А.А.Быков, boomboiok@yandex.ru, boombook.narod.ru


# 2007-2008 Домашнее задание семинара m3-03

**Тема: Недифференцируемые функции нескольких переменных**

$\boxed{\text{Т}}$

**10.** Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.
**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\vec{l}\right)$?
**(4)** Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**11.** Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$.
**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\vec{l}\right)$?
**(4)** Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**12.** Пусть $u(x,y)=3x+4y+12xy+x^2+2y^2$.
**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.
**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.
**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\vec{l}\right)$?
**(4)** Верно ли, что $u(x+dx,y+dy)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy=o(\rho)$ в точке (0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$?
**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**13.** Пусть $u(x,y,z)=\sqrt[3]{xyz}$.
**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.
**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\vec{l}\right)$?
**(4)** Верно ли, что $u(x+dx,y+dy,z+dz)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy-\frac{\partial u}{\partial z}dz=o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$?
**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**14.** Пусть $u(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.
**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.
**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\vec{l}\right)$?
**(4)** Верно ли, что $u(x+dx,y+dy,z+dz)-\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy-\frac{\partial u}{\partial z}dz=o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$?

**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**15.** Пусть $u(x, y, z) = x + y + z + xy + xz + yz$.

**(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.

**(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

**(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

**(4)** Верно ли, что $u(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$?

**(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

**16.** Докажите, что если в точке $(x_0,\ y_0)$ функция $u(x, y)$ имеет производную по любому направлению $\overrightarrow{l}$, причем $\forall \overrightarrow{l}$ эта производная не равна нулю, то функция $u(x, y)$ не дифференцируема в указанной точке.