fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-05

Тема: Локальный экстремум функции нескольких переменных

С Семинар, для обязательного разбора на семинаре.

Д Домашнее, обязательное задание на дом.

Э Экзаменационные задания (образцы).

Т Трудные задания.

1. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y) = x^2 + y^2$, **(2)** $u(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, **(3)** $u(x,y) = xy$,

Д **(4)** $u(x,y) = x^2 - xy + y^2$, **(5)** $u(x,y) = x^2 + 8xy + y^2$, **(6)** $u(x,y) = x^2 - y^2$,

Э **(7)** $u(x,y) = x^2 + 4y^2$, **(8)** $u(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, **(9)** $u(x,y) = x^2 + 2xy$,

2. Докажите, что в точке $M_0(x_0; y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, но указанная точка не является точкой локального экстремума.

С **(1)** $u(x,y) = x^2 - 2xy + y^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$, **(2)** $u(x,y) = x^2 - 2xy,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,
(3) $u(x,y) = x^2y,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,

Д **(4)** $u(x,y) = x^4 + x^2y^2 - y^4,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$, **(5)** $u(x,y) = x^4 - y^4,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,
(6) $u(x,y) = x^3y^5,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,

Э **(7)** $u(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$, **(8)** $u(x,y) = x^5 + y^5,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,
(9) $u(x,y) = xy^3,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$, **(10)** $u(x,y) = xy(x^2 - y^2),\ x_0 = 0,\ y_0 = 0$,

Т **(11)** $u(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2},\ x_0 = 1,\ y_0 = 0$, **(12)** $u(x,y) = x\ln^2(x^2 + y^2 - 2),\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$,

3. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$,

Д **(2)** $u(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$,

Э **(3)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$,
(5) $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$,

Т **(6)** $u(x,y,z,t) = xyzt(5 - x - y - z - t)$, **(7)** $u(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$,
(8) $u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$. **(9)** $u(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$,

4. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy$, **(2)** $u(x,y) = xy(3 - x - y)$,

Д **(3)** $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, **(4)** $u(x,y) = xy^2(4 - x - 2y)$,

Э **(5)** $u(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x^4 - y^4$, **(6)** $u(x,y) = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$, **(7)** $u(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$,
(8) $u(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, **(9)** $u(x,y) = xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(10)** $u(x,y) = xye^{-x-y}$,
(11) $u(x,y) = x^2y^2e^{-x-y}$, **(12)** $u(x,y) = x^3y^3e^{-x-y}$, **(13)** $u(x,y) = xy^2e^{-x-y}$,
(14) $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y}$, **(15)** $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(16)** $u(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$,

5. Докажите, что в точке $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, но указанная точка не является точкой локального экстремума.

С **(1)** $u(x,y,z) = xyz,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$,

Д **(2)** $u(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z),\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$,

Э **(3)** $u(x,y,z) = xy^2z^4,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$,
(5) $u(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$, **(6)** $u(x,y,z) = x^2y^2z^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, z_0 = 0$,

6. Пусть $u(x,y) = x^2y + \frac{8}{x^2} + \frac{8}{y}$. **(1)** Найдите все точки возможного экстремума функции $u(x,y)$ в области $x > 0,\ y > 0$. **(2)** Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.
(3) Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для указанной функции с центром в точке локального экстремума для $n = 2$.

♦ $x = \sqrt{2},\ y = 2$.

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-05

Тема: Экономические приложения

На этом семинаре нужно доказать, что прибыль максимальна.

С

7. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4-2x-y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}1$, $y=0{,}8$. Сравните с точным значением.

Д

8. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x,y выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3-x-y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3-x-y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}01$, $y=0{,}99$. Сравните с точным значением.

Э

9. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4-x-y-z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4-x-y-z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}01$, $y=0{,}99$, $z=1{,}02$. Сравните с точным значением.

Т

10. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11-5x-3y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11-5x-3y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=y=z=1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x=y=z=0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

11. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^4z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $12-5x-4y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^4z^2\big(12-5x-4y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=y=z=0{,}99$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 40 дизайнеров и 40 портных, т.е. $x=y=z=0{,}4$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?