Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boomboiok@yandex.ru, boombook.narod.ru

2007-2008 Домашнее задание семинара m3-02

Тема: Точки, последовательности и множества в пространстве

С Семинар, для обязательного разбора на семинаре.

Д Домашнее, обязательное задание на дом.

Э Экзаменационные задания (образцы).

Т Трудные задания.

1. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.

С **(1)** Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность),

Д **(4)** Отрезок на плоскости (с концами), **(5)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(6)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности),

Э **(7)** Круг на плоскости (без окружности), **(8)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(9)** Треугольник на плоскости (без внутренности), **(10)** Шар (без сферы). **(11)** Буква М русского алфавита. **(12)** Буква Г русского алфавита.

2. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых

С **(1)** $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2>1$, **(3)** $|x|+|y|\leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -1<x<1, \end{cases}$

Д **(5)** $x^2+y^2<1$, **(6)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(7)** $1\leqslant |x|+|y|<2$, **(8)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -|x|\leqslant y\leqslant |x|, \end{cases}$

Э **(9)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(10)** $x^2+y^2\geqslant 1$, **(11)** $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, **(12)** $1<x^2+y^2<4$, **(13)** $1\leqslant x^2+y^2<4$, **(14)** $|x|+|y|=1$, **(15)** $|x|+|y|<1$, **(16)** $|x|+|y|>1$, **(17)** $1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2$, **(18)** $x+y=1$, **(19)** $\begin{cases} x+y=1, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ **(20)** $\begin{cases} x+y=1, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(21)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(22)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$

Т **(23)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -|x|<y<|x|, \end{cases}$ **(24)** $x^2+9y^2=9 \bigcup 9x^2+y^2=9$, **(25)** $\begin{cases} x^2+9y^2\leqslant 9, \\ 9x^2+y^2\leqslant 9, \end{cases}$
(26) $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2\leqslant 9, \end{cases}$ **(27)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2<9, \end{cases}$

3. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.

С **(1)** $x_n=\frac{n+1}{n},\ y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=n\operatorname{tg}\frac{1}{n},\ y_n=\sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$. **(3)** $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
(4) $x_n=\sin\frac{1}{n},\ y_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$, $n>1$.

Д **(5)** $x_n=\frac{3n+2}{2n+3},\ y_n=\frac{4n-1}{3n+1}$. **(6)** $x_n=n\sin\frac{1}{n},\ y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$.
(7) $x_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$. **(8)** $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1},\ y_n=2^{x_n}$.

Э **(9)** $x_n=\frac{5n+6}{6n+5},\ y_n=\frac{n-1}{n+2}$. **(10)** $x_n=n^2\operatorname{tg}\frac{1}{n^2},\ y_n=n\sin\frac{1}{n^2}$.
(11) $x_n=\left(1-\sin 5n\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(12)** $x_n=\sqrt[n]{n},\ y_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. **(13)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$.
(14) $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(15)** $x_n=\frac{2n+3}{2n-1},\ y_n=2x_{n-1}-x_{n-2}$, $n>3$.
(16) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1},\ y_n=\log_3(x_n)$.

Т **(17)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(18)** $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$. **(19)** $x_n=\left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2},\ y_n=\left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$.
(20) $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right),\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$. **(21)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n},\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$.
(22) $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n,\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.

4. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.

Множество точек $(x_n; y_n)$, $n \in N$ (все натуральные числа), если

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $x_n = \cos\frac{\pi}{n},\ y_n = \sin\frac{\pi}{n}$. **(2)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{2},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $x_n = \frac{1}{n},\ y_n = \frac{1}{n}$. **(4)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{3},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{3}$.

$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{4}$. **(6)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{6},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{6}$. **(7)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{8},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{8}$.
(8) $x_n = \cos\frac{2\pi n}{5},\ y_n = \sin\frac{2\pi n}{5}$.

$\boxed{\text{Т}}$ **(9)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{8}$. **(10)** $x_n = \cos n,\ y_n = \sin n$. **(11)** $x_1 = 1,\ y_1 = 0$,
(12) $x_{n+1} = -y_n,\ y_{n+1} = x_n$.

5. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$, **(2)** $x = y = 0$, **(3)** $|x + y| > 1$,
(4) $x^2 + y^2 = 1$, **(5)** $-1 < x < 1,\ y = 0$, являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?