Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boomboiok@yandex.ru, boombook.narod.ru

2007-2008 Домашнее задание семинара m3-05

Тема: Локальный экстремум функции нескольких переменных

С Семинар, для обязательного разбора на семинаре.

Д Домашнее, обязательное задание на дом.

Э Экзаменационные задания (образцы).

Т Трудные задания.

1. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y)=x^2+y^2$, **(2)** $u(x,y)=x^2+2xy+4y^2$, **(3)** $u(x,y)=xy$,

Д **(4)** $u(x,y)=x^2-xy+y^2$, **(5)** $u(x,y)=x^2+8xy+y^2$, **(6)** $u(x,y)=x^2-y^2$,

Э **(7)** $u(x,y)=x^2+4y^2$, **(8)** $u(x,y)=x^2-2xy+2y^2$, **(9)** $u(x,y)=x^2+2xy$,

2. Докажите, что в точке $M_0(x_0;y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, но указанная точка не является точкой локального экстремума.

С **(1)** $u(x,y)=x^2-2xy+y^2,\ x_0=0,\ y_0=0$, **(2)** $u(x,y)=x^2-2xy,\ x_0=0,\ y_0=0$,
(3) $u(x,y)=x^2y,\ x_0=0,\ y_0=0$,

Д **(4)** $u(x,y)=x^4+x^2y^2-y^4,\ x_0=0,\ y_0=0$, **(5)** $u(x,y)=x^4-y^4,\ x_0=0,\ y_0=0$,
(6) $u(x,y)=x^3y^5,\ x_0=0,\ y_0=0$,

Э **(7)** $u(x,y)=x^2-4xy+4y^2,\ x_0=0,\ y_0=0$, **(8)** $u(x,y)=x^5+y^5,\ x_0=0,\ y_0=0$,
(9) $u(x,y)=xy^3,\ x_0=0,\ y_0=0$, **(10)** $u(x,y)=xy(x^2-y^2),\ x_0=0,\ y_0=0$,

Т **(11)** $u(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2},\ x_0=1,\ y_0=0$, **(12)** $u(x,y)=x\ln^2(x^2+y^2-2),\ x_0=1,\ y_0=1$,

3. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y,z)=4x^2+4y^2+4z^2-2xy-2xz-2yz$,

Д **(2)** $u(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$,

Э **(3)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$, **(4)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$,
(5) $u(x,y,z)=xyz(4-x-y-z)$,

Т **(6)** $u(x,y,z,t)=xyzt(5-x-y-z-t)$, **(7)** $u(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z)$,
(8) $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$. **(9)** $u(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$,

4. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y)=x^5+y^5-5xy$, **(2)** $u(x,y)=xy(3-x-y)$,

Д **(3)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(4)** $u(x,y)=xy^2(4-x-2y)$,

Э **(5)** $u(x,y)=x^2+2y^2-2x^4-y^4$, **(6)** $u(x,y)=x^2y^2(3-x^2-y^2)$, **(7)** $u(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$,
(8) $u(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, **(9)** $u(x,y)=xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(10)** $u(x,y)=xye^{-x-y}$,
(11) $u(x,y)=x^2y^2e^{-x-y}$, **(12)** $u(x,y)=x^3y^3e^{-x-y}$, **(13)** $u(x,y)=xy^2e^{-x-y}$,
(14) $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y}$, **(15)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(16)** $u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$,

5. Докажите, что в точке $M_0=(x_0;y_0;z_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, но указанная точка не является точкой локального экстремума.

С **(1)** $u(x,y,z)=xyz,\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$,

Д **(2)** $u(x,y,z)=(x+y)(x+z)(y+z),\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$,

Э **(3)** $u(x,y,z)=xy^2z^4,\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$, **(4)** $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2,\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$,
(5) $u(x,y,z)=x^3+y^3+z^3,\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$, **(6)** $u(x,y,z)=x^2y^2z^2,\ x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$,

6. Пусть $u(x,y)=x^2y+\frac{8}{x^2}+\frac{8}{y}$. **(1)** Найдите все точки возможного экстремума функции $u(x,y)$ в области $x>0,\ y>0$. **(2)** Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.
(3) Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для указанной функции с центром в точке локального экстремума для $n=2$.

♦ $x=\sqrt{2}$, $y=2$.