fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-02

Тема: Точки, последовательности и множества в пространстве

1. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.
(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Отрезок на плоскости (с концами), **(3)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(4)** Круг на плоскости (без окружности), **(5)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(6)** Треугольник на плоскости (без внутренности), **(7)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность), **(8)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности), **(9)** Шар (вместе со сферой), **(10)** Шар (без сферы).

2. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых
(1) $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2<1$, **(3)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(4)** $x^2+y^2>1$, **(5)** $x^2+y^2\geqslant 1$,
(6) $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, **(7)** $1<x^2+y^2<4$, **(8)** $1\leqslant x^2+y^2<4$, **(9)** $|x|+|y|=1$, **(10)** $|x|+|y|<1$,
(11) $|x|+|y|\leqslant 1$, **(12)** $|x|+|y|>1$, **(13)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(14)** $1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2$, **(15)** $1\leqslant |x|+|y|<2$,
(16) $x+y=1$, **(17)** $\begin{cases} x+y=1, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ **(18)** $\begin{cases} x+y=1, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(19)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(20)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$
(21) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(22)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -|x|\leqslant y\leqslant |x|, \end{cases}$ **(23)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -|x|<y<|x|, \end{cases}$ **(24)** $x^2+9y^2=9\bigcup 9x^2+y^2=9$,
(25) $\begin{cases} x^2+9y^2\leqslant 9, \\ 9x^2+y^2\leqslant 9, \end{cases}$ **(26)** $\star$ $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2\leqslant 9, \end{cases}$ **(27)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2<9, \end{cases}$

3. Найдите **(a)** Предел, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\frac{n+1}{n},\ y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **(3)** $\star$ $x_n=\left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2},\ y_n=\left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$.
(4) $x_n=n\sin\frac{1}{n},\ y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$. **(5)** $x_n=\sqrt[n]{n},\ y_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$.
(7) $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(8)** $\star$ $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right),\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$.
(9) $\star$ $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n},\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$. **(10)** $\star$ $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n,\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.
(11) $\star$ $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(12)** $\star$ $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$.

4. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
(A) Множество точек $(x_n; y_n)$, $n\in N$ (все натуральные числа), если **(1)** $x_n=\frac{1}{n},\ y_n=\frac{1}{n}$.
(2) $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(3)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(4)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{8},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$.
(5) $x_n=\cos\frac{2\pi n}{5},\ y_n=\sin\frac{2\pi n}{5}$. **(6)** $\star$ $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(7)** $\star$ $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$.
(B) Множество точек, состоящее из всех точек плоскости, кроме указанных в каждом из заданий части А.

5. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(2)** $x=y=0$, **(3)** $|x+y|>1$, **(4)** $x^2+y^2=1$, **(5)** $-1<x<1,\ y=0$, являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-02

Тема: Функции нескольких переменных

1. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=x+y$, **(2)** $u=2x+3y$, **(3)** $u=x^2+y^2$, **(4)** $u=xy$, **(5)** $u=\frac{y}{x}$, **(6)** $u=\frac{y}{x^2}$, **(7)** $u=\frac{y^2}{x}$, **(8)** $u=x^2+xy+y^2$, **(9)** $u=x^2+2xy+y^2$, **(10)** $u=x^2+3xy+y^2$, **(11)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x}$, **(12)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x+2y}$, Значения уровней подберите самостоятельно.

2. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u = |x| + y$, **(2)** $u = |x| + |y|$, **(3)** $u = |x| - |y|$, **(4)** $u = |x + y| + |x - y|$, **(5)** $u = |x + y| - |x - y|$, Значения уровней подберите самостоятельно.

3. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u = \min(x, y)$, **(2)** $u = \min(x, x + y)$, **(3)** $u = \min(y, x + y)$, **(4)** $u = \min(x + y, x - y)$, **(5)** $u = \min(x^2 + y^2,\ 2xy)$, **(6)** $u = \min(x^2 + y^2,\ 1 - 2xy)$, **(7)** $u = \max(x^2 - 2xy + y^2,\ 1 - 2xy)$. Значения уровней подберите самостоятельно.

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-02
Тема: Предел функции нескольких переменных

1. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = xy,\ a = 2,\ b = 3$, **(2)** $u(x, y) = \sin(x + y),\ a = \pi,\ b = \pi$,
(3) $u(x, y) = e^{xy},\ a = 2,\ b = 3$, **(4)** $u(x, y) = \ln(xy),\ a = 2,\ b = \frac{1}{2}$,

2. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(3) $u(x, y) = y\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$, **(4)** $u(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,
(5) $u(x, y) = x\ln y,\ a = 0,\ b = 1$, **(6)** $u(x, y) = (x - 1)\ln(xy),\ a = 1,\ b = 1$,
(7) $u(x, y) = (x - 1)(y - 1)\ln(xy),\ a = 1,\ b = 1$, **(8)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,
(9) $u(x, y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(10)** $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)},\ a = 0,\ b = 0$,
(11) $u(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(12)** $u(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(13) $u(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(14) $u(x, y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x},\ u(x, 0) = 0,\ u(0, y) = 0,\ a = 0,\ b = 0$.

3. Найдите $\lim_{(x;y)\to(0;0)} u(x, y)$, если точка $(x; y)$ приближается к точке $(0; 0)$ по кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \to 0$,
(1) $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t$, (**b**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = -t$, (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t$,
(2) $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, (**a**) $\varphi(t) = 2t,\ \psi(t) = t$, (**b**) $\varphi(t) = -2t,\ \psi(t) = t$, (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t$,
(3) $u(x, y) = \frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2}$, (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t$, (**b**) $\varphi(t) = -t,\ \psi(t) = t$, (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t$,
(4) $u(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$, (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t$, (**b**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^2$, (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = -t^2$,
(5) $u(x, y) = \frac{2x^3y}{x^6+y^2}$, (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t$, (**b**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^2$, (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^3$,

4. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, не существует, если
(1) $u(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(3)** $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(4) $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4},\ a = 0,\ b = 0$, **(5)** $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(6) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$, **(7)** $u(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(8) $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)},\ a = 0,\ b = 1$, **(9)** $u(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(10) $u(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2-1},\ a = 1,\ b = 0$, **(11)** $u(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy},\ a = 0,\ b = 0$,
(12) $u(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x},\ a = 0,\ b = 0$, **(13)** $u(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(14) $u(x, y) = \sin\frac{1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(15)** $u(x, y) = \sin\frac{1}{y} + \sin\frac{1}{x},\ a = 0,\ b = 0$,

5. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,
(1) $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(2)** $u(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(4)** $u(x, y) = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$,
(5) $u(x, y) = \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$, **(6)** $u(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$, **(7)** $u(x, y) = e^{-x^2}$, **(8)** $u(x, y) = ye^{-x^2}$,
(9) $u(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,