Государственный университет - Высшая школа экономики
Рабочий план курса математического анализа

Министерство экономического развития и торговли Российской Федерации

Министерство образования Российской Федерации

Государственный университет -
Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики

Рабочий план 2007-2008 уч. год

«Математический анализ»

для направления «Бизнес-информатика»

(вторая ступень высшего профессионального образования – бакалавриат)

Автор: д.ф.-м.н., профессор А.А.Быков.

Рекомендуемая литература:

1. [МАВЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
2. [ЗУМА] Задачи и упражнения по математическому анализу, И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий, изд-во МГУ, 1988.: – 416с.

1. Модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Если количество занятий в параграфе не указано, то данный параграф занимает одно занятие. Продолжительность каждого занятия составляет 2 академических часа, т.е. 80 минут. Символом ■ помечены утверждения, доказываемые (формулируемые) на лекции. Символом ● помечены утверждения, доказываемые (формулируемые) самостоятельно. В название лекции вынесена только основная тема данной лекции.

Семинар 0.

Контрольная работа по элементарной математике, 15 задач на 40 минут.
Элементы теории множеств. Обьединение, пересечение. Символы $\bigcup$, $\bigcap$. Геометрическое отображение множеств и операций над ними. Символы $\in$, $\subset$.
Правила построения логических формул. Символы $\forall$ и $\exists$.
Решение элементарных неравенств, применяемых в теории пределов.
Типичное задание: найти все значения δ такие, что $\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, где

а) $f(x)=x^2$, $a=2$, $b=4$, $\varepsilon=1$,
б) $f(x)=\sin x$, $a=1$, $b=\sin 1$, $\varepsilon=0{,}1$,
в) $f(x)=\arcsin x$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\pi}{6}$, $\varepsilon=0{,}1$.

Москва 2007-2008

Лекция 1. Предел функции одной переменной.

1.1. Предел функции одной переменной.

1.1.1. Числовые множества.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками с помощью координатной прямой. Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколотая окрестность.

1.1.2. Понятие функции одной переменной.

Понятие функции одной переменной. Область определения, множество значений. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Графики элементарных функций. Преобразование графиков функций.

1.1.3. Ограниченные и неограниченные функции.

Ограниченные и неограниченные функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \to a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки). Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве). Ограниченность ■суммы, ●разности, ●произведения двух ограниченных функций.

1.1.4. Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции (с помощью графиков). Пример прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Методика вычисления пределов элементарных функций. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

1.1.5. Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. Связь односторонних пределов с пределом функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов. Предел функции при $x \to +0$, $x \to -0$.

1.1.6. Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \to +\infty$ (по Коши). ●Определение предела функции при $x \to -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

1.1.7. Бесконечно малые функции.

Бесконечно малые функции. Обозначение $o(1)$. ■Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: ■сумма, $o(1)+o(1)=o(1)$, ●разность, $o(1)-o(1)=o(1)$, ●произведение, $o(1)\cdot o(1)=o(1)$. Понятие неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$. ●Теорема об ограниченности суммы бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)+O(1)=O(1)$. ●Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)\cdot O(1)=o(1)$.

1.1.8. Теоремы о пределах функций.

Теоремы ■о пределе суммы двух функций, ● о пределе разности, ● о пределе произведения и ■ о пределе частного. Предельный переход в неравенствах.

Лекция 2. Первый замечательный предел.

1.1.9. Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке.
Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке.
Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to+\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to-\infty$.

1.1.10. Понятие бесконечно малой функции более высокого порядка малости по сравнению со степенной функцией.

Определение $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^{-1})$ при $x\to+\infty$. Определение $f(x)=o(x^{-n})$ при $x\to+\infty$. Примеры применения, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{3}$, вывод асимптотических формул, $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$ при $x\to 0$.

1.1.11. Техника вычисления пределов иррациональных функций.

Асимптотические формулы $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$.

Асимптотическая формула $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$ при $x\to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$, $a>0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+x/2)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

1.1.12. Первый замечательный предел.

Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация. Асимптотические формулы $\sin=x+o(x)$, $\sin=x+o(x^2)$ при $x\to 0$.

Асимптотические формулы $\cos=1+o(1)$, $\cos=1+o(x)$, $\cos=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Асимптотические формулы $\mathrm{tg}=x+o(x^2)$, $\mathrm{tg}=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$ при $x\to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin a}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\alpha+x)-\cos a}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-2\sin 2x+\sin x}{x^3}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-2\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(x-a)}{x^2}$.

Лекция 3. Второй замечательный предел.

1.1.13. Теорема о пределе монотонной функции.

Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции. Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

1.1.14. Второй замечательный предел.

Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Асимптотические формулы $\ln(1+x)=o(1)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные.

Асимптотические формулы $e^x=1+o(1)$, $e^x=1+x+o(x)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.
Вычисление пределов, включающих тригонометрические и иррациональные функции.

Лекция 4. Непрерывные функции и обратная функция.

