Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

T704 (2008-2009) | **Домашнее задание k2-m1-05** | **Вариант k2-m1-05-v1**

2008-2009 Семинар k2-m1-05

Тема: Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

1. Вычисление моментов нормального распределения

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Используя метод дифференцирования по параметру, найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2}\,dx$. Можно использовать равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

♦ $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Используя метод дифференцирования по параметру, найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \cdot e^{-x^2}\,dx$. Можно использовать равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

♦ $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

2. Вычисление несобственных интегралов методом дифференцирования по параметру

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\sin x\,dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Можно использовать тождества $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

♦ $\frac{1}{2}$

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\cos x\,dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте). Можно использовать тождества $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

♦ $-\frac{1}{2}$

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\,dx$

♦ $\ln\frac{3}{2}$.

6. Найдите значение величины $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^2}-e^{-5x^2}}{x^2}\,dx$

♦ $\frac{\pi}{2}\ \ \sqrt{5}-\sqrt{2}$.

7. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+4x^2}\right)\frac{dx}{x}$

♦ $\ln 2$.

8. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+2x)^7}-\frac{1}{(1+4x)^7}\right]\frac{dx}{x}$

♦ $\ln 2$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

9. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-12x}-e^{-3x}}{x}\,dx$

♦ $-\ln\frac{12}{4}$.

10. Найдите значение величины $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^2}-e^{-5x^2}}{x}\,dx$

♦ $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$.

11. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+4x^2}-\frac{1}{1+8x^2}\right)\frac{dx}{x}$

♦ $0,5\ln 2$.

12. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+4x)^5}-\frac{1}{(1+16x)^5}\right]\frac{dx}{x}$

♦ $2\ln 2$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

13. Исследуйте на сходимость и вычислите (если сходится) методом дифференцирования по параметру $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^6\cdot x^{11})-\operatorname{arctg}(e^3\cdot x^{11})}{x}\,dx$

♦ $\frac{3\pi}{22}$. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a\cdot x^n)-\operatorname{arctg}(b\cdot x^n)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{a}{b}$.

14. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{12}}{x}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{e^3}{x}\right)}{x}\,dx$

♦ $\frac{4\pi}{24}$. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\ \frac{\alpha}{x}\ -\operatorname{arctg}\ \frac{\beta}{x}}{x}\,dx = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{a}{b}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

15. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^9\cdot x^5)-\operatorname{arctg}(e^3\cdot x^5)}{x}\,dx$

♦ $\frac{6\pi}{10}$. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a\cdot x^n)-\operatorname{arctg}(b\cdot x^n)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{a}{b}$.

16. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^2}{x}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{e^5}{x}\right)}{x}\,dx$.

♦ $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\ \frac{\alpha}{x}\ -\operatorname{arctg}\ \frac{\beta}{x}}{x}\,dx = \frac{\pi}{2n}\ln\frac{a}{b}$.

3. Приложения

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Пусть $\rho(x) = x^8\big(\ln x\big)^9$, $0 < x < 1$. **(1)** Найдите значение $M1 = \int_0^1 \rho(x)\,dx$, $Mx = \int_0^1 x\rho(x)\,dx$, $Mx^2 = \int_0^1 x^2\rho(x)\,dx$. ♦ $p(x) = C\cdot x^\alpha\ \ |\ln x|^n$, $0<x<1$; $C = \frac{\alpha^{n+1}}{n!}$ **(2)** Найдите $< x >= \frac{Mx}{M1}$.

♦ $< x >= \ \frac{\alpha}{\alpha+1}\Big)^{n+1} \approx e^{-\frac{n}{\alpha+1}}$. **(3)** Найдите $< x^2 >= \frac{Mx^2}{M1}$. ♦ $< x^2 >= \ \frac{\alpha}{\alpha+2}\Big)^{n+1} \approx e^{-\frac{2n}{\alpha+2}}$. **(4)** Найдите Dx. Оцените с точностью не хуже 5% без калькулятора. ♦ $< x^2 > - < x >^2 \approx e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha+1}}\cdot\frac{n+1}{(\alpha+1)^2}$. $Dx \approx e^{-2}\cdot 0,1$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

18. Пусть $\rho(x) = x^{18}\big(\ln x\big)^{10}$, $0 < x < 1$. **(1)** Найдите значение $M1 = \int_0^1 \rho(x)\,dx$, $Mx = \int_0^1 x\rho(x)\,dx$, $Mx^2 = \int_0^1 x^2\rho(x)\,dx$. ♦ $p(x) = C\cdot x^\alpha\ \ |\ln x|^n$, $0<x<1$; $C = \frac{\alpha^{n+1}}{n!}$ **(2)** Найдите $< x >= \frac{Mx}{M1}$.

♦ $< x >= \ \frac{\alpha}{\alpha+1}\Big)^{n+1} \approx e^{-\frac{n}{\alpha+1}}$. **(3)** Найдите $< x^2 >= \frac{Mx^2}{M1}$. ♦ $< x^2 >= \ \frac{\alpha}{\alpha+2}\Big)^{n+1} \approx e^{-\frac{2n}{\alpha+2}}$. **(4)** Найдите Dx. Оцените с точностью не хуже 5% без калькулятора. ♦ $< x^2 > - < x >^2 \approx e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha+1}}\cdot\frac{n+1}{(\alpha+1)^2}$. $Dx \approx e^{-1}\cdot(1/40)$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

19. Пусть случайная величина x может принимать любые значения из множества $x \in [0;\ +\infty)$, причем плотность распределения вероятностей равна $p(x) = C\cdot x^6 e^{-2x}$, $x \geqslant 0$.

(1) Найдите значение C. ♦ $C = \frac{8}{45}$ **(2)** Найдите $< x >$. ♦ $\frac{315}{6}\cdot\frac{8}{45} = \frac{7}{2}$. **(3)** Найдите $< x^2 >$. ♦ $\frac{315}{4}\cdot\frac{8}{45} = 14$.

(4) Найдите Dx. ♦ $\frac{7}{4}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

20. Пусть случайная величина x может принимать любые значения из множества $x \in [0;\ +\infty)$, причем плотность распределения вероятностей равна $p(x) = C\cdot x^7 e^{-2x}$, $x \geqslant 0$.

(1) Найдите значение C. ♦ $C = \frac{16}{315}$ **(2)** Найдите $< x >$. ♦ $\frac{315}{4}\cdot\frac{16}{315} = \frac{4}{1}$. **(3)** Найдите $< x^2 >$. ♦ $\frac{2835}{8}\cdot\frac{16}{315} = 14$.

(4) Найдите Dx. ♦ $\frac{2}{1}$.