**fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 09**

**Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора**

**Решите, используя формулу Тейлора.**

**Решите по одной-две задачи из каждой секции, остальные задачи используйте при подготовке к экзамену.**

**1.** Вычислите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{3x}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-2\sin 2x+\sin x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{x^3}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\sin x-2x}{x^3}$, **(10)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(11)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)-2\sin(1)+\sin(1-x)}{x^2}$,

**2.** Найдите, используя формулу Тейлора. **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg} x-2x}{x^5}$.

**3.** Найдите, используя формулу Тейлора. **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

**4.** Вычислите значение многочлена Тейлора с центром $x_0=0$ указанного порядка $n$ в указанной точке $x$, если **(1)** $f(x)=(2+x)^3,\ x=1,\ n=3$. **(2)** $f(x)=(1+x)^{2006},\ x=1,\ n=2005$. **(3)** $f(x)=e^x,\ x=2,\ n=4$. **(4)** $f(x)=xe^x,\ x=2,\ n=4$. **(5)** $f(x)=\sin x,\ x=1,\ n=5$. **(6)** $f(x)=\cos x,\ x=2,\ n=4$. **(7)** $f(x)=\sqrt{1-x},\ x=0{,}36,\ n=2$. **(8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x=0,64,\ n=2$. **(9)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x=1,\ n=2006$. **(10)** $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x=1,\ n=2006$. **(11)** $f(x)=\ln(1-x),\ x=1,\ n=5$. **(12)** $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\ x=1,\ n=3$. **(13)** $f(x)=\arcsin(x),\ x=1,\ n=3$.

**5.** Вычислите с точностью $\varepsilon$, используя формулу Тейлора. **(1)** $(1{,}01)^2$, $\varepsilon=0{,}001$. **(2)** $(1{,}01)^{10}$, $\varepsilon=0{,}01$, **(3)** $(1{,}01)^{100}$, $\varepsilon=0{,}1$, **(4)** $(0{,}99)^{200}$, $\varepsilon=0{,}1$, **(5)** $(1{,}01)^{100}-(1{,}02)^{50}$, $\varepsilon=0{,}1$, **(6)** $(0{,}99)^{100}-(0{,}98)^{50}$, $\varepsilon=0{,}1$.

**6.** Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0)=f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=5$. **(2)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=6$. **(3)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=5$. **(4)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=5$. **(5)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=4$. **(6)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=5$. **(7)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(8)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=4$. **(9)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=6$. **(10)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=2,\ n=6$. **(11)** $f(x)=\ln(1+x),\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(12)** $f(x)=\ln(1-x),\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(13)** $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(14)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$.

**7.** Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0)=f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, принимая $\max|R_{n+1}(x|x_0)|=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{\xi\in[0;x_0]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, и найдите наименьшее $n$, при котором $\max|R_{n+1}(x|x_0)|<\varepsilon$, если **(1$\star$)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-5}$, **(2$\star$)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-5}$, **(3$\star$)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(4$\star$)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(5$\star$)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(6$\star$)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(7$\star$)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(8$\star$)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$.

**8.** Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1$\star$)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=7$, **(2$\star$)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=9$, **(3$\star$)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=10$, **(4$\star$)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=11$, **(5$\star\star$)** $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0,\ x=0{,}9$, **(6$\star\star$)** $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3},\ x_0=0,\ x=0{,}9$. При решении двух последних задач обратите внимание на то, что многочлен Тейлора для функции $f(x)=g'(x)$ равен $P=P_n(f|x|x_0)=P_n(g'|x|x_0)$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(k+1)(x-x_0)^k$, $P=\left\{(x-x_0)f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\}'$, $P=\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}'$, то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции $g(x)$.