fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-01

Тема: Неопределенный интеграл

1. Найдите, используя таблицу производных, **(1)** $\int dx$, **(2)** $\int x dx$, **(3)** $\int x^7 dx$, **(4)** $\int \frac{dx}{x}$, **(5)** $\int \frac{dx}{x^2}$, **(6)** $\int \sqrt{x}\, dx$, **(7)** $\int \sqrt[3]{x}\, dx$, **(8)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$, **(9)** $\int \cos x\, dx$, **(10)** $\int \sin x\, dx$, **(11)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, **(12)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$, **(13)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(14)** $\int \frac{dx}{1+x^2}$, **(15)** $\int e^x dx$, **(16)** $\int 2^x dx$, **(17)** $\int e^{-x} dx$,

2. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$, **(2)** $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, **(3)** $\int x\cos(x^2)\, dx$, **(4)** $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$, **(5)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$, **(6)** $\int \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}\, dx$, **(7)** $\int \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, **(8)** $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$, **(9)** $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$, **(10)** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$, **(11)** $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\, dx$, **(12)** $\int xe^{-x^2}\, dx$, **(13)** $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$, **(14)** $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx$, **(15)** $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$,

3. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int \frac{x\, dx}{1-x^2}$, **(2)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(3)** $\int \frac{x\, dx}{1+x^2}$, **(4)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$,

4. Найдите, интегрируя по частям, **(1)** $\int xe^x\, dx$, **(2)** $\int xe^{-x}\, dx$, **(3)** $\int x^2 e^x\, dx$, **(4)** $\int x\cos x\, dx$, **(5)** $\int x^2\cos x\, dx$, **(6)** $\int x\sin x\, dx$, **(7)** $\int x^2 \sin x\, dx$, **(8)** $\int x\sin 3x\, dx$, **(9)** $\int \ln x\, dx$, **(10)** $\int x\ln x\, dx$, **(11)** $\int \operatorname{arctg} x\, dx$, **(12)** $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$, **(13)** $\int \arcsin x\, dx$,

5. Найдите интеграл от рациональной функции, **(1)** $\int \frac{dx}{1-x^2}$, **(2)** $\int \frac{x\, dx}{1-x^2}$, **(3)** $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(4)** $\int \frac{x\, dx}{x^2-5x+6}$, **(5)** $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+6}$, **(6)** $\int \frac{x^2 dx}{x^2-5x+6}$, **(7)** $\int \frac{x^3 dx}{x^2-5x+6}$, **(8)** $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$, **(9)** $\int \frac{x\, dx}{(x-2)^2}$, **(10)** $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(11)** $\int \frac{x\, dx}{x^2+x+1}$, **(12)** $\int \frac{dx}{e^x-1}$, **(13)** $\int \frac{e^x\, dx}{e^x-1}$,

6. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int \frac{dx}{\cos x}$, **(2)** $\int \frac{dx}{\sin x}$,

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-01

Тема: Определенный интеграл

1. ⋆ Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и натуральное число $n>0$. Пусть $h=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+kh$, так что $x_0=a$, $x_n=b$, и $S_n=\sum_{k=1}^n h\cdot \max_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$, $s_n=\sum_{k=1}^n h\cdot \min_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$. Найдите S_n, $\lim_{n\to+\infty} S_n$, s_n, $\lim_{n\to+\infty} s_n$, если **(1)** $f(x)=1$, $[a;b]=[0;1]$, **(2)** $f(x)=x$, $[a;b]=[0;1]$, **(3)** $f(x)=x^2$, $[a;b]=[0;1]$, **(4)** $f(x)=2^x$, $[a;b]=[0;1]$, **(5)** $f(x)=e^x$, $[a;b]=[0;1]$, убедитесь в том, что $\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx$. Можно использовать тождества $\sum_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}$, $|q|<1]$.

2. Найдите **(1)** $\int_0^1 x\, dx$, **(2)** $\int_0^1 x^7\, dx$, **(3)** $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, **(4)** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$, **(5)** $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$, **(6)** $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, dx$, **(7)** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, **(8)** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, **(9)** $\int_0^\pi \sin x\, dx$, **(10)** $\int_0^\pi \sin^2 x\, dx$, **(11)** $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$, **(12)** $\int_1^e \ln x\, dx$, **(13)** $\int_0^1 e^x\, dx$, **(14)** $\int_0^1 e^{-x}\, dx$, **(15)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **(16)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(17)** $\int_0^{\frac12} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(18)** $\int_0^1 \arcsin x\, dx$, **(19)** $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$, **(20)** $\int_2^3 \frac{dx}{1-x^2}$, **(21)** $\int_2^3 \frac{x\, dx}{1-x^2}$, **(22)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{4-x^2}$, **(23)** $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(24)** $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+5}$,

3. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек $(x;y)$, для которых
(1) $x\in[0;\,1]$, $y\in[0;\,x]$, **(2)** $x\in[0;\,2]$, $y\in[0;\,x(2-x)]$, **(3)** $x\in[0;\,3]$, $y\in[0;\,x^2(3-x)]$,
(4) $x\in[0;\,1]$, $y\in[0;\,x^{2008}(1-x)]$, **(5)** $x\in[0;\,1]$, $y\in[0;\,x^2]$, **(6)** $x\in[0;\,1]$, $y\in[x^7;\,x^6]$,
(7) $x\in[0;\,1]$, $y\in[\sqrt[6]{x};\,\sqrt[7]{x}]$, **(8)** $x\in[0;\,1]$, $y\in[\sqrt{x};\,1]$, **(9)** $x\in[0;\,1]$, $y\in[0;\,\sqrt{x}]$,
(10) $x\in[0;\,\pi]$, $y\in[0;\,\sin x]$, **(11)** $x\in[0;\,\pi/2]$, $y\in[0;\,\sin x]$, **(12)** $x\in[0;\,1]$, $y\in[\arcsin x;\,\pi/2]$,
(13) $x\in[0;\,1]$, $y\in[0;\,\arcsin x]$, **(14)** $x\in[1;\,e]$, $y\in[0;\,\ln x]$, **(15)** $x\in[2;\,4]$, $y\in[2^x;\,x^2]$,
(16) $x\in[2;\,4]$, $y\in[4^x;\,x^4]$,

4. ⋆ Докажите, что $\ln(n+1)<\sum_{k=1}^n \frac1k<1+\ln n$.

5. Пусть интегрируемая функция $\rho(x)$ определена на $[a;\,b]$, $\rho(x)\geqslant 0$, $M_0=\int_a^b \rho(x)dx$, $M_0>0$, $M_1 \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x\rho(x)dx$, $M_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x^2\rho(x)dx$, $<x> \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M_1}{M_0}$, $<x^2> \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M_2}{M_0}$, $Dx \overset{\text{def}}{=\!=} <x^2>-<x>^2$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x)=1,\ x\in[0;\,1]$, **(2)** $\rho(x)=x,\ x\in[0;\,1]$,
(3) $\rho(x)=x^2,\ x\in[0;\,12]$, **(4)** $\rho(x)=x(2-x),\ x\in[0;\,2]$, **(5)** $\rho(x)=x^2(3-x),\ x\in[0;\,3]$,
(6) $\rho(x)=x^2(1-x^2),\ x\in[0;\,1]$, **(7)** $\rho(x)=\sin x,\ x\in[0;\,\pi]$, **(8)** $\rho(x)=\frac{3}{x^4},\ x\in[1;\,10^8]$,
(9) $\rho(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x\in[10^{-8};\,1]$, **(10)** $\rho(x)=e^{-x},\ x\in[0;\,1000]$,