А.А.Быков, boomboiok@yandex.ru, boombook.narod.ru

2007-2008 Домашнее задание семинара m3-03

Тема: Дифференцирование функции нескольких переменных

1. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0.

С **(1)** $u = 2x + 3y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(2)** $u = xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_2 = (1;\ -1)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1;\ 2)$.

Д **(4)** $u = 3x - 2y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. $\vec{L}_3 = (-3; 2)$, **(5)** $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(6)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; 1)$. $M_2 = (0; 0)$, $\vec{L}_{2a} = (1; 1)$, $\vec{L}_{2b} = (1; -1)$, $\vec{L}_{2c} = (1; 0)$.

Э **(7)** $u = x^y$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (3; -2)$; **(8)** $u = xy^2(4 - x - 2y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$. **(9)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L} = (1; -1)$. **(10)** $u = x^2 + 2y^2 - 2x^4 - y^4$, $M_1 = (1; 0{,}5)$, $\vec{L}_1 = (1; -1)$. $M_2 = (1; 1)$, $\vec{L}_2 = (1; 1)$. **(11)** $u = xy\ln(x^2 + y^2)$, $M_0 = ((2e)^{-0{,}5};\ (2e)^{-0{,}5})$, $\vec{L} = (3;\ -2)$; $M_0 = (2^{-0{,}5};\ 2^{-0{,}5})$, $\vec{L} = (1;\ -1)$; **(12)** $u = (x^2 + y^2)^2 e^{-x^2 - y^2}$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L} = (3;\ -2)$.

2. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).

С **(1)** $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.

Д **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.

Э **(3)** $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$,

Т **(4)** $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z), M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$.

3. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) = u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) = u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для

С **(1)** $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ -0{,}1)$,
(2) $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (-0{,}4;\ 0{,}3)$,
(3) $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (0{,}4;\ 0{,}3)$,

Д **(4)** $u = xy,\ (x, y) = (5;\ 5),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ -0{,}1)$,
(5) $u = xy,\ (x, y) = (3;\ 3),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ 0{,}1)$,
(6) $u = \ln(x^2 + y^2),\ (x, y) = (4;\ 3),\ (dx, dy) = (0{,}4;\ 0{,}3)$,
(7) $u = \ln(x^2 + y^2),\ (x, y) = (4;\ 3),\ (dx, dy) = (-0{,}3;\ 0{,}4)$,

Э **(8)** $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (0{,}01;\ -0{,}01)$,
(9) $u = xy,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (1;\ -1)$,
(10) $u = 3x + 4y,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(11) $u = 3x + 4y,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(12) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (0;\ 0),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(13) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (3;\ 4)$,
(14) $u = x^2 + y^2,\ (x, y) = (3;\ 4),\ (dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(15) $u = xy,\ (x, y) = (5;\ 5),\ (dx, dy) = (0{,}1;\ 0{,}1)$,
(16) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x, y) = (1;\ 1),\ (dx, dy) = (1;\ 1)$,
(17) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x, y) = (0;\ 0),\ (dx, dy) = (1;\ 1)$,
(18) $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ (x, y) = (-1;\ -1),\ (dx, dy) = (2;\ 2)$,

4. Найдите дифференциал первого порядка функции

С **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$,

Д **(4)** $p^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(5)** $(\arcsin x)^q$, **(6)** $(\arcsin x)^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$,

Э **(7)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(8)** $(\operatorname{arctg} x)^q$, **(9)** $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

5. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция,

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x) = f(2x+1)$, **(2)** $u(x) = f(x^2)$, **(3)** $u(x) = e^{f(x)}$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(4)** $u(x) = f(3x-2)$, **(5)** $u(x) = f(e^x)$, **(6)** $u(x) = \ln f(x)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(7)** $u(x) = f(\ln x)$, **(8)** $u(x) = f(f(x))$, **(9)** $u(x) = \sqrt{f(x)}$,

6. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x) = f(x,2x)$, **(2)** $u(x) = \ln f(x,2x)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u(x) = f(x^2,x^3)$, **(4)** $u(x) = e^{f(2x,x)}$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u(x) = f(3x-2,e^x)$, **(6)** $u(x) = \sin\big(f(3x-2,e^x)\big)$, **(7)** $u(x) = f(\sqrt{x},x)$,

7. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y) = f(x)+f(y)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x,y) = f(x+y)$, **(3)** $u(x,y) = \frac{f(x)}{f(y)}$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(4)** $u(x,y) = f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y) = f(xy)$, **(6)** $u(x,y) = f(x)f(y)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(7)** $u(x,y) = f(x)^{f(y)}$, **(8)** $u(x,y) = \log_{f(x)} f(y)$,

8. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y) = f(2x,3y)$, **(2)** $u(x,y) = f(x,y)\cdot f(y,x)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u(x,y) = f(x+y,x-y)$, **(4)** $u(x,y) = f(x+y,x-y)\cdot f(x-y,x+y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u(x,y) = f(x,y)+f(y,x)$, **(6)** $u(x,y) = f(x,y)-f(y,x)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(7)** $u(x,y) = f(f(x,y),f(y,x))$, **(8)** $u(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$, **(9)** $u(x,y) = \log_{f(x,y)} f(x,y)$,

9. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y) = f(x)+g(y)$, **(2)** $u(x,y,z) = f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u(x,y,z) = f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$.
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u(x,y) = f(x)g(y)$, **(6)** $u(x,y,z) = f(x)g(y)h(z)$, **(7)** $u(x,y) = f(x-y)+g(x+y)$.
(8) $u(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$. **(9)** $u(x,y) = f(x,y)\cdot g(x,y)$.