

fb1 2007-2008 Домашнее задание семинара 10

Последовательности

1. Найдите (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$, (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{4n}$, (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n)^{1/n}$.
2. Найдите (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$, (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$, (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$, (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{(1,001)^n}$,
(6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$, (7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, (8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, (9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n!}$, (10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.

1. Пусть x_n и y_n – последовательности. Укажите все верные утверждения

- (a) Если x_n сходится и y_n сходится, то $x_n + y_n$ сходится
 (b) Если x_n расходится и y_n сходится, то $x_n + y_n$ расходится
 (c) Если x_n расходится и y_n расходится, то $x_n + y_n$ расходится
 (d) Если $x_n + y_n$ сходится и x_n расходится, то y_n расходится
 (e) Если $x_n + y_n$ расходится и x_n сходится, то y_n расходится
 (f) Если $x_n + y_n$ расходится и x_n расходится, то последовательность y_n может быть сходящейся и может быть расходящейся

2. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$ – последовательность. Укажите все верные утверждения (a) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3}$ (b) $x_n = o \frac{1}{n}$
 (c) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}}$ (d) $x_n = o \frac{1}{n^2}$ (e) $x_n = o \frac{1}{n^3 \cdot \ln n}$ (f) $x_n = o \frac{1}{n^3}$

3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_5 n}{\sqrt[3]{n}} = 0$

4. Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдите величину предела.

- (a) $a_n = n^{2-1/n}$ (b) $a_n = \cos \frac{1}{n^{2 \ln n}}$ (c) $a_n = n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ (d) $a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 - 1}$ (e) $a_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
 (f) $a_n = \sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n}$

5. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:

(I) $x_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n + n^3}$ (II) $x_n = \sqrt[3]{-n}$ (III) $x_n = \log_3(n)$ (IV) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (V) $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ (VI) $x_n = \frac{n!}{(2n)!}$

- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

6. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:

(I) $x_n = \frac{n^{2005}}{2005^n}$ (II) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\log_3 n}$, $n \geq 2$ (III) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (IV) $x_n = \frac{n!}{4^n}$ (V) $x_n = \frac{2^n}{n^n}$ (VI) $x_n = \frac{\log_{2005} n}{2^n}$

- (a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. (b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
 (c) x_n – неограниченная, но не является б.б. (d) x_n – ограниченная, но не имеет предела.
 (e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. (f) x_n – бесконечно малая.

7. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. (I) $x_n = \frac{\cos n}{n}$. (II) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n \cdot (-1)^n}$.

(III) $x_n = \ln(\ln n)$. (IV) $x_n = \sin n$. (V) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. (VI) $x_n = [1 + (-1)^n] \cdot n$.

- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

1. Пусть x_n – бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $x_n \rightarrow +\infty$.
- (a) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная (b) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – бесконечно большая
(c) Если y_n ограниченная, то $x_n + y_n$ – бесконечно большая
(d) Если y_n бесконечно большая отрицательная, т.е. $x_n \rightarrow -\infty$, то $x_n + y_n$ – бесконечно большая
(e) Если y_n бесконечно большая положительная, т.е. $x_n \rightarrow +\infty$, то x_n/y_n – ограниченная
(f) Если y_n бесконечно малая, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot \ln n}$, $n > 1$; $x_1 = 1$ – последовательность. Укажите все верные утверждения (a) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3}$
(b) $x_n = o \frac{1}{n}$ (c) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}}$ (d) $x_n = o \frac{1}{n^2}$ (e) $x_n = o \frac{1}{n^3 \cdot \ln n}$ (f) $x_n = o \frac{1}{n^3}$
3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_4 n}{\sqrt[4]{n}} = 0$
4. Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдите величину предела.
- (a) $a_n = n^2 \cdot 1/n^2$ (b) $a_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (d) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - n}$ (e) $a_n = \ln(1 + n^2)^{1/n}$
(f) $a_n = \sqrt{n^4 + x^3} - \sqrt{n^4 - n^3}$
5. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:
- (I) $x_n = \frac{n^3 + 5n^2 - 3n - 7}{n^3 - n^2}$ (II) $x_n = \sqrt[3]{-\frac{1}{n}}$ (III) $x_n = \log_{1/3} \left(\frac{1}{n}\right)$ (IV) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$ (V) $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$
(VI) $x_n = n!$
- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
(b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.
6. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
- (I) $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$ (II) $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$ (III) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (IV) $x_n = \frac{0,9^n}{n^{0,9}}$ (V) $x_n = \frac{n^n}{2^n}$ (VI) $x_n = \frac{(1,0001)^n}{\log_2 n}$, $n \geq 2$
- (a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. (b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. (d) x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. (f) x_n – бесконечно малая.
7. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. (I) $x_n = (-\log_2 n)^n$. (II) $x_n = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$.
(III) $x_n = -(-3)^{-n}$. (IV) $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$. (V) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. (VI) $x_n = 2^{n \sin \frac{\pi n}{4}}$.
- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
(b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

1. Пусть x_n и y_n – последовательности.

