fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-04

Тема: Формула Тейлора для функции нескольких переменных

1. Найдите первый и второй дифференциалы. Запишите формулу Тейлора с центром в указанной точке для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано,
Для обязательного разбора на семинаре: (1) $u = 2x + 3y,\ M_0 = (1; 1)$,
(2) $u = x^2 + y^2,\ M_0 = (0; 0)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ M_0 = (1; 1)$,
Обязательное задание на дом: (4) $u = xy,\ M_0 = (0; 0)$, **(5)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (1; 1)$,
Образцы экзаменационных заданий: (6) $u = x^2 + 2xy + y^2,\ M_0 = (0; 0)$,
(7) $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (0; 0)$, **(8)** $u = xy,\ M_0 = (3; 2)$, **(9)** $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (2; 3)$,
(10) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ M_0 = (0; 0)$, **(11)** $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ M_0 = (1; 1)$, **(12)** $u = x^y,\ M_0 = (1; 1)$,
(13) $u = x^y,\ M_0 = (4; \frac{1}{2})$, **(14)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0; 0)$, **(15)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0; 1)$,
(16) $u = 2x^2 + y^2 - 2y^4 - x^4,\ M_0 = (0; 0),\ M_1 = (1; 0),\ M_2 = (1; \frac{1}{2})$,
Более сложные задания: (17) $u = xy\ln(x^2 + y^2), M_0 = ((2e)^{-0,5}; (2e)^{-0,5})$,
(18) $u = (x^2 + y^2)^2 e^{-x^2 - y^2},\ M_0 = (1; 1)$,

2. Найдите первый и второй дифференциалы в точке M с координатами (x, y, z) и в точке M_0 с заданными координатами (x_0, y_0, z_0). Запишите формулу Тейлора с центром в указанных точках для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано.
Для обязательного разбора на семинаре: (1) $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$,
Обязательное задание на дом: (2) $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz,\ M_0 = (0; 0; 0)$,
Образцы экзаменационных заданий: (3) $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$,
(4) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (0; 1; 2)$, **(5)** $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (1; 1; 1)$, **(6)** $u = xyz,\ M_0 = (0; 0; 0)$,
Более сложные задания: (7) $u = xyz(4 - x - y - z),\ M_0 = (1; 1; 1)$,
(8) $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z),\ M_0 = (1; 1; 1)$,

3. Найдите значение многочлена Тейлора $P_1(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy)$, многочлена Тейлора $P_2(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0|dx, dy)$, оцените приближенно значение $\text{A} = f(x_1, y_1)$, $dx = x_1 - x_0$, $dy = y_1 - y_0$, используя первый дифференциал и используя второй дифференциал, если
Для обязательного разбора на семинаре: (1) $f(x, y) = xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}8)$,
Обязательное задание на дом: (2) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
Образцы экзаменационных заданий: (3) $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(4) $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(5)** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(6)** $f(x, y) = xy(3 - x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(7) $f(x, y) = x^2y(4 - 2x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
Более сложные задания: (8) $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(9) $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $A = f(2{,}1,\ 2{,}9)$, **(10)** $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 3{,}9)$, **(11)** $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 4{,}41)$,

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-04

Тема: Дифференцирование сложной функции

4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных,
Для обязательного разбора на семинаре: (1) $u(x, y) = f(xy)$,
Обязательное задание на дом: (2) $u(x, y) = f(x + y)$,
Образцы экзаменационных заданий: (3) $u(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$,
(5) $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(6)** $u(x) = f(x, x)$, **(7)** $u(x) = f(x, x^2, x^3)$,
(8) $u(x, y) = f(x - y) + f(x + y)$. **(9)** $u(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$. **(10)** $u(x, y) = \frac{f(x,y)}{f(y,x)}$.

5. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных,
Для обязательного разбора на семинаре: (1) $u(x, y) = f(x)g(y)$,
Обязательное задание на дом: (2) $u(x, y) = f(x) + g(y)$,

Образцы экзаменационных заданий: (3) $u(x,y,z) = f(x) + g(y) + h(z)$,
(4) $u(x,y,z) = f(x)g(y)h(z)$, **(5)** $u(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$. **(6)** $u(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$.
(7) $u(x,y) = f(x,y) + g(y,x)$.

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-04

Тема: Экономические приложения

На этом семинаре доказывать, что прибыль максимальна, не нужно.

Для обязательного разбора на семинаре:

6. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3 - x - y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$.
(2) Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$. Сравните с точным значением.

Обязательное задание на дом:

7. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4 - 2x - y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$.
(2) Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}1$, $y = 0{,}8$. Сравните с точным значением.

Более сложные задания:

8. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4 - x - y - z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$, $z = 1{,}02$. Сравните с точным значением.

9. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = y = z = 1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?