1.1.15. Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

1.1.16. Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

1.1.17. Сложная функция.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

1.1.18. Обратная функция.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции, без доказательства). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Лекция 5. Производные и касательная.

1.2. Производная и дифференциал функции одной переменной.

1.2.1. Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные и их связь с производной функции в точке.

1.2.2. Вычисление производной.

Правила вычисления производной суммы, произведения и отношения двух функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производная степенной и показательной функций. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Теорема о производной сложной функции.

1.2.3. Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы.

1.2.4. Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Определение производной n-го порядка. Правила вычисления производной суммы и произведения. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций. Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x, x^2e^x.

Лекция 6. Дифференциал и старшие дифференциалы.

1.2.5. Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

1.2.6. Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций. Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Использование дифференциала для приближенных вычислений. Формула малых приращений. Приближенное вычисление функций.

1.2.7. Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции.

1.2.8. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Понятие формулы Тейлора и применение для приближенных вычислений.

Лекция 7. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

1.3.2. Теоремы о корнях непрерывной функции.

Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Существование корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

1.3.3. Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

1.3.4. Формула конечных приращений.

Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

1.3.5. Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции. Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции. Исследование локального экстремума.

2. Модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция 8.

2.1.1. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$.

Правило Лопиталя для случая, когда $x \to +\infty$.

Правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталя.
Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталя.

Лекция 9.

2.1.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора.
Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
Формула Маклорена.
Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

2.1.3. Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы.
Вывод и применение формул

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o\left(x\right)$,

$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$,

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)$ и аналогичных для вычисления пределов.

2.1.4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа.
Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа.
Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора.
Приближенное вычисление значения функции.
Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

Лекция 10.

2.2. Числовые последовательности.

2.2.1. Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности.
Ограниченные и неограниченные числовые последовательности.
Определение предела последовательности.
Ограниченность сходящейся последовательности.
Определение бесконечно малой последовательности.
Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей.
Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями.

Определение бесконечно большой последовательности.
Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями.
Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

2.2.2. Свойства сходящихся последовательностей.

Арифметические операции, предельный переход в неравенствах.
Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$.
Другие типы неопределенностей, примеры.
Исследование неопределенностей методом Лопиталя.
Исследование неопределенностей методом асимптотических формул.
Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы.
Понятие и определение монотонной последовательности.
Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности.

2.2.3. Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e.
Вычисление пределов типа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$.
Эталонные последовательности $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β, b^n, $n!$, n^n.
Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}$ при $\beta>0$.
Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta>0$, $a>1$.
Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n}$ при $b>1$.
Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}$.
Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2.2.4. Предельные точки числовой последовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности.
Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности.
Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности.
Верхний и нижний пределы последовательности.
Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела.
Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

2.2.5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность.
Ограниченность фундаментальной последовательности.
Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.
Критерий Коши предела функции в точке.
Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности.
Теорема об эквивалентности двух определений предела функции.

Лекция 11.

2.3. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3.1. Классификация точек разрыва.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

2.3.2. Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.
Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

2.3.3. Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции.
Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

2.3.4. Локальный экстремум функции одной переменной.

Понятие локального экстремума. Точки возможного экстремума функции.
Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных.

Лекция 12.

2.3.5. Выпуклость графика функции.

Понятие направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале. Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.3.6. Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные.

Лекция 13.

2.4. Построение графиков функций, заданных параметрически.

2.4.1. Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

2.4.2. Возрастание и убывание параметрической функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной.

2.4.3. Локальный экстремум параметрической функции.

Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных.

2.4.4. Выпуклость графика параметрической функции.

Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале. Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.4.5. Точки перегиба графика функции.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные.

2.4.6. Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Общая схема исследования функции и построение графика. Примеры исследования по этой схеме.

Лекция 14.

2.5. Понятие неопределенного и определенного интеграла.

2.5.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке.
Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке.
Основные свойства неопределенных интегралов.
Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.
Таблица основных неопределенных интегралов.
Интегрирование методом замены переменной.
Интегрирование по частям.

2.5.2. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры.
Формула Ньютона-Лейбница.
Производная определенного интеграла по верхнему и нижнему пределам.
Первообразная непрерывной функции.
Интегрирование методом замены переменной.
Интегрирование по частям.
Вычисление площади плоской фигуры.
Вычисление среднего значения функции.
Вычисление среднеквадратичного уклонения и дисперсии.

3. Модуль 3 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция m3-01.

3.1. Понятие неопределенного и определенного интеграла.

3.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке. Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке. Основные свойства неопределенных интегралов. Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций. Таблица основных неопределенных интегралов. Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование по частям.

3.1.2. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры. Формула Ньютона-Лейбница. Производная определенного интеграла по верхнему и нижнему пределам.
Первообразная непрерывной функции. Интегрирование методом замены переменной.
Интегрирование по частям. Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление среднего значения функции. Вычисление среднеквадратичного уклонения и дисперсии.

Читать:
[МАВЗ] Глава V, §1, 2, 3, 4, стр. 87-96. Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Глава I, §1, 2, 3, стр. 174-190. Глава II, §2, стр. 246-154

Лекция m3-02.