- (a) Если $x_n - y_n$ сходится и x_n расходится, то y_n расходится
 (b) Если $x_n - y_n$ расходится и x_n сходится, то y_n расходится
 (c) Если $x_n - y_n$ расходится и x_n расходится, то последовательность y_n может быть сходящейся и может быть расходящейся
 (d) Если x_n сходится и y_n сходится, то $x_n - y_n$ сходится
 (e) Если x_n расходится и y_n сходится, то $x_n - y_n$ расходится
 (f) Если x_n расходится и y_n расходится, то $x_n - y_n$ расходится

2. Пусть $x_1 = 1$, $x_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$, $n > 1$, – последовательность. Укажите все верные утверждения (a) $x_n = o \frac{\ln n}{n}$

- (b) $x_n = o \frac{1}{n}$ (c) $x_n = o \frac{\ln n}{n^2 \cdot \sqrt{n}}$ (d) $x_n = o \frac{1}{n^2}$ (e) $x_n = o \frac{1}{n \cdot \ln n}$ (f) $x_n = o \frac{\ln n}{n \cdot \sqrt{n}}$

3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_3 n}{\sqrt{n}} = 0$

4. Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдите величину предела.

- (a) $a_n = n^{1/\sqrt{n}}$ (b) $a_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $a_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (d) $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1}$ (e) $a_n = (\ln(1 + n))^{1/n}$
 (f) $a_n = \sqrt{n^3 + n^2} - \sqrt{n^3 - n^2}$

5. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:

- (I) $x_n = \frac{1+n^2}{n^3}$ (II) $x_n = \sqrt[3]{n}$ (III) $x_n = \log_2(n)$ (IV) $x_n = 2^n + 2^{-n}$ (V) $x_n = \frac{1}{n^n}$ (VI) $x_n = \frac{1}{n!}$

- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

6. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:

- (I) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (II) $x_n = \frac{1,001^n}{n^7}$ (III) $x_n = \frac{n^{1,01}}{\log_3 n}$, $n \geq 2$ (IV) $x_n = \frac{n^n}{4^n}$ (V) $x_n = \frac{6^n}{n!}$ (VI) $x_n = \frac{\log_2 n}{2005^n}$

- (a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. (b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
 (c) x_n – неограниченная, но не является б.б. (d) x_n – ограниченная, но не имеет предела.
 (e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. (f) x_n – бесконечно малая.

7. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. (I) $x_n = n$. (II) $x_n = (-2)^n$.

- (III) $x_n = 2^n + (-2)^n$. (IV) $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$. (V) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. (VI) $x_n = \frac{(-n)^2}{3^n}$.

- (a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

1. Пусть x_n – неограниченная последовательность. (а) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
 (б) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – неограниченная (с) Если y_n ограниченная, то $x_n + y_n$ – неограниченная
 (д) Если y_n бесконечно большая, то $x_n + y_n$ – неограниченная (е) Если y_n неограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – неограниченная
 (ф) Если y_n бесконечно малая, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
2. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$ – последовательность. Укажите все верные утверждения (а) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3}$ (б) $x_n = o \frac{1}{n}$
 (с) $x_n = o \frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}}$ (д) $x_n = o \frac{1}{n^2}$ (е) $x_n = o \frac{1}{n^3 \cdot \ln n}$ (ф) $x_n = o \frac{1}{n^3}$
3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt[3]{n}} = 0$
4. Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдите величину предела.
 (а) $a_n = n^{-1/n}$ (б) $a_n = \cos \frac{1}{n^{n \ln n}}$ (с) $a_n = n^2 \ln 1 - \frac{1}{n}$ (д) $a_n = \frac{n+1}{n-1}^n$ (е) $a_n = n \ln 1 + \frac{1}{n^2}$
 (ф) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$
5. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:
 (I) $x_n = \frac{1+n^3}{n^2+3n+1}$ (II) $x_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$ (III) $x_n = \log_{1/2}(n)$ (IV) $x_n = (-2)^{-n}$ (V) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ (VI) $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
 (а) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (б) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (с) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (д) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (е) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (ф) Последовательность x_n – бесконечно малая.
6. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
 (I) $x_n = \frac{2^n}{n!}$ (II) $x_n = \frac{n^{33}}{3^n}$ (III) $x_n = \frac{125^n}{n^n}$ (IV) $x_n = \frac{\log_9 n}{9^n}$ (V) $x_n = \frac{n}{\log_2 n}, n \geq 2$ (VI) $x_n = \frac{n^n}{n!}$
 (а) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. (б) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
 (с) x_n – неограниченная, но не является б.б. (д) x_n – ограниченная, но не имеет предела.
 (е) x_n сходится, но не является бесконечно малой. (ф) x_n – бесконечно малая.
7. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. (I) $x_n = (-1)^n$. (II) $x_n = \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 (III) $x_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{4}$. (IV) $x_n = 2^{n \cdot (-1)^n}$. (V) $x_n = \sqrt[3]{-n}$. (VI) $x_n = n \cdot \sin \frac{1}{n}$.
 (а) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.
 (б) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.
 (с) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.
 (д) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.
 (е) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.
 (ф) Последовательность x_n – бесконечно малая.