fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-03

Тема: Дифференцирование функции нескольких переменных

1. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = 2x + 3y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(2)** $u = xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_2 = (1;\ -1)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1;\ 2)$. **(4)** $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(5)** $u = x^y$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (3; -2)$; **(6)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (0; 0)$, $\vec{L} = (1; 1)$. **(7)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (3; -2)$. **(8)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L} = (1; -1)$. **(9)** $u = xy \ln(x^2 + y^2)$, $M_0 = ((2e)^{-0,5};\ (2e)^{-0,5})$, $\vec{L} = (3;\ -2)$; $M_0 = (2^{-0,5};\ 2^{-0,5})$, $\vec{L} = (1;\ -1)$; **(10)** $u = (x^2 + y^2)^2 e^{-x^2-y^2}$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L} = (3;\ -2)$.

2. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.
(2) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.
(3) $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$,
(4) $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z), M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$.

3. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) = u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) = u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для
(1) $u = 3x + 4y,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(2) $u = 3x + 4y,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(3) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (0;\ 0),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(4) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(5) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(6) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ -0{,}1)$,
(7) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (0{,}01;\ -0{,}01)$,
(8) $u = xy,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (1;\ -1)$,
(9) $u = xy,\ (x, y) = (5;\ 5),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ -0{,}1)$,
(10) $u = xy,\ (x, y) = (5;\ 5),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ 0{,}1)$,
(11) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x, y) = (1;\ 1),\ (dx, dy) = (1;\ 1)$,
(12) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x, y) = (0;\ 0),\ (dx, dy) = (1;\ 1)$,

4. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(x^2)$, **(2)** $u(x) = f(e^x)$, **(3)** $u(x) = f(f(x))$, **(4)** $u(x) = \sqrt{f(x)}$,

5. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t, s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(x, x)$, **(2)** $u(x) = f(x, x^2)$, **(3)** $u(x) = f(x, 1)$, **(4)** $u(x) = f(\sqrt{x}, x)$,

6. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y) = f(x) + f(y)$, **(2)** $u(x, y) = f(x + y)$, **(3)** $u(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)}$,
(4) $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, **(5)** $u(x, y) = f(xy)$, **(6)** $u(x, y) = f(x)f(y)$,

7. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t, s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y) = f(2x, 3y)$, **(2)** $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(3)** $u(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$.
(4) $u(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$. **(5)** $u(x, y) = f(f(x, y), f(y, x))$.

8. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x, y) = f(x) + g(y)$,
(2) $u(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$, **(3)** $u(x, y) = f(x)g(y)$, **(4)** $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$,
(5) $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$. **(6)** $u(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$. **(7)** $u(x, y) = f(x, y) + g(y, x)$.

9. Найдите частные производные первого порядка функции $u(x, y, z) = x^{x^2 y \arcsin \sqrt{z}}$.

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-03

Тема: Недифференцируемые функции нескольких переменных

Более сложные задачи:

10. Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad}u,\vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

11. Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad}u,\vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

12. Пусть $u(x,y)=3x+4y+12xy+x^2+2y^2$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad}u,\vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

13. Пусть $u(x,y,z)=\sqrt[3]{xyz}$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad}u,\vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx,y+dy,z+dz)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy-\frac{\partial u}{\partial z}dz=o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

14. Пусть $u(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad}u,\vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx,y+dy,z+dz)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy-\frac{\partial u}{\partial z}dz=o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$?

(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

15. Пусть $u(x, y, z) = x + y + z + xy + xz + yz$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

16. Докажите, что если в точке $(x_0,\ y_0)$ функция $u(x, y)$ имеет производную по любому направлению $\overrightarrow{l}$, причем $\forall\overrightarrow{l}$ эта производная не равна нулю, то функция $u(x, y)$ не дифференцируема в указанной точке.

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-03
Тема: Экономические приложения первого дифференциала

17. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине x^2y^3 ($x,\ y$ выражены в сотнях человек). Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $6 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^2y^3\big(6 - x - y\big)$. В данный момент в доме моды работают 100 менеджеров и 100 портных, т.е. $x = y = 1$. Можно нанять еще Δx менеджеров и Δy портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$ чтобы прирост прибыли был максимален?

18. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz\big(4 - x - y - z\big)$. В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 50 дизайнеров и 60 портных, т.е. $x = 0{,}4$, $y = 0{,}5$, $z = 0{,}6$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

19. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?