

1. Исследование сходимости

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Исследуйте сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{x^5+1+x^{-3,3}}{x^7+1+x^{-2,5}} dx$.
2. Исследуйте сходимость $\int_1^{+\infty} (\sqrt{x^9+x^3+1} - \sqrt{x^9-x^3+1}) dx$.
3. Исследуйте сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3 \cdot \sqrt{x}} dx$.
4. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{41} e^{-x^6} dx$.
5. Вычислите $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b xf(x) dx$, $\int_a^b x^2 f(x) dx$, $\langle x \rangle$, Dx , σ для $f(x) = \ln x$, $a = 0$, $b = 1$. Заметьте, что $\forall \alpha > 0 \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$
6. При каких $\alpha > 0$ сходится $\int_1^{+\infty} x^6 \sin(x^\alpha) dx$
7. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} (x^{\alpha-7} + x^{3-\alpha}) dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .
8. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1+x^3}{x^\alpha} dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .
9. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1+x^3}{x^\alpha} dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .
10. Найдите $\int \sin(\ln x) dx$
 $\blacklozenge \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.
11. Вычислите интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot \sin(\ln x) dx$ методом двукратного интегрирования по частям.
 $\blacklozenge \frac{1}{2} \cdot \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \sin(\ln x) dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cos(\ln x) dx = \frac{-\alpha}{1+\alpha^2}$.
12. Вычислите интеграл $\int_1^{+\infty} x^{-2} \cdot \ln(x) \cdot \sin(\ln x) dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Предварительно вычислите методом двукратного интегрирования по частям интеграл $\int_1^{+\infty} x^\beta \sin(\ln x) dx$ или $\int_1^{+\infty} x^\beta \cos(\ln x) dx$
 $\blacklozenge \frac{1}{2}$. Указание: $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \sin(\ln x) dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cos(\ln x) dx = \frac{-\alpha}{1+\alpha^2}$.
13. (1) Вычислите $\int (\ln x)^3 dx$. $\blacklozenge x^3 - 3x^2 + 6x - 6x + C$. (2) Вычислите $\int_0^1 (\ln x)^3 dx$. $\blacklozenge -6$.
14. При каких значениях α сходится $\int_0^1 x^{\alpha-3} dx$? Найдите этот интеграл.
15. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{41} e^{-x^6} dx$.
16. Используя метод дифференцирования по параметру, найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2} dx$. Можно использовать равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
 $\blacklozenge \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$.
17. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \sin x dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Можно использовать тождества $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.
 $\blacklozenge \frac{1}{2}$
18. Найдите значение величины $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^3} - e^{-5x^3}}{x} dx$
 $\blacklozenge \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$.
19. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(e^6 \cdot x^{11}) - \arctg(e^3 \cdot x^{11})}{x} dx$
 $\blacklozenge \frac{3\pi}{22} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(a \cdot x^n) - \arctg(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

20. Исследуйте сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1+x^{-2,7}}{x^5+1+x^{-4,2}} dx$.
21. Исследуйте сходимость $\int_1^{+\infty} (\sqrt{x^7+x^3+1} - \sqrt{x^7-x^3+1}) dx$.
22. Исследуйте сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$.
23. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{29} e^{-x^3} dx$.
24. Вычислите $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b xf(x) dx$, $\int_a^b x^2 f(x) dx$, $\langle x \rangle$, Dx , σ для $f(x) = (\ln x)^2$, $a = 0$, $b = 1$. Заметьте, что $\forall \alpha > 0 \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$

25. При каких $\alpha > 0$ сходится $\int_1^{+\infty} x^5 \sin(x^\alpha) dx$

26. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} (x^{2-\alpha} + x^{\alpha-8}) dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .

27. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_0^1 (x^{\alpha-3} + x^{7-\alpha}) dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .

28. При каких значениях параметра α интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} (x^\alpha + x^{\alpha-2}) dx$ сходится? Вычислите этот интеграл при указанных значениях α .

29. Найдите $\int \cos(\ln x) dx$

◆ $\frac{1}{2}x(\sin \ln x + \cos \ln x) + C$.

30. Найдите $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot \sin(\ln x) dx$ методом двукратного интегрирования по частям.

