$ установил $4n$% годовых. В результате он вернул через два года всего 1440 у.е., в то время как планировал вернуть через год 960 у.е. Найдите величину вклада и банковский процент в каждом банке.

♦ В соответствии с условиями задачи, возможно два верных ответа. **(1)** В первый год 600 у.е. и 20%, 150 у.е. и 60%. **(2)** В первый год 544 у.е. и 500/17%, 136 у.е. и 1500/17%. ♦

Решение 1. Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту капитализируются, т.е. неуплаченные проценты прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x)+m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)+m(1+3x) = 960$. Эта величина рассматривается как сумма кредита на второй год. Тогда полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x) = 1440$. Решая систему $\begin{cases} m>0,\ x>0, \\ 4m(1+x)+m(1+3x)=960, \\ 4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x)=1440 \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m=150$, $x=0{,}2$. ■

Решение 2. Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту не капитализируются, т.е. неуплаченные проценты не прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x)+m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)+m(1+3x) = 960$. Полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x+2x)+m(1+3x+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x+2x)+m(1+3x+4x) = 1440$. Решая систему $\begin{cases} m>0,\ x>0, \\ 4m(1+x)+m(1+3x)=960, \\ 4m(1+3x)+m(1+7x)=1440, \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m=136$, $x=5/17$. ■

а31-6. Найдите все значения параметров p и q, при которых система $\begin{cases} y = px^2-q, \\ 2y+\big||6x|-3|y|\big| = 12 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

♦ $\begin{cases} q=-12/5, \\ p\in(-\infty;\,-3/5)\bigcup[0;\,+\infty), \end{cases}$ $\begin{cases} q=12, \\ p\in(-\infty;\,-1/40)\bigcup[0;\,2)\bigcup(3;\,+\infty). \end{cases}$ ♦

Решение. (1) Множество точек на плоскости $2y+\big||6x|-3|y|\big| = 12$ симметрично относительно оси Oy. Нарисуем его правую половину,

$$(\star)\quad \begin{cases} 2y+\big||6x|-3|y|\big| = 12, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+\big|6x-3|y|\big| = 12, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y+|6x-3y|=12, \\ y>2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y+|6x-3y|=12, \\ 0<y\leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y+|6x+3y|=12, \\ -2x<y\leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y+|6x+3y|=12, \\ y\leqslant -2x, \end{cases} \end{array}\right. \\ x\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=6/5x+12/5, \\ y>2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y=6x-12, \\ 0<y\leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-6/5x+12/5, \\ -2x<y\leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-6x-12, \\ y\leqslant -2x, \end{cases} \end{array}\right. \\ x\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=(6x+12)/5, \\ 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 12/5\leqslant y\leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y=6x-12, \\ 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 0\leqslant y\leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y=(-6x+12)/5, \\ 2\leqslant x<+\infty, \\ 0\geqslant y>-\infty, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-6x-12, \\ 0\leqslant x<+\infty, \\ -12\geqslant y>-\infty, \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, множество $(\star)$ образовано
(1a) отрезком AB, где $A(0;\,12/5)$, $B(3;\,6)$,
(1b) отрезком BC, где $B(3;\,6)$, $C(2;\,0)$,
(1c) полупрямой α, начинающейся в точке $C(2;\,0)$, и проходящей через точку $M(7;\,-6)$,
(1d) и полупрямой β, начинающейся в точке $D(-12;\,0)$, и проходящей через точку $N(3;\,-30)$.

(2) Так как требуется нечетное число решений, то одно из них должно соответствовать $x = 0$, поэтому $q \in \{-12/5;\ 12\}$.
(3) Пусть $q = -12/5$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(3a)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок AB, $p \in [2/5;\ +\infty)$, **(3b)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок BC, и ее ветви направлены вверх, $p \in [0;\ 2/5]$, $p = 0$ тоже годится, в этом случае $y = px^2 - q$ линейная функция.
(4) Пусть $q = -12/5$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки C и пересекает полупрямую DN, $p \in (-\infty;\ -3/5)$.
(5) Пусть $q = 12$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(5a)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит выше точки C и пересекает отрезок AB, $p \in (3;\ +\infty)$, **(5b)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки B и пересекает полупрямую CM, $p \in [0;\ 2)$, $p = 0$ тоже годится.
(6) Пусть $q = 12$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ не имеет общих точек с полупрямой CM, и пересекает полупрямую DN, $p \in (-\infty;\ -1/40)$. ■