3.2. Множества и последовательности точек в m-мерном координатном пространстве.

3.2.1. Понятие m-мерного пространства.

Евклидово m-мерное координатное пространство. Шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколотая окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности. Ограниченные и неограниченные последовательности точек. Бесконечно большая последовательность. Предел последовательности. Предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

3.2.2. Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки. Открытые и замкнутые множества множества на плоскости и в пространстве. Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве. Связные и несвязные множества. Замыкание множества. Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости.

3.3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3.3.1. Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП). Способы визуализации. Карта линий равного уровня. Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность. Бесконечно малые функции в точке. Предел функции в бесконечно удаленной точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке.
Повторные пределы.

3.3.2. Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции многих переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними. Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями. Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §1, 2, 3, 4, стр. 191-212.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

Лекция т3-03.

3.4. Дифференцирование функции нескольких переменных.

3.4.1. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Частные производные ФНП. Геометрический смысл частной производной. Определение дифференцируемой ФНП. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных функции в точке. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке. Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции (без доказательства). Дифференциал функции нескольких переменных. Формулы для вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3.4.2. Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости.

3.4.3. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции. Частные производные и дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциал сложной функции.

3.4.4. Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению и градиента. Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке. Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФНП. Линии и поверхности уровня. Теорема Эйлера об однородных функциях.

3.4.5. Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных. Матрица Якоби и якобиан. Дифференцирование сложных векторных функций. Векторно-матричная форма записи первого дифференциала. Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация. Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана. Понятия однозначного и однолистного отображения. Достаточные условия.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.
[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.

Лекция т3-04.

3.4.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков сложной функции на примере второго дифференциала. Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП. Матрица Гессе.

3.4.7. Свойства непрерывных и дифференцируемых функций.

Ограниченность непрерывной функции, достижение непрерывной функцией своего максимального и минимального значений.

3.5. Формула Тейлора и локальный экстремум.

3.5.1. Формула Тейлора.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член. Остаточный член в форме Пеано. Остаточный член в форме Лагранжа. Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом третьего порядка. Приближенное вычисление значений функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.
[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.

Лекция m3-05.

3.5.2. Локальный экстремум функции многих переменных.

Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Понятие квадратичной формы и ее матрицы. Понятие знакоопределенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных. Исследование локального экстремума. Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума. Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 336-351.

Лекция m3-06.

3.6. Неявные функции.

3.6.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции. Формула для производных неявной функции. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в прямоугольнике. Теоремы о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в окрестности точки.

3.6.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений. Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.6.3. Экстремум неявной функции.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой одним уравнением и определяемой системой уравнений.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.

[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

Лекция m3-07.

3.7. Условный экстремум.

3.7.1. Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума. Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

Лекция m3-08.

3.7.2. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация. Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

4. Модуль 4 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция m4-01.

4.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

4.1.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений. Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

4.1.2. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой системой уравнений. Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

Лекция m4-02.

4.2. Условный экстремум с несколькими условиями связи.

4.2.1. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация. Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

Лекция m4-03.

4.3. Неопределенный интеграл.

4.3.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке. Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу. Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке. Основные свойства неопределенных интегралов.

4.3.2. Основные неопределенные интегралы.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

4.3.3. Интегрирование методом замены переменной.

4.3.4. Интегрирование по частям.

Лекция т4-04.

4.4. Методы интегрирования.

4.4.1. Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей. Деление многочленов столбиком. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Практические приемы нахождения коэффициентов разложения.
Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

4.4.2. Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций. Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

4.4.3. Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

Лекция т4-05.

4.5. Определенный интеграл.

4.5.1. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Пример ограниченной неинтегрируемой функции. Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте. Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

4.5.2. Свойства определенного интеграла.

Формулы среднего значения. Существование первообразной для непрерывной функции.
Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Лекция т4-06.

4.6. Приложения определенного интеграла.

4.6.1. Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой. Вычисление длины плоской кривой, заданной явным образом. Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически. Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

4.6.2. Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры. Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

4.6.3. Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом. Вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Лекция т4-07.

4.7. Несобственные интегралы.

4.7.1. Несобственные интегралы функции одной переменной

Несобственный интеграл - обобщение понятия площади для неограниченных плоских областей. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Понятие сходимости. Формулы интегрального исчисления: замена переменной, интегрирование по частям. Сходимость и расходимость эталонных интегралов $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ при различных значениях p. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Предельный признак сравнения. Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

4.7.2. Свойства несобственных интегралов

Условие Коши. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Условно сходящиеся несобственные интегралы. Признаки сходимости и условной сходимости. Признак Вейерштрасса. Признак Дирихле-Абеля.

4.7.3. Интегралы, зависящие от параметра.

Понятие интеграла, зависящие от параметра. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p (\ln x)^q \, dx$. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Применение дифференцирования по параметру.

Лекция т4-08.

4.8. Кратные интегралы.

4.8.1. Двойной интеграл

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

4.8.2. Тройной интеграл.

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

4.8.3. Приложения.

Вычисление координаты центра масс, дисперсии.