◆ $\frac{1}{2} \cdot \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \sin(\ln x) dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cos(\ln x) dx = \frac{-\alpha}{1+\alpha^2}$,

31. Найдите $\int_1^{+\infty} x^{-2} \cdot (\ln(x))^2 \cdot \sin(\ln x) dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Предварительно вычислите методом двукратного интегрирования по частям интеграл

$\int_1^{+\infty} x^\beta \sin(\ln x) dx$ или $\int_1^{+\infty} x^\beta \cos(\ln x) dx$

◆ $\frac{1}{2}$. Указание: $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \sin(\ln x) dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \cos(\ln x) dx = \frac{-\alpha}{1+\alpha^2}$,

32. (1) Вычислите $\int 32x^3(\ln x)^2 dx$. ◆ $8x^4t - 4x^4t + x^4 + C$. (2) Вычислите $\int_0^1 32x^3(\ln x)^2 dx$. ◆ 1.

33. При каких значениях α сходится $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-3} dx$? Найдите этот интеграл.

34. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{29} e^{-x^3} dx$.

35. Используя метод дифференцирования по параметру, найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \cdot e^{-x^2} dx$. Можно использовать равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.

◆ $\frac{15}{8} \sqrt{\pi}$.

36. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cos x dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Можно использовать тождества $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

◆ $-\frac{1}{2}$

37. Найдите значение величины $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^2} - e^{-5x^2}}{x} dx$

◆ $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$.

38. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(e^9 \cdot x^5) - \arctg(e^3 \cdot x^5)}{x} dx$

◆ $\frac{6\pi}{10} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(a \cdot x^n) - \arctg(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

39. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-2} \cdot \ln(x) \cdot \sin(\ln x) dx$. Известно, что $\int_1^{+\infty} x^{-p-1} \sin(q \ln x) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$, $\int_1^{+\infty} x^{-p-1} \cos(q \ln x) dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

◆ $\frac{1}{2}$.

40. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-3} \cdot \ln(x) \cdot \cos(\ln x) dx$. Известно, что $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \sin(qx) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

◆ 0, 12.

41. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-2} \cdot (\ln(x))^2 \cdot \cos(\ln x) dx$. Известно, что $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \sin(qx) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

◆ $-\frac{1}{2}$.

42. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-7} \cdot \ln(x) \cdot \sin(\ln x) dx$.

43. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру

$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(e^6 \cdot x^{11}) - \arctg(e^3 \cdot x^{11})}{x} dx$

◆ $\frac{3\pi}{22} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(a \cdot x^n) - \arctg(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}$.

44. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру

$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(32 \cdot x^7) - \arctg(2 \cdot x^7)}{x} dx$

◆ $\frac{\ln 16\pi}{14} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\arctg(a \cdot x^n) - \arctg(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}$.

45. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx$

◆ $\ln \frac{3}{2}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

46. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-3} \cdot \ln(x) \cdot \sin(\ln x) dx$. Известно, что $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \sin(qx) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

◆ 0,16.

47. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-2} \cdot (\ln(x))^2 \cdot \sin(\ln x) dx$. Известно, что $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \sin(qx) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

◆ $\frac{1}{2}$.

48. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-4} \cdot \ln(x) \cdot \sin(\ln x) dx$. Известно, что $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \sin(qx) dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \cos(qx) dx = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

◆ 0,06.

49. Вычислите $\int_1^{+\infty} x^{-5} \cdot (\ln(x))^2 \cdot \cos(\ln x) dx$.

50. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^9 \cdot x^5) - \operatorname{arctg}(e^3 \cdot x^5)}{x} dx$

$$\text{◆ } \frac{6\pi}{10} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot x^n) - \operatorname{arctg}(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}.$$

51. Найдите $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(81 \cdot x^{15}) - \operatorname{arctg}(3 \cdot x^{15})}{x} dx$

$$\text{◆ } \frac{\ln 27\pi}{30} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot x^n) - \operatorname{arctg}(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}.$$

52. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^2} - e^{-3x^2}}{x} dx$$

◆ $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

53. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^6 \cdot x^{11}) - \operatorname{arctg}(e^3 \cdot x^{11})}{x} dx$$

$$\text{◆ } \frac{3\pi}{22} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot x^n) - \operatorname{arctg}(b \cdot x^n)}{x} dx = \frac{\pi}{2n} \ln \frac{a}{b}.$$