2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 01
Тема: Точки, последовательности, множества в пространстве

1. Свойства множеств

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность),

Д Обязательное задание на дом.

2. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (с концами), **(2)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности),

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(2)** Буква М русского алфавита.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Треугольник на плоскости (без внутренности), **(2)** Буква Г русского алфавита.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0; 0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots M_n \ldots$. **(2)** То же множество исключая все точки M_n. **(3)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n}$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

6. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{2^n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0; 0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots M_n \ldots$. **(2)** То же множество исключая все точки M_n. **(3)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2^n}$,

2. Свойства аналитических множеств

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

7. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 = 1$, **(2)** $x^2 + y^2 > 1$, **(3)** $|x| + |y| \leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

8. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 < 1$, **(2)** $|x| + |y| \geqslant 1$, **(3)** $1 \leqslant |x| + |y| < 2$, **(4)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -|x| \leqslant y \leqslant |x|, \end{cases}$

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

9. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$, **(2)** $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, **(3)** $|x| + |y| = 1$, **(4)** $|x| + |y| < 1$, **(5)** $1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2$, **(6)** $\begin{cases} x + y = 1, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 \geqslant 1$, **(2)** $1 < x^2 + y^2 < 4$, **(3)** $1 \leqslant x^2 + y^2 < 4$, **(4)** $|x| + |y| > 1$, **(5)** $x + y = 1$, **(6)** $\begin{cases} x + y = 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -|x| < y < |x|, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x^2 + 9y^2 \leqslant 9, \\ 9x^2 + y^2 \leqslant 9, \end{cases}$ **(3)** $|x| + 5|y| < 6 \bigcup 5|x| + |y| < 6$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

12. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.

Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых
(1) $x^2+9y^2=9\bigcup 9x^2+y^2=9$, **(2)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2<9,\end{cases}$

3. Последовательности точек в пространстве

С Для обязательного разбора на семинаре.

13. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\frac{n+1}{n}$, $y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=\frac{5n+6}{6n+5}$, $y_n=\frac{n-1}{n+2}$. **(3)** $x_n=n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$, $y_n=\sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$.
(4) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **(5)** $x_n=\sin\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$, $n>1$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n}$, $y_n=\sin\frac{\pi}{n}$.
(7) $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2^n}$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{3^n}$.

Д Обязательное задание на дом.

14. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\frac{3n+2}{2n+3}$, $y_n=\frac{4n-1}{3n+1}$. **(2)** $x_n=n\sin\frac{1}{n}$, $y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$. **(3)** $x_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$, $y_n=\left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$.
(4) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1}$, $y_n=2^{x_n}$. **(5)** $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(-2)^n}$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}\frac{3}{3^n}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

15. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\left(1-\sin\frac{5}{n}\right)^{3n}$, $y_n=\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(2)** $x_n=\sqrt[n]{n}$, $y_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. **(3)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{6}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{6}$.
(4) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1}$, $y_n=\log_3(x_n)$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

16. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\left[1-\ln(1+\frac{1}{n})\right]^n$, $y_n=\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(2)** $x_n=\left((1+n)\right)^{\frac{1}{n}}$, $y_n=\left((1+2n)\right)^{\frac{3}{n}}$,
(3) $x_n=\cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(4)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(5)** $x_n=\frac{2n+3}{2n-1}$, $y_n=2x_{n-1}-x_{n-2}$, $n>3$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

17. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$, $y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$. **(2)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n$, $y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.
(3) $x_n=\cos n$, $y_n=\sin n$. **(4)** $x_n=\cos\varphi_n$, $y_n=\sin\varphi_n$, $\varphi_n=\ln n$.
(5) $x_n=\cos\varphi_n$, $y_n=\sin\varphi_n$, $\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

18. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2}$, $y_n=\left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$. **(2)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n$, $y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.
(3) $x_n=\cos\varphi_n$, $y_n=\sin\varphi_n$, $\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$. **(4)** $x_n=\cos\varphi_n$, $y_n=\sin\varphi_n$, $\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2^n}$.
(5) $x_n=\cos\varphi_n$, $y_n=\sin\varphi_n$, $\varphi_n=\sqrt{n}$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

19. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество точек $(x_n;y_n)$, $n\in N$ (все натуральные числа), если
(1) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$. **(2)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n}$, $y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(3)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{3}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{3}$. **(4)** $x_n=\cos n$, $y_n=\sin n$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

20. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.

Множество точек $(x_n; y_n)$, $n \in N$ (все натуральные числа), если
(1) $x_n = n$, $y_n = n$. **(2)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$. **(3)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{4}$. **(4)** $x_n = \cos n^2$, $y_n = \sin n^2$.

4. Открытые и замкнутые множества

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

21. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$, **(2)** $x = y = 0$, **(3)** $|x + y| > 1$, **(4)** $x^2 + y^2 = 1$, **(5)** $-1 < x < 1,\ y = 0$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

22. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2 + y^2 > 1$, **(2)** $(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = 0$, **(3)** $|x + y| \leqslant 1$, **(4)** $y = x^2$, **(5)** $-1 < x < 1,\ y = x$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?