a31-7. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В треугольнике ADC проведены биссектрисы AP и CQ. На стороне AC треугольника ADC взята точка R так, что $PR \perp CQ$. Известно, что биссектриса угла D треугольника BCD перпендикулярна отрезку PB, $AB = 18$, $AP = 12$. Найдите AR.
⧫ 8. ⧫
Решение. Пусть $AB = n$, $AP = m$, $AD = c$, $AC = b$, $DP = p$, $CP = q$, $BD = DP = p$, $CP = CR = q$. Используя свойство биссектрисы и формулу для длины биссектрисы, получим
$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{p}{q}, \\ c + p = AB = n, \\ m^2 = bc - pq, \end{cases} \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ \frac{bp}{q} + p = n, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ bp + pq = qn, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ p = \frac{qn}{b+q}, \\ m^2 = b\frac{b}{q}\frac{qn}{b+q} - q\frac{qn}{b+q}, \end{cases} \quad m^2 = \frac{b^2n}{b+q} - \frac{q^2n}{b+q},$$
$m^2 = \frac{(b^2-q^2)n}{b+q}$, $m^2 = \frac{(b-q)(b+q)n}{b+q}$, $m^2 = (b-q)n$, $b - q = \frac{m^2}{n}$, $b - q = \frac{12^2}{18} = 8$. ■

a31-8. Найдите все точки минимума и точки максимума функции
$f(x) = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.
⧫ $x_{\min} \in \{0;\ 4\}$, $x_{\max} \in \{3\}$. ⧫
Решение. (1) $(x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9} = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{(x-3)^2} = (x^2 - 3x - 9) \cdot |x - 3|$
$$= \begin{cases} -(x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ (x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \geqslant 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x^3 - 6x^2 + 27) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ x^3 - 6x^2 + 27 \text{ при } x \geqslant 3. \end{cases}$$
(2) Пусть $g(x) = x^3 - 6x^2 + 27$. Тогда $g'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$,

- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (-\infty;\ 0)$,
- $g'(x) < 0$ на промежутке $x \in (0;\ 4)$,
- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (4;\ +\infty)$.

Поэтому функция $g(x)$

- возрастает на промежутке $x \in (-\infty;\ 0]$,
- убывает на промежутке $x \in [0;\ 4]$,
- возрастает на промежутке $x \in [4;\ +\infty)$.

(3) Так как $f(x) = \begin{cases} -g(x) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ g(x) \text{ при } x \geqslant 3, \end{cases}$ то функция $f(x)$

- убывает на промежутке $x \in (-\infty;\, 0]$,
- возрастает на промежутке $x \in [0;\, 3]$,
- убывает на промежутке $x \in [3;\, 4]$,
- возрастает на промежутке $x \in [4;\, +\infty)$.

Поэтому

- $x = 0$ является точкой минимума,
- $x = 3$ является точкой максимума,
- $x = 4$ является точкой минимума

функции $f(x)$. ■

a31-9. Найдите все значения переменных $x > 0$, $y > 0$ такие, что хотя бы при одном значении z верны одновременно равенства $(\star)$ $\frac{(x^2+1)^2}{x^2} + \frac{(y^2+1)^2}{y^2} = \frac{50z}{4+z^2}$ и $(\star\star)$ $x + y = 1$.

♦ $\{(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{1}{2})\}$. ♦

Решение 1.

(1) Пусть $x = (1+t)/2$, $y = (1-t)/2$, $t \in (-1;\, 1)$. Тогда $F = \frac{(x^2+1)^2}{x^2} + \frac{(y^2+1)^2}{y^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ $+\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 = \frac{(1+t)^2}{4} + \frac{(1-t)^2}{4} + \frac{4}{(1+t)^2} + \frac{4}{(1-t)^2} + 4 = \frac{2t^2+2}{4} + 4\frac{2t^2+2}{(1-t^2)^2} + 4.$ Пусть $t^2 = s \in [0;\, 1)$. Тогда $F = \frac{s+1}{2} + 8\frac{s+1}{(1-s)^2} + 4$. Эта функция возрастает на промежутке $[0;\, 1)$, поэтому ее наименьшее значение достигается при $s = 0$, и это наименьшее значение равно 12,5.

(2) Пусть $g(z) = \frac{50z}{4+z^2}$. Из условия задачи следует, что $F(x, y) = g(z)$, причем $F > 0$. Поэтому равенство может иметь место только при $z > 0$. При этом условии $g(z) = \frac{50}{\frac{4}{z}+z}$. Так как по уже упоминавшемуся неравенству Коши $\frac{4}{z} + z \geqslant 2\sqrt{\frac{4}{z} \cdot z} = 4$, то $\frac{50}{\frac{4}{z}+z} \leqslant \frac{50}{4} = 12{,}5$, причем равенство имеет место если и только если $\frac{4}{z} = z > 0 \Leftrightarrow z = 2$.

(3) Итак, равенство $(\star)$ равносильно одновременному выполнению условий $\begin{cases} F = g(z), \\ F \geqslant 12{,}5, \\ g(z) \leqslant 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} F = 12{,}5, \\ g(z) = 12{,}5, \end{cases}$ причем равенство $F = 12{,}5$ верно если и только если $x = y = 0{,}5$, а равенство $g(z) = 12{,}5$ верно если и только если $z = 2$. ■

Решение 2. **(4)** Так как для любых u и v верно неравенство $u^2 - 2uv + v^2 \geqslant 0$, то при тех же условиях $2u^2 - 2uv + 2v^2 \geqslant u^2 + v^2$, $2u^2 + 2v^2 \geqslant u^2 + 2uv + v^2$, $2(u^2 + v^2) \geqslant (u + v)^2$, $u^2 + v^2 \geqslant \frac{(u+v)^2}{2}$.

(5) Пусть $u = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}$, $v = \frac{(y^2+1)^2}{y^2}$, тогда $F = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = u^2 + v^2$

$$\geqslant \frac{\left(x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}\right)^2}{2} \geqslant \frac{(x + y + \dfrac{x+y}{xy})^2}{2}.$$

(6) Так как $x + y = 1$, то $F \geqslant \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2}{2}$

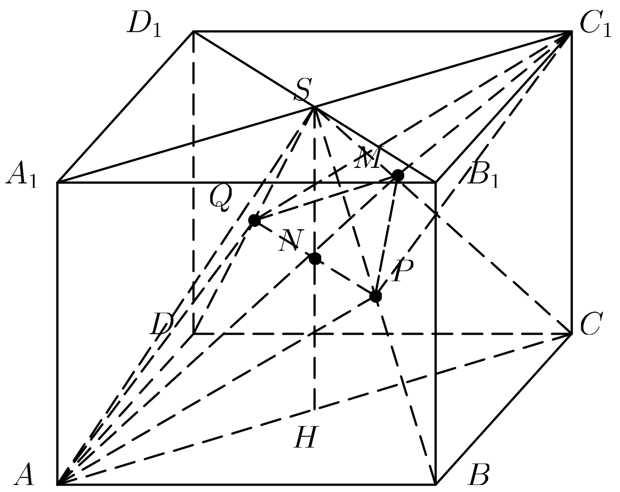
(7) Для любых $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ верно неравенство Коши, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, поэтому при тех же условиях $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Так как $x + y = 1$, то $1 \geqslant 2\sqrt{xy}$, $1 \geqslant 4xy$, $xy \leqslant 1/4$. Если к тому же $x > 0, y > 0$, то $\frac{1}{xy} \geqslant 4$, $1 + \frac{1}{xy} \geqslant 5$, $\left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 \geqslant 25$, $F \geqslant 12{,}5$. Так как $x + y = 2\sqrt{xy}$ только при $x = y$, то соответственно $F = 12{,}5$ только при $x = y = 0{,}5$.

(8) Завершение аналогично решению 1. ■

a31-10. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны b. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна высоте указанной пирамиды, основание $ABCD$ у них общее. **(1)** Через точки A и C_1 проведена плоскость α параллельно прямой BD. Найдите величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости α и пирамиды $SABCD$. **(2)** Через точки B и D_1 проведена плоскость β. Найдите минимально возможную величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости β и пирамиды $SABCD$.

♦ $b^2\sqrt{5}/6$. Эта величина равна также наименьшей площади указанного в условии задачи многоугольника. ♦

Решение.



(1) $BD = b\sqrt{2}$, $DQ = QS$, $BP = PS$, $PQ \parallel BD$, треугольники SBD и SPQ подобны с коэффициентом подобия $2:1$, $PQ = BD/2 = b/\sqrt{2}$.

(2) $AC_1 = b\sqrt{5/2}$, $HN = NS$, $AN = NC_1$, $AN = AC_1/2$, треугольники SMN и CMC_1 подобны с коэффициентом подобия $1:2$, $NM = AC_1/6$, $AM = (2/3)AC_1$,

(3) $S_{AQC_1P} = \frac{1}{2}AM \cdot QP = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot b\sqrt{\frac{1}{2}} = b^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = b^2\frac{\sqrt{5}}{6}$.

(4) Теорема 1. Длина биссектрисы треугольника меньше полусуммы двух прилежащих сторон.

Доказательство. Длина биссектрисы равна $l_c = \sqrt{ab - c_ac_b} = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 - c_ac_b} \leqslant \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - c_ac_b}$ $= \frac{a+b}{2}\sqrt{1 - \frac{4c_ac_b}{(a+b)^2}} < \frac{a+b}{2}$.

(5) Пусть прямая l_A параллельна BD_1 и проходит через точку A, прямая l_S параллельна BD_1 и проходит через точку S, прямая l_C параллельна BD_1 и проходит через точку C. Пусть плоскость β проходит через точки B, D_1 и пересекает AS в точке E, пересекает CS в точке F, пересекает SD в точке G. Пусть прямая l_E параллельна BD_1 и проходит через точку E, прямая l_F параллельна BD_1 и проходит через точку F. Тогда площадь многоугольника $BEGF$ равна половине произведения длины отрезка GB на расстояние между прямыми l_E и l_F. Из теоремы 1 теперь следует, что наименьшее возможное расстояние между прямыми l_E и l_F имеет место в том и только том случае, когда $EF \parallel AC$